

Sobre Fases em Mecânica Quântica

J. C. Romão*

*Departamento de Física & CFTP, Instituto Superior Técnico
Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal*

Nesta nota vamos falar sobre fases em mecânica quântica. Começamos por rever fases clássicas, depois falaremos do efeito de Aharonov-Bohm e finalmente formalizaremos falando das chamadas fases de Berry.

I. EXEMPLOS CLÁSSICOS

A. Transporte paralelo de vectores

Da física clássica é bem conhecido o facto de que se o espaço não for plano, se transportamos paralelamente um vector ao longo dum caminho fechado, em geral o vector não acaba na mesma direcção com que começou. Pode-se mostrar que o ângulo de *desvio* está relacionado com a curvatura do espaço onde deslocamos os vector, como a situação indicada na Fig. 1.

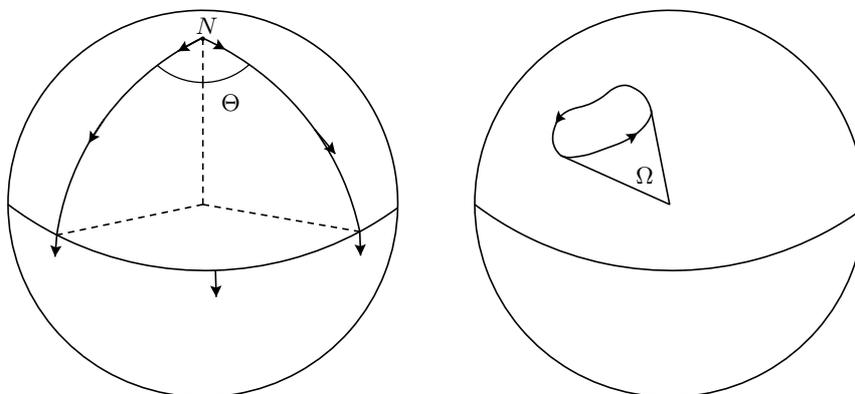


Figura 1: Transporte paralelo dum vector à superfície da Terra. O desvio angular é dado pelo ângulo sólido Ω .

No caso do painel esquerdo da Fig. 1 o ângulo de desvio é $\pi/2$. No caso geral será dado pelo ângulo sólido segundo o qual do centro se vê o caminho. Para o caminho indicado no painel esquerdo, temos um oitavo de esfera e portanto $\Omega = 4\pi/8 = \pi/2$.

*Electronic address: jorge.romao@ist.utl.pt

B. O Pêndulo de Foucault

Um outro exemplo clássico é o pêndulo de Foucault. Como se sabe o plano de oscilação roda com a rotação da Terra. A explicação usual faz uso das forças de Coriolis, mas de facto, é apenas uma fase geométrica como está representado na Fig. 2. O ângulo sólido segundo o qual o caminho é visto à latitude

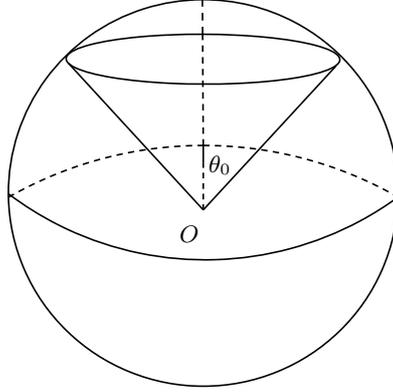


Figura 2: O pêndulo de Foucault no seu movimento durante um dia.

$\phi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ é dado por

$$\Omega = \int \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \left[-\cos \theta \right]_0^{\theta_0} = 2\pi(1 - \cos \theta_0) = 2\pi - 2\pi \sin \phi_0 \quad (1)$$

o que, relativamente à Terra que rodou dum ângulo 2π este resultado indica que o pêndulo precessou dum ângulo $2\pi \sin \phi_0$. Por exemplo, para um lugar à latitude $\phi_0 = 30^\circ$ o plano do pêndulo demora dois dias a voltar à situação inicial. A rotação é feita no sentido dos ponteiros do relógio no hemisfério Norte e no sentido contrário no hemisfério Sul, como se pode facilmente ver pensando nos pólos. No equador não há rotação do plano.

II. O EFEITO DE AHARONOV-BOHM

Em mecânica quântica ângulos correspondem a fases. Duma maneira geral dizemos que, a menos que haja interferência, as fases não serão observáveis, pois as observáveis são proporcionais aos módulos quadrados das funções de onda. Veremos no entanto que surpresas tem a mecânica quântica para nós, começando pelo efeito de Aharonov-Bohm.

