Física de Partículas
Aula 3
Equações de Klein-Gordon e Dirac

Jorge C. Romão
Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

2014

Sumário da Aula

- A equação de Klein-Gordon
- A equação de Dirac
- Soluções para a partícula livre
  - Soluções da equação de Dirac no referencial próprio
  - Soluções da equação de Dirac para $p \neq 0$
- Covariância da equação de Dirac
- Bilineares covariantes
- Antipartículas
- Spin e Helicidade

A equação de Schrödinger

- Comecemos pela partícula livre. Em mecânica quântica não relativista a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental ($\hbar = c = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = H \psi$$

- Usando o Hamiltoniano livre não relativista que é

$$H = \frac{p^2}{2\, m}$$

e fazendo a substituição $\vec{p} \to -i \vec{\nabla}$.

- Obtemos então

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi$$

Equação de Klein-Gordon

- Em relatividade restrita a energia está relacionada com o momento linear através da relação

$$p_\mu p^\mu = m^2$$

onde

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p})$$

- Temos então

$$E^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2$$

ou seja

$$E^2 = p^2 + m^2 \Rightarrow E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

Equação de Klein-Gordon

- Classicamente exige-se que as energias sejam positivas por isso deveríamos ter no caso relativista

$$H = \sqrt{p^2 + m^2}$$

- Somos imediatamente confrontados com o problema de interpretar a raiz quadrada dum operador.
- Para evitar este problema vamos encontrar uma equação para H^2. Isto obtém-se facilmente iterando a equação e observando que $\left[i\dfrac{\partial}{\partial t}, H\right] = 0$.
- Obtém-se então

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (-\vec{\nabla}^2 + m^2)\psi$$

ou ainda

$$\left[\Box + m^2\right]\psi = 0\,, \qquad \Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Equação de Klein-Gordon

- Agora não temos dificuldades em interpretar os operadores mas introduzimos no problema as soluções de energia negativa.
- Como veremos as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativista e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas.
- Mas não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da equação de KG, chamada equação de Klein-Gordon como equação relativista para o eletrão mas antes outro problema relacionado com a *densidade* de probabilidade.
- Partindo da equação de KG e da equação complexa conjugada obtemos

$$\psi^* \left[\Box + m^2\right] \psi - \psi \left[\Box + m^2\right] \psi^* = 0$$

ou

$$0 = \psi^* \Box \psi - \psi \Box \psi^* = \partial_\mu (\psi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}{}^{\mu}) \psi \equiv \partial_\mu (\psi^* \overset{\rightarrow}{\partial}{}^{\mu} \psi - \psi^* \overset{\leftarrow}{\partial}{}^{\mu} \psi)$$

Equação de Klein-Gordon

- Temos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad ; \qquad J^\mu = \psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi$$

- Na identificação usual $J^\mu = (\rho, \vec{J})$ pelo que a densidade será

$$\rho = \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

- Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida positiva.
- Finalmente uma terceira razão fez abandonar a equação da Klein-Gordon. De facto ela não conduz aos níveis de energia do átomo de *hidrogénio*
- Se excetuarmos esta última razão, a equação de KG foi abandonada pelas razões erradas. De fato a equação de Klein Gordon é uma boa equação para spin 0

A equação de Dirac

- Confrontado com os problemas anteriores Dirac propôs uma outra equação relativista para o eletrão. Como na equação fundamental, a derivada em ordem ao tempo aparece linearmente é natural admitir num contexto relativista que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em ordem às coordenadas

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m\right)\psi \equiv H\psi$$

- É fácil de ver que α^i e β não podem ser números pois então a relação entre energia e momento duma partícula relativista não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^*\psi$ é para ser interpretada como a componente temporal dum 4-vetor corrente. Assim Dirac propôs que $\vec{\alpha}$ e β sejam matrizes hermíticas $N \times N$ (para que H seja hermítico) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

A equação de Dirac

Para que ela faça sentido devemos satisfazer as condições:

- Deve dar a relação correta entre a energia e o momento isto é $E^2 = p^2 + m^2$, para uma partícula livre.
- Deve fornecer uma probabilidade definida positiva.
- Deve ser covariante para transformações de Lorentz.

Vejamos os dois primeiros requisitos. Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein Gordon. Para isso iteramos a equação e obtemos

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= \left(-i\alpha^i\nabla_i + \beta m\right) i\frac{\partial\psi}{\partial t} \\
&= \left[-\frac{\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i}{2}\nabla_i\nabla_j - im(\alpha^i\beta + \beta\alpha^i)\nabla_i + \beta^2 m^2\right]\psi
\end{aligned}
$$

A equação de Dirac

- Para que cada componente satisfaça a equação de Klein-Gordon devemos ter

$$\begin{cases} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \end{cases}$$

- Temos portanto que construir 4 matrizes que *anticomutem*, sejam *hermíticas* e cujo *quadrado* seja a *identidade*. É desde logo claro que não podem ser 2×2 pois só há 3 matrizes 2×2 que anticomutam, as matrizes de Pauli.

- Para ver a dimensão mínima em que é possível realizá-las, observemos que sendo hermíticas os seus valores próprios são reais e iguais a ± 1 pois $\alpha^{i2} = \beta^2 = 1$. Das relações de anticomutação pode-se concluir que têm traço nulo. Por exemplo

$$\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta \Rightarrow \text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0$$

A equação de Dirac

- Isto tem como consequência que N deve ser par para que o número de valores próprios $+1$ e -1 seja igual. Como $N = 2$ está excluído devemos ter $N = 4$ como a dimensão mais baixa possível. Uma representação explicita, a chamada *representação de Dirac* é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- É um exercício trivial verificar que as equações acima satisfazem os requisitos (embora a escolha não seja única)

A equação de Dirac

- Vamos agora ver a questão da corrente de probabilidade. Para isso escrevemos a equação conjugada hermítica. Obtemos

$$-i\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger(i\alpha^i\overleftarrow{\partial}_i + \beta m)$$

- Multiplicando a equação de Dirac à esquerda por $\psi^\dagger$ e a conjugada à direita por ψ e subtraindo obtemos

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) = -i\nabla_i(\psi^\dagger\alpha^i\psi)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^\dagger\psi) + \vec{\nabla}\cdot(\psi^\dagger\vec{\alpha}\psi) = 0$$

- Isto permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade:

$$\rho = \psi^\dagger\psi\,, \quad \vec{j} = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi$$

A equação de Dirac

- Integrando a equação em todo o espaço obtemos

$$\frac{d}{dt}\int d^3x\psi^\dagger\psi = 0$$

o que está de acordo com identificarmos $\psi^\dagger\psi$ como uma densidade de probabilidade definida positiva.

- A notação anterior antecipa o facto de $\vec{j}$ ser um 3-vetor. De facto temos de mostrar isso e muito mais.
- Na secção seguinte demonstraremos que $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ é um 4-vetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é *covariante*, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

A equação de Dirac: Matrizes γ

- Antes de continuar a discutir a equação de Dirac vamos introduzir uma conveniente notação 4-dimensional. Multiplicamos a equação de Dirac por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzimos as matrizes

$$\gamma^0 \equiv \beta \qquad ; \qquad \gamma^i \equiv \beta\alpha^i \qquad i = 1, 2, 3$$

- Então a equação de Dirac escreve-se

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

ou ainda

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

onde se introduziu a notação, devida a Feynman

$$\partial\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$$

A equação de Dirac: Matrizes γ

- As matrizes γ^μ, na representação de Dirac, são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

- É fácil de ver que as relações a que α^i e β devem obedecer se escrevem duma forma compacta em termos das matrizes γ, isto é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2 g^{\mu\nu}$$

onde, como habitualmente

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+,-,-,-)$$

Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

- Tomemos a equação de Dirac para a partícula livre ($\hbar = c = 1$)

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = 0$$

- Esta equação admite como soluções ondas planas

$$\psi(x) = w(\vec{p})e^{-i\, p_\mu x^\mu}$$

desde que $p_\mu p^\mu = m^2$. Isto implica que $(p^0)^2 = E^2 = \vec{p}\cdot\vec{p} + m^2$, e portanto temos soluções com energia positiva e negativa.

- Nas nossas convenções fazemos $p^0 = E = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} > 0$ sempre, pelo que devemos ter

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p})e^{-i\, \varepsilon_r p_\mu x^\mu}$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$ para soluções de energia positiva e negativa, respetivamente, e o índice r explicita as diferentes soluções independentes, como veremos de seguida.

Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

- Para determinar $w^r(\vec{p})$ vamos considerar primeiro o caso da partícula em repouso. No referencial próprio a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(i\,\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m\right)\psi = 0$$

- Usando a representação de Dirac é fácil de ver que a equação se escreve

$$m\left(\varepsilon_r \gamma^0 - 1\right)\psi^r = 0$$

onde

$$\psi^r = w^r(0) e^{-i\,\varepsilon_r m t}\,, \qquad \varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1,2 \\ -1 & r = 3,4 \end{cases}$$

$$w^{(1)}(0) = \sqrt{2m}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ w^2(0) = \sqrt{2m}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ w^3(0) = \sqrt{2m}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ w^4(0) = \sqrt{2m}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

- Vemos portanto que $r = 1, 2$ são soluções da energia *positiva* e $r = 3, 4$ da energia *negativa*.
- O factor $\sqrt{2m}$ da normalização foi introduzido por conveniência como será claro mais tarde.
- Se usarmos o operador

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

  vemos ainda que $w^{(r)}(0)$ são funções próprias de Σ^3 com valores próprios ± 1. Assim as soluções $r = 1, 2$ descrevem o eletrão de *Schrödinger-Pauli* e as soluções de energia negativa, $r = 3, 4$ serão interpretadas mais tarde.
- Na re-interpretação de Dirac das soluções de energia negativa como as anti-partículas, a ausência de um eletrão de energia negativa com spin CP corresponde a um positrão com spin down, por isso $w^3(0)$ corresponderá a spin down enquanto que $w^4(0)$ a spin up.

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

- Se tivéssemos visto como os spinores se transformam num transformação de Lorentz, poderíamos aqui fazer simplesmente uma mudança de referencial.
- Voltaremos a este assunto na secção seguinte, mas sem demonstração, pelo que aqui vamos construir as soluções para $\vec{p} \neq 0$ diretamente seguindo de perto o Griffiths. Queremos soluções da forma

$$\psi(x) = N\, w(k)\, e^{-i\, k \cdot x}$$

onde N é uma normalização a determinar no final.

- Substituindo obtemos

$$(\gamma \cdot k - m) w(p) = (\not{k} - m) w(k) = 0$$

onde usámos a notação, devida a Feynman,

$$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu \equiv \gamma \cdot k = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k}$$

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

- Comecemos por notar que a equação acima é uma equação algébrica matricial. Na representação de Dirac temos

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} k^0 & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \end{bmatrix}$$

- Escrevendo o 4-spinor w em termos de dois bi-spinores,

$$w(p) = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix}$$

obtemos

$$(\not{k} - m)w = \begin{bmatrix} k^0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k^0 - m)w_A & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_B \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_A & -(k^0 + m)w_B \end{bmatrix} = 0$$

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

- Estas equações conduzem às relações,

$$w_A = \frac{1}{k^0 - m}(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})w_B, \quad w_B = \frac{1}{k^0 + m}(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})w_A,$$

- A consistência requer então que

$$w_A = \frac{1}{(k^0)^2 - m^2}(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 w_A$$

- Mas usando $(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$, concluímos que deve ser

$$|\vec{k}|^2 = (k^0)^2 - m^2, \quad (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

- Mostremos que $(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$. Para isso usamos a propriedade das matrizes de Pauli,

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k\,, \quad \Rightarrow (\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i\sigma_j = |\vec{k}|^2$$

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

- Portanto k^μ deve ser um quadri-vetor relacionado com o 4-momento da partícula por

$$k^\mu = \pm p^\mu$$

correspondendo o sinal $+$ às soluções de energia positiva, as partículas e o sinal $-$ às soluções de energia negativa, as anti-partículas.

- Podemos agora construir 4 soluções independentes da equação de Dirac:

1. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então $(E = p^0)$

$$w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

3. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma}}{E+m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Com a normalização canónica,

$$w^\dagger w = 2E$$

obtemos finalmente as quatro soluções independentes,

$$u^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + i p_y}{E+m} \end{bmatrix}, \qquad u^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x - i p_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix}$$

Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

$$v^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Onde usámos a notação convencional, u para as partículas e v para as anti-partículas. Notar que devido aos sinais $k^\mu = \pm p^\mu$, as equações para u e v diferem dum sinal,

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (\not{p} + m)v = 0 \ .$$

Transformações de spinores

- Escrevemos a equação de Dirac na forma,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

sem nunca nos preocuparmos em que referencial estamos.

- A razão é que estamos implicitamente a usar o facto de que deve ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia, isto é no referencial S' deverá ser

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

- Numa transformação geral entre S e S' definida através das transformações,

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

um escalar fica invariante $\phi'(x') = \phi(x)$, mas um vetor muda como as coordenadas,

$$A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu \ .$$

Transformações de spinores

- A questão é saber como se transformam os spinores nas transformações dwe Lorentz. Vamos aqui só dar o resultado. Se definirmos

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x)$$

então a equação de Dirac é covariante se

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a) a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

- A forma explícita depende do tipo de transformações de Lorentz. Assim

1. **Rotações**

$$S_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}}$$

onde $\vec{\theta}$ é um vetor coma direção da rotação e módulo igual ao ângulo de rotação e

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

Notar que em cada bloco diagonal os spinores transforma-se como em mecânica quântica não relativista.

Transformações de spinores

2. **Transformações de Lorentz (boosts)**

$$S_L = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\alpha}}$$

onde $\vec{\alpha}$ são as matrizes de Dirac, e $\vec{\omega}$ é um vetor na direção da velocidade relativa entre S e S' tal que

$$\tanh \omega = \frac{|\vec{V}|}{c}$$

3. **Inversão no espaço (Paridade)**
Neste caso

$$a^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_P = \gamma_0$$

Adjunto de Dirac

- A escolha mais simplista para formar um invariante seria $\psi^\dagger\psi$. Contudo esta quantidade não é um escalar mas sim a componente temporal dum 4-vetor, como vimos. Como formar então um escalar? Para isso notemos, que

$$S_L^\dagger = S_L \neq S_L^{-1} \ \rightarrow \ \psi'^\dagger\psi' \neq \psi\psi$$

- Podemos mostrar que para todas as transformações de Lorentz temos

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$$

- Por isso se definirmos o chamado **adjunto de Dirac**

$$\overline{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

então temos

$$\psi' = S\psi, \quad \overline{\psi'} = \overline{\psi} S^{-1}$$

- Portanto

$$\overline{\psi'}\psi' = \overline{\psi} S^{-1} S\psi = \overline{\psi}\psi$$

e um escalar, invariante para **todas** as transformações de Lorentz.

Covariantes bilineares

- Tal como qualquer matriz complexa 2×2 se pode exprimir em termos de 4 matrizes linearmente independentes (por exemplo a matriz identidade mais as matrizes de Pauli) assim qualquer matriz 4×4 se pode exprimir em termos de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes.
- Para introduzir estas matrizes é conveniente definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

que na representação de Dirac tem a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Da definição resultam as propriedades importantes

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0\,, \quad (\gamma_5)^2 = 1$$

Covariantes bilineares

- Estamos agora em posição de definir as 16 matrizes 4×4

$$
\begin{aligned}
\Gamma^S &= 1 \\
\Gamma^V_\mu &= \gamma_\mu \\
\Gamma^T_{\mu\nu} &= \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\
\Gamma^A_\mu &\equiv \gamma_5 \gamma_\mu \\
\Gamma^P &= \gamma_5
\end{aligned}
$$

- Os símbolos S, V, T, A e P designam: escalar, sector, tensor, pseudo sector e pseudo-escalar e têm a ver com a maneira como os bilineares

$$\overline{\psi}\, \Gamma^a \psi \qquad a = S, V, T, A \text{ e } P$$

se transformam para transformações de Lorentz.

Covariantes bilineares

- Por exemplo

$$
\begin{aligned}
\overline{\psi'}(x')\,\Gamma^A\psi'(x') =& \overline{\psi'}(x')\gamma_5\gamma^\mu\psi'(x') \\
=& \overline{\psi}(x)S^{-1}\gamma_5\gamma^\mu S\psi(x) \\
=& \det a\; a^\mu{}_\nu\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x)
\end{aligned}
$$

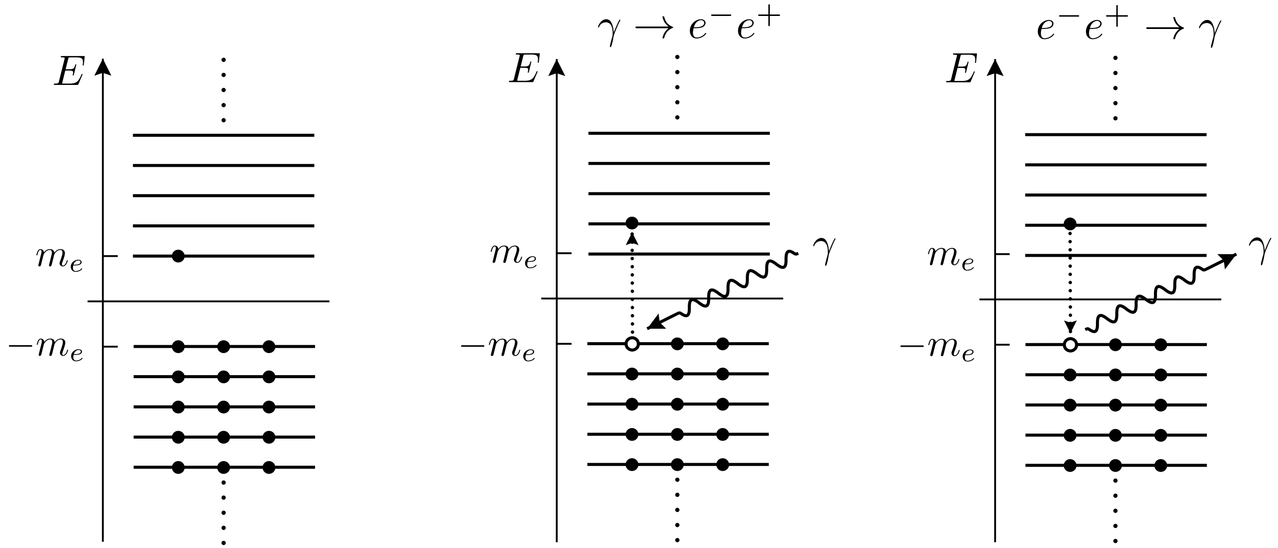
- Usámos o facto de $[S,\gamma_5]=0$ para transformações de Lorentz próprias e $\{\mathcal{P},\gamma_5\}=0$ para a inversão no espaço.
- Isto mostra que $\overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$ se transforma como um sector axial ou pseudo-sector.
- De forma semelhante se podiam demonstrar as propriedades de transformação dos outros bilineares.

Interpretação das soluções de energia negativa: "Mar" de Dirac

- Apesar de todos os sucessos da equação de Dirac descritas anteriormente o problema das soluções com energia negativa continua por resolver. Este problema não é um problema académico, pois é preciso explicar porque é que os electrões nos átomos não efectuam transição para estados de energia negativa. Por exemplo um cálculo simples dá para o electrão, no estado fundamental do hidrogénio, uma taxa de transição de $10^8\ \ \mathrm{s}^{-1}$ para decair no intervalo $[-mc^2, -2mc^2]$
- Foi Dirac quem primeiro forneceu um tratamento consistente das soluções de energia negativa. O argumento de Dirac só funciona para fermiões pois faz uso do *Princípio de Exclusão de Pauli*.
- Assim para Dirac o *vácuo* da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidas. Devido ao princípio de exclusão de Pauli um electrão com energia $E > 0$ não pode então efectuar uma transição para um estado de energia negativa, explicando a estabilidade dos átomos. Claro que o vácuo tem energia e momento infinitos mas fisicamente só medimos diferenças em relação ao vácuo e essas serão finitas.

Interpretação das soluções de energia negativa: Antipartículas

- A principal consequência desta interpretação é a existência de antipartículas. Consideremos que o vácuo tem uma lacuna ou buraco. Isto quer dizer a *ausência* dum electrão de energia $-E$ e carga $-|e|$. Mas isto pode ser igualmente interpretado como *presença* duma partícula de carga $+|e|$ a energia positiva $+E$, isto é, o positrão. Assim a produção dum par electrão-positrão
- Um electrão é excitado dum estado de energia negativa deixando atrás de si uma lacuna. Como esta lacuna corresponde a um positrão ficou criado um par e^+e^-. Igualmente a aniquilação electrão-positrão pode ser interpretada como um electrão com $E>0$ que faz uma transição para um estado com $E<0$ que estava livre (positrão) desaparecendo portanto o electrão e o positrão



Interpretação das soluções de energia negativa: Antipartículas

- Com a teoria dos buracos abandonamos a interpretação em termos de funções de onda de uma partícula para passar a ser uma explicação em termo de muitas partículas.
- Só o formalismo da segunda quantificação, com os seus operadores de criação e destruição permitirá fazer uma descrição consistente desta teoria de muitas partículas.
- Essa explicação, como veremos, também se aplicará aos bosões, o que a este nível não é possível de explicar por não satisfazerem ao princípio de exclusão de Pauli.
- Contudo a interpretação de Dirac teve um papel determinante no desenvolvimento da teoria e a descoberta experimental das anti-partículas foi um grande sucesso.

Conjugação de carga

- Interação com campo eletromagnético: Acoplamento mínimo $e < 0$

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$$

- Equação para carga $e < 0$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0$$

- Equação para carga $-e > 0$

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi_c(x) = 0$$

- Deve existir uma operação de simetria tal que

$$\psi_c \equiv C\overline{\psi}^T, \;\to\; C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo da conjugação de carga

$$\psi = N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \Rightarrow \psi_c = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$

Helicidade

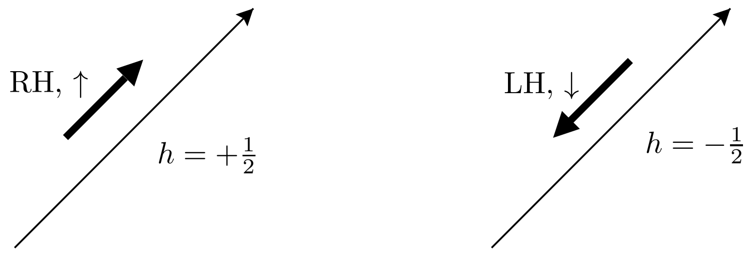
- A helicidade é definida como a projeção do spin na direcção do movimento, isto é

$$h = \frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \Rightarrow \left[H_D, \vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\right] = 0$$

portanto h comuta com o Hamiltoniano livre de Dirac.

- Como o spin medido segundo qualquer eixo está quantizado e só pode tomar os valores $\pm\frac{1}{2}$, os valores próprios da helicidade são também $\pm\frac{1}{2}$. Designamos estes estados por $\uparrow$ ou RH para $h=+\frac{1}{2}$ e $\downarrow$ ou LH para $h=-\frac{1}{2}$

- Estados próprios da helicidade para spin 1/2



- Notar que o conceito de helicidade não é invariante de Lorentz pois, para partículas com massa, é sempre possível ir para um referencial onde se muda o sentido do momento.

Spinores de helicidade

- Para as aplicações é útil ter uma representação explícita dos spinores de helicidade. Comecemos pelos spinores u para as soluções de energia positiva. Queremos resolver a equação aos valores próprios,

$$h\,u = \lambda u\,.$$

- Podemos escrever esta equação na forma

$$\frac{1}{2|\vec{p}|}\begin{bmatrix}\vec{\sigma}\cdot\vec{p} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}u_A\\ u_B\end{bmatrix},$$

donde resulta

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_A = 2|\vec{p}|\lambda u_A, \quad (\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_B = 2|\vec{p}|\lambda u_B\,.$$

- Usando agora $(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$, obtemos,

$$|\vec{p}|^2 = 2|\vec{p}|\lambda(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})u_A = 4|\vec{p}|^2\lambda^2\,,$$

donde resulta $\lambda = \pm 1/2$ como era de esperar.

Spinores de helicidade

- Vamos agora encontrar os vectores próprios correspondentes a estes valores próprios. Basta encontrar u_A pois usando a equação de Dirac, $(\not{p} - m)u = 0$ obtemos,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B \,,$$

e obtemos

$$u_B = 2\lambda \frac{|\vec{p}|}{E + m} u_A \,.$$

- Para encontrar u_A escrevemos

$$\vec{p} \equiv |\vec{p}|\, \vec{n}, \quad \vec{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \,,$$

e então encontrar os valores próprios, é equivalente a encontrar os valores próprios de

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{bmatrix} \,.$$

Spinores de helicidade

- Este é um problema bem conhecido do spin em mecânica quântica não relativista com o resultado,

$$u_{A\uparrow} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad u_{A\downarrow} = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix},$$

  onde os vectores estão normalizados e escolhemos as fases globais de tal forma que no limite $\theta \to 0$ recuperamos os resultados anteriores.

- Pondo tudo junto obtemos para os spinores u,

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \; u_{\downarrow} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}.$$

Spinores de helicidade

- Os estados próprios de v obtêm-se de forma idêntica, não esquecendo que $\vec{S}^{(v)} = -\vec{S}$, e portanto

$$\frac{\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}}{2|\vec{p}|} v_\uparrow = -\frac{1}{2} v_\uparrow \,.$$

- O resultado final é

$$v_\uparrow = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix}, \quad v_\downarrow = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{|\vec{p}|}{E+m} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{E+m} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi} \end{bmatrix} .$$

- Quