Mecânica Quântica – Exame – 21/1/2008

Curso de Engenharia Física Tecnológica – 2007/2008
Duração 3h

1. Escreva sempre a expressão literal final do que deseja calcular numericamente em termos das variáveis a utilizar e não dos valores numéricos destas. Justifique todas as afirmações que fizer. Seja sucinto.
2. Para quem já fez o 1º teste e quiser fazer só o 2º teste, terá que responder às perguntas IV, V, VI e VII, que valerão o dobro para esse caso e a duração será de 1h30m.

I (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Os valores próprios dum operador Hermítico podem-se escrever na forma $\lambda = e^{i\alpha}$, com α real.
2. Para qualquer estado $|n\rangle$ do oscilador harmónico temos $\langle n|\, x\, |n\rangle = 0$.
3. Para qualquer estado $|\psi\rangle$, normalizado, temos sempre $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq E_0$, onde E_0 é o valor próprio mais baixo de H (estado fundamental).
4. Se A e B forem operadores hermíticos, então $(A+B)^2$ também é um operador hermítico.

II (4 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$. Considere que o electrão se encontra no estado

$$\psi_a(x,0) = Au_2(x)$$

1. Para o estado ψ_a determine A e o valor médio da energia $\langle E\rangle$.
2. Determine o $\langle x\rangle$ para o estado ψ_a.
3. Considere agora o estado
$$\psi_b(x,0) = B\,u_1(x) + C\,u_2(x) + B\,u_3(x)$$
Sabe-se que uma medida da energia do sistema neste estado dá E_2 com probabilidade 1/2. Determine B e C (reais e positivos).
4. Seja agora o estado
$$\psi_c(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,u_1(x) + D\,u_2(x)$$
Determine a constante real D sabendo que a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$ é menor que a de a encontrar no intervalo $[a/2, a]$. **Nota:** Se argumentar (bem) graficamente não precisa de fazer os integrais.

III (4 valores)

Considere o seguinte potencial a uma dimensão:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\lambda}{a}\delta(x) + \begin{cases} \infty & x < -a \\ 0 & -a < x < a \\ \infty & x > a \end{cases}$$

isto é, um poço de potencial infinito com uma função delta na origem. Considere que $\lambda > 0$. Para o problema convém relembrar que na ausência da função delta ($\lambda = 0$) o estado fundamental e o primeiro estado excitado são, respectivamente,

$$u_+(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\cos\frac{\pi x}{2a}, \quad E_+ = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} \qquad u_-(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}, \quad E_- = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$$

1. Na presença da função delta, as funções de onda do estado fundamental continuam a ser funções próprias da paridade. Explique porquê.

2. Usando o facto de que o estado fundamental deve ser uma função par, mostre que a equação de quantificação da energia desse estado é

$$\tan ka = -\frac{2ka}{\lambda}$$

onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

3. Mostre (graficamente) que aquela equação tem sempre solução. Verifique que obtém o resultado correcto no limite $\lambda \to 0$.

4. Considere agora o 1º estado excitado. Usando o facto de que é uma solução ímpar determine a sua energia. Como compara com E_-? Mostre que para qualquer valor de λ a energia do 1º estado excitado é sempre maior do que a energia do estado fundamental.

5. Faça um gráfico aproximado das funções de onda do estado fundamental e do primeiro estado excitado.

6. Considere agora $\lambda < 0$. Verifique que existe um estado fundamental com $E < 0$ desde que $|\lambda| > \lambda_0 > 0$. Determine λ_0.

IV (2 valores)

Para cada uma das questões seguintes diga se são verdadeiras ou falsas. Justifique numa linha a sua resposta, isto é, indique a *razão* sem fazer contas.

1. Duas partículas de spin 1 estão num estado com número quântico magnético $m = 0$. A probabilidade de uma medida do spin total dar o valor $6\hbar^2$ é 0.

2. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$|\psi\rangle = f(r)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,-1\rangle\right)$$

onde os estados $|l,m\rangle$ são os estados próprios de L^2 e L_z. Faz-se uma medida de L_z^2 e obtém-se $\hbar^2$. A probabilidade duma medida de L_z, feita imediatamente a seguir à medida anterior, de dar $-\hbar$ é 1/3.

3. Uma partícula num potencial central está num estado descrito pela expressão

$$\psi(r,\theta,\varphi) = Ae^{-r^2/r_0^2}\ \sin^2\theta\sin 2\varphi$$

A probabilidade duma medida de L_z dar $L_z = 2\hbar$ é 1/2.

4. Num átomo com número atómico Z (número de protões) o potencial de Coulomb é $V(r) = \dfrac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}$. Considere que tem só um electrão. Então a energia do estado fundamental desse ião é dada por $E_0(Z) = -13.6\,Z$ eV.

V (2 valores)

Considere os estados próprios do momento angular $|l,m\rangle$

1. Calcule o elemento de matriz

$$\left\langle l,m|L_z^2|l,m\right\rangle$$

2. Mostre que o elemento de matriz
$$\langle l, m | L_x L_z L_x | l, m \rangle$$
se anula para $m = 0$.

VI (3 valores)

Considere o problema do *rotor plano* com o Hamiltoniano

$$H = \frac{L_z^2}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

As funções próprias ortonormalizadas deste problema são

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \text{com} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \ \psi_m^* \psi_n = \delta_{mn}$$

e energias

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{2I}$$

Considere agora uma perturbação deste sistema da forma

$$H_1 = V_0 \cos 2\varphi, \quad V_0 \ll \frac{\hbar^2}{2I}$$

1. Determine a correcção de 1ª ordem ao estado fundamental.
2. Determine a correcção de 1ª ordem ao primeiro estado excitado. Faça um diagrama das energias antes e depois de aplicar a perturbação. **Nota:** Não esquecer que o 1º estado excitado é degenerado.
3. Determine a correcção de 2ª ordem ao estado fundamental.

Sugestão: Os cálculos deste problema simplificam-se se escrever a perturbação em termos de exponenciais complexas.

VII (3 valores)

Considere um sistema de duas partículas de spin $\frac{1}{2}$ fixas nas suas posições no espaço. A interacção entre as duas partículas é descrita pelo Hamiltoniano,

$$H = \frac{V_0}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{\mu_{\rm B}}{\hbar} \vec{B} \cdot \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 \right)$$

1. Encontre os níveis de energia em função de $\eta = \dfrac{\mu_{\rm B} B}{V_0}$ e faça um gráfico aproximado da variação com η.
2. Encontre o valor do campo B para que dois dos níveis tenham a mesma energia (*level crossing*).