Em electrodinâmica clássica os potenciais ϕ e \vec{A} não são directamente mensuráveis, as quantidades físicas são os campos eléctrico e magnético [1]

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (2)$$

Como é bem conhecido os potenciais não são únicos. Seja (ϕ, \vec{A}) um par de potenciais. Então o novo par

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad (3)$$

conduz aos mesmos campos. Esta invariância é conhecida pelo nome de invariância de *gauge* ou *padrão*.

Em mecânica quântica os potenciais desempenham um papel muito mais importante. De facto, o Hamiltoniano de interacção com o campo electromagnético é dado por (o chamado acoplamento mínimo

que tem a ver com o facto do momento linear duma partícula de carga q na presença do campo electromagnético ser $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$,

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi \quad (4)$$

Contudo, pode mostrar-se que a teoria é invariante de gauge e nunca ninguém prestou muita atenção a esta questão até 1959, quando Aharonov e Bohm mostraram que os potenciais podem ter efeitos reais[2]. Eles imaginaram a seguinte experiência, descrita na Fig. 3. Um feixe de electrões é dividido em dois que são feitos passar à volta dum solenóide muito longo de tal forma que o campo \vec{B} no seu trajecto é nulo. No final o feixe é reconstruído podendo assim os electrões, que seguiram caminhos diferentes, interferir entre si. Se eles adquiriram fases diferentes vai haver um efeito detectável no alvo. Para compreendermos

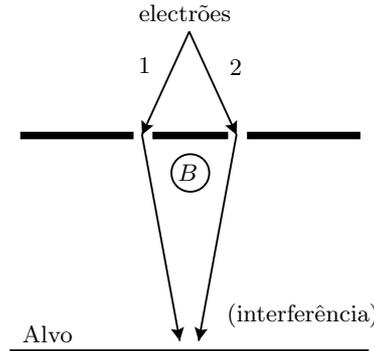


Figura 3: Os electrões seguem dois caminhos percorrendo regiões do espaço onde $\vec{B} = 0$.

o que se passa comecemos por notar que o campo do solenóide, de raio R , pode ser obtido a partir dum potencial vector em coordenadas cilíndricas A_φ dado por

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{B}{2}r, \quad r < R \\ A_\varphi &= \frac{BR^2}{2r} = \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad r > R \end{aligned} \quad (5)$$

onde na segunda forma para $r > R$ se usou a definição de fluxo magnético $\Phi = \pi R^2 B$. De facto a única componente de \vec{B} virá [1]

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = B, \quad r < R \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = 0, \quad r > R. \end{aligned} \quad (6)$$

Portanto o campo \vec{B} é nulo nas trajectórias dos electrões mas o potencial vector é diferente de zero. A equação de Schrödinger escreve-se na forma

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + V \right] \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (7)$$

onde V pode incluir a contribuição de qualquer potencial escalar. Se $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ podemos escrever

$$g(\vec{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_{\mathcal{O}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (8)$$

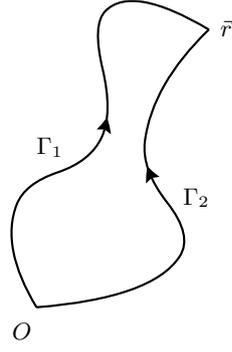


Figura 4:

onde o caminho é arbitrário (desde que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$). De facto consideremos dois caminhos Γ_1 e Γ_2 conforme indicado na Fig. 4. Calculemos a diferença entre os caminhos, isto é,

$$g_{\Gamma_1} - g_{\Gamma_2} = \int_{\mathcal{O}, \Gamma_1}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' - \int_{\mathcal{O}, \Gamma_2}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = \oint_{\Gamma} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' = 0 \quad (9)$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$. A última igualdade da Eq. (9) resulta de \vec{A} ser um gradiente pois $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$. Definimos agora

$$\psi(\vec{r}) = e^{ig(\vec{r})} \psi'(\vec{r}) \quad (10)$$

e obtemos

$$\vec{\nabla} \psi = e^{ig} (i\vec{\nabla} g) \psi' + e^{ig} (\vec{\nabla} \psi') \quad (11)$$

mas $\vec{\nabla} g = \frac{q}{\hbar} \vec{A}$, pelo que

$$(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}) \psi = -i\hbar e^{ig} \vec{\nabla} \psi' \quad (12)$$

e

$$\begin{aligned} (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A})^2 \psi &= (-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}) (-i\hbar e^{ig} \vec{\nabla} \psi') \\ &= -\hbar^2 \nabla^2 \psi' - \hbar^2 i e^{ig} \vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} \psi' + i\hbar q e^{ig} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi' \\ &= -\hbar^2 e^{ig} \nabla^2 \psi' \end{aligned} \quad (13)$$

Substituindo na Eq. (7) obtemos

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right] \psi' = i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} \quad (14)$$

isto é, ψ' satisfaz a Equação de Schrödinger sem o potencial \vec{A} . Isto quer dizer que se conseguirmos resolver a Eq. (14) para ψ' , então a solução na presença dum potencial vector com $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ é só uma multiplicação por uma fase. Voltemos agora à experiência de Aharonov-Bohm. Os electrões seguindo os caminhos 1 e 2 vão adquirir fases diferentes,

$$g = \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \cdot (r d\varphi \vec{e}_\varphi) = \pm \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (15)$$

com o sinal \pm correspondendo ao electrão que se desloca no mesmo sentido do \vec{A} ou no sentido oposto, respectivamente. A diferença de fase é

$$\Delta = \frac{q\Phi}{\hbar} = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

e será detectável, como foi demonstrado experimentalmente por Chambers [3]. Notar que o resultado é invariante para as transformações de gauge da Eq. (3).

III. FASES DE BERRY

A. O Teorema Adiabático

Consideremos um pêndulo clássico de comprimento L com período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Imaginemos agora que, muito lentamente, variamos o comprimento do pêndulo. Se a variação for muito lenta em comparação com a frequência do pêndulo, então o novo período deverá ser dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L(t)}{g}} \quad (17)$$

Nestas condições dizemos que o processo é adiabático. Quando um processo varia adiabaticamente, resolvemos o problema exactamente com as condições exteriores consideradas fixas e depois deixamos os parâmetros variar com o tempo, lentamente à escala das variações do sistema.

Em mecânica quântica podemos formular este resultado sob a forma dum teorema.

Se uma partícula estava inicialmente no estado $|n\rangle$ do Hamiltoniano H^i , na transição adiabática de H^i para H^f , ela vai ser levada para o estado $|n\rangle$ do Hamiltoniano H^f .

Estamos a admitir, por simplicidade, que o espectro é não degenerado e a igualdade é a menos de alguma fase. Embora este resultado pareça simples, a demonstração não o é. Vamos só dar o resultado final, podendo a demonstração ser vista no livro do Griffiths [4] e no artigo original de Michael Berry [5]. O resultado é

$$\Psi_n(t) = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} \psi_n(t) \quad (18)$$

onde

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt' \quad (19)$$

é uma fase dinâmica, que tem que ver com a evolução dos estados com o tempo, e

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt' \quad (20)$$

é uma fase adicional de origem geométrica [5] que discutiremos no seguimento. Que a fase θ_n é uma fase dinâmica, é fácil de perceber. Se não houver transformação adiabática, então E_n não depende do tempo e portanto

$$e^{i\theta_n(t)} = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \quad (21)$$

isto é, a evolução normal no tempo dos estados estacionários.

B. Fases de Berry

Vimos na secção anterior que quando um dado $|n\rangle$ dum dado Hamiltoniano evolui adiabaticamente, o estado final $|n\rangle$ do Hamiltoniano final, obtém-se multiplicando o estado inicial por uma fase dinâmica e outra geométrica. Vamos analisar esta em mais detalhe. É dada por

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial}{\partial t'} \psi_n(t') \right. \right\rangle dt' \quad (22)$$

A variação com t deve-se a que algum parâmetro do Hamiltoniano varia com o tempo. Seja esse parâmetro $R(t)$. Então

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R} \frac{dR}{dt} \quad (23)$$

e portanto

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial \psi_n(t')}{\partial R} \right. \right\rangle \frac{dR}{dt'} dt' = i \int_{R_i}^{R_f} \left\langle \psi_n(t') \left| \frac{\partial \psi_n(t')}{\partial R} \right. \right\rangle dR \quad (24)$$

Em particular se o Hamiltoniano retorna ao estado inicial ao fim do tempo T , devemos ter $\gamma_n(T) = 0$ e portanto o resultado é trivial. Contudo se em vez de um só parâmetro, tivermos N parâmetros: $R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)$, obtemos

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \psi_n}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \psi_n}{\partial R_N} \frac{dR_N}{dt} = (\vec{\nabla}_R \psi_n) \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} \quad (25)$$

e obtemos

$$\gamma_n(t) = i \int_{\vec{R}_i}^{\vec{R}_f} \left\langle \psi_n(t') \left| \vec{\nabla}_R \psi_n \right. \right\rangle \cdot d\vec{R} \quad (26)$$

Se o Hamiltoniano volta ao estado inicial ao fim dum tempo T , obtemos

$$\gamma_n(T) = i \oint \left\langle \psi_n(t') \left| \vec{\nabla}_R \psi_n \right. \right\rangle \cdot d\vec{R} \quad (27)$$

que é um integral ao longo dum caminho fechado e que em geral não será zero se o espaço dos parâmetros for não trivial topologicamente. A Eq. (27) foi pela primeira vez deduzida por Michael Berry [5] e designa-se por fase de Berry. Pode mostrar-se que, para que a fase seja diferente de zero, é condição necessária que o número de parâmetros R_i seja pelo menos de dois e que a função de onda ψ_n seja complexa. Estas condições não são no entanto suficientes e na maior parte dos casos a fase é nula.

Estamos habituados a que as fases em mecânica quântica não desempenhem um papel muito importante pois as quantidades físicas envolvem $|\psi|^2$. Contudo é fácil de ver que pode haver consequências observáveis. Suponhamos que dividimos um feixe de partículas em duas partes, uma das quais passa através duma região com um potencial a variar adiabaticamente e a outra não. Quando os dois feixes são recombinados devemos ter

$$\Psi = \frac{1}{2} \Psi_0 + \frac{1}{2} \Psi_0 e^{i\Gamma} \quad (28)$$

Então

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4} |\Psi_0|^2 (2 + 2 \cos \Gamma) = |\Psi_0|^2 \cos^2 \frac{\Gamma}{2} \quad (29)$$

Portanto olhando para pontos com máximos e mínimos de $|\Psi|^2$ podemos determinar Γ . O único problema será que eventualmente Γ será uma mistura da fase geométrica e da fase dinâmica e ser portanto difícil de separar a fase geométrica.

C. O Efeito de Aharonov-Bohm e a Fase de Berry

As fases de Berry aparecem em muitas situações em física. Aqui vamos só mostrar que o efeito de Aharonov-Bohm pode ser interpretado como uma fase geométrica de Berry. Para isso seguimos a discussão de Griffiths[4] que por sua vez segue o artigo original de Berry [5].

Começamos por considerar que a partícula está confinada a uma caixa centrado no ponto \vec{R} por um potencial $V(\vec{r} - \vec{R})$. Então as funções próprias do Hamiltoniano satisfazem

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r}) \right)^2 + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi_n = E_n \psi_n \quad (30)$$

Ora nós já aprendemos a resolver esta equação. Seja

$$\psi_n = e^{ig} \psi'_n \quad (31)$$

com

$$g = \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (32)$$

e a função ψ'_n satisfaz

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r} - \vec{R}) \right] \psi_n = E_n \psi_n \quad (33)$$

Agora transportamos a caixa à volta do solenóide e calculemos a fase de Berry. Notando que

$$\vec{\nabla}_R \psi_n = \vec{\nabla}_R \left[e^{ig} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \right] = -i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) e^{ig} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) + e^{ig} \vec{\nabla}_R \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \quad (34)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \vec{\nabla}_R \psi_n \rangle &= \int e^{-ig} \left[\psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \right]^* e^{ig} \left[-i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\nabla}_R \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \right] d^3 \vec{r} \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) - \int \left[\psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) \right]^* \vec{\nabla} \psi'_n(\vec{r} - \vec{R}) d^3 \vec{r} \\ &= -i \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (35)$$

onde usámos o facto de que o valor médio do momento é nulo e que $\vec{\nabla}_R = -\vec{\nabla}$. Pondo na fórmula de Berry, Eq. (27), obtemos finalmente

$$\gamma_n(T) = \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = \frac{q}{\hbar} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS = \frac{q\Phi}{\hbar} \quad (36)$$

o que confirma o resultado de Aharonov-Bohm. Notar que o resultado da Eq. (36) é invariante de gauge. De facto uma transformação do tipo da Eq. (3) deixa $\gamma_n(T)$ invariante.

D. Spin $\frac{1}{2}$ num Campo Magnético em Rotação

O exemplo por excelência das fases de Berry em mecânica quântica é o caso dum spin $\frac{1}{2}$ num campo magnético que precessa lentamente em torno duma direcção. Este problema é particularmente interessante, pois pode ser resolvido exactamente e depois calcular o limite em que a rotação do campo é muito lenta em comparação com as frequências próprias do sistema e assim recuperar o resultado do teorema adiabático e a fase de Berry.

Seja então um spin $\frac{1}{2}$ na origem dum referencial no qual existe um campo magnético que precessa com velocidade angular ω fazendo um ângulo α com o eixo dos z , isto é, (ver Fig. 5)

$$\vec{B} = B_0 \left[\sin \alpha \cos \omega t \vec{e}_x + \sin \alpha \sin \omega t \vec{e}_y + \cos \alpha \vec{e}_z \right] \quad (37)$$

O Hamiltoniano será então

$$H(t) = \frac{e}{m} \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\hbar \omega_1}{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix} \quad (38)$$

com

$$\omega_1 = \frac{eB_0}{m} \quad (39)$$

Como vimos, (Gasiorowicz [6], Cap. 10), os vectores próprios *instantâneos* de $H(t)$ são

$$\chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ e^{i\omega t} \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}, \quad \chi_-(t) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} \\ -e^{i\omega t} \cos \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (40)$$

com valores próprios $E_{\pm} = \pm \frac{\hbar\omega_1}{2}$. Consideremos agora que no instante inicial, $t = 0$, o spin está *para cima* segundo a direcção de $\vec{B}(0)$, isto é,

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (41)$$

A evolução no tempo não pode ser obtida directamente do postulado da expansão pois como o Hamiltoniano depende do tempo, os estados $\chi_{\pm}(t)$ não são estados estacionários. No entanto, neste caso podemos ter a resposta exacta, pois a equação de Schrödinger pode ser resolvida exactamente. De facto temos

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{db}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_1}{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha & e^{-i\omega t} \sin \alpha \\ e^{i\omega t} \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (42)$$

Para resolver esta equação é conveniente fazer a mudança de variável

$$a = \hat{a}e^{-i\omega t/2}, \quad b = \hat{b}e^{+i\omega t/2} \quad (43)$$

Então a equação de Schrödinger para \hat{a} e \hat{b} virá,

$$i\hbar \begin{pmatrix} \frac{d\hat{a}}{dt} \\ \frac{d\hat{b}}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_1}{2} \begin{pmatrix} i\frac{\omega}{2} - i\frac{\omega_1}{2} \cos \alpha & -i\frac{\omega_1}{2} \sin \alpha \\ -i\frac{\omega_1}{2} \sin \alpha & -i\frac{\omega}{2} + i\frac{\omega_1}{2} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (44)$$

que é um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem com coeficientes constantes. A equação característica é

$$\lambda^2 = - \left(\frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{4} - \frac{\omega\omega_1}{2} \cos \alpha \right) \quad (45)$$

ou seja

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{4} - \frac{\omega\omega_1}{2} \cos \alpha} \equiv \pm i \frac{\eta}{2} \quad (46)$$

As soluções gerais são então

$$\begin{aligned} \hat{a} &= c_1 \cos \left(\frac{\eta t}{2} \right) + c_2 \sin \left(\frac{\eta t}{2} \right) \\ \hat{b} &= c_3 \cos \left(\frac{\eta t}{2} \right) + c_4 \sin \left(\frac{\eta t}{2} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Usando as condições iniciais, Eq. (41), obtemos finalmente a solução exacta,

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \left[\cos \left(\frac{\eta t}{2} \right) - i \frac{(\omega_1 - \omega)}{\eta} \sin \left(\frac{\eta t}{2} \right) \right] \cos \frac{\alpha}{2} e^{-i\omega t/2} \\ \left[\cos \left(\frac{\eta t}{2} \right) - i \frac{(\omega_1 + \omega)}{\eta} \sin \left(\frac{\eta t}{2} \right) \right] \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\omega t/2} \end{pmatrix} \quad (48)$$

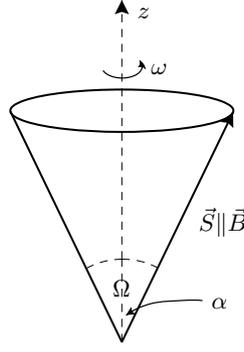


Figura 5: Campo \vec{B} precessando em torno do eixo dos z fazendo um ângulo α com este. O ângulo sólido segundo o qual se vê o spin a rodar a partir da origem, é $\Omega = \pi(\cos \alpha - 1)$.

Esta solução pode ser escrita na base $\chi_{\pm}(t)$ na forma

$$\chi(t) = \left[\cos\left(\frac{\eta t}{2}\right) - i \frac{(\omega_1 - \omega \cos \alpha)}{\eta} \sin\left(\frac{\eta t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_+ + i \left[\frac{\omega}{\eta} \sin \alpha \sin\left(\frac{\eta t}{2}\right) \right] e^{-i\omega t/2} \chi_- \quad (49)$$

Consideremos agora, nas condições do teorema adiabático, que $\omega \ll \omega_1$. Então

$$\eta \simeq \omega_1 - \omega \cos \alpha \quad (50)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \chi(t) &= e^{-i\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega \cos \alpha)t} e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \chi_+(t) \\ &= e^{-i\frac{1}{2}\omega_1 t} e^{i\frac{\omega}{2}(\cos \alpha - 1)t} \chi_+(t) \\ &= e^{-i\theta_+(t)} e^{i\gamma(t)} \chi_+(t) \end{aligned} \quad (51)$$

onde $\theta_+(t)$ é a fase dinâmica correspondente ao valor próprio $+\frac{\hbar\omega_1}{2}$ e $\gamma(t) = \frac{\omega}{2}(\cos \alpha - 1)t$ a fase de Berry. Numa rotação completa dum período $T = 2\pi/\omega$ obtemos para a fase de Berry,

$$\gamma(T) = \pi(\cos \alpha - 1) = -\frac{1}{2}\Omega \quad (52)$$

onde a última forma faz lembrar o que acontece com o transporte paralelo de vectores na superfície da Terra e o ângulo sólido Ω está definido na Fig. 5.

Podemos agora usar a Eq. (27) para calcular a fase de Berry para este problema e comparar com o resultado da Eq. (52). Para isso notemos que o estado $\chi_+(t)$ se escreve em coordenadas esféricas

$$\chi_+(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (53)$$

com $\theta = \alpha$ e $\varphi = \omega t$. Obtemos então, usando o gradiente em coordenadas esféricas [1],

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \chi_+ &= \frac{\partial \chi_+}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_+}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi_+}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -(1/2) \sin(\theta/2) \\ (1/2) e^{i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} 0 \\ i e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (54)$$

obtemos facilmente

$$\langle \chi_+ | \vec{\nabla} \chi_+ \rangle = i \frac{\sin^2(\theta/2)}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi = \frac{i}{2} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} \vec{e}_\varphi \quad (55)$$

Portanto

$$\gamma(T) = i \oint \langle \chi_+ | \vec{\nabla} \chi_+ \rangle \cdot (r \sin \theta d\varphi) \vec{e}_\varphi = \pi(\cos \theta - 1) = \pi(\cos \alpha - 1) \quad (56)$$

em acordo com a Eq. (52). Podemos ir mesmo um pouco mais longe e notar que, se usarmos o teorema de Stokes, obtemos

$$\gamma(T) = i \oint \langle \chi_+ | \vec{\nabla} \chi_+ \rangle \cdot d\vec{r} = i \int_S \vec{\nabla} \times \langle \chi_+ | \vec{\nabla} \chi_+ \rangle \cdot \vec{n} dS \quad (57)$$

Um cálculo simples dá

$$\vec{\nabla} \times \langle \chi_+ | \vec{\nabla} \chi_+ \rangle = \frac{1}{2r^2} \vec{e}_r \quad (58)$$

pelo que

$$\gamma(T) = -\frac{1}{2} \int_S \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega = -\frac{1}{2} \Omega \quad (59)$$

de acordo com a segunda forma da Eq. (52). Este último resultado é mais geral, pois é válido mesmo que o vector \vec{B} não descreva um cone mas uma curva qualquer numa esfera de raio B_0 . Pode mostrar-se [4] que, para spin s , o resultado anterior seria $-s\Omega$.

-
- [1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).
 [2] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
 [3] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 3 (1960).
 [4] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, 2nd Edition, 2005).
 [5] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A392**, 45 (1984).
 [6] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics, 3rd Edition* (John Wiley & Sons, 2003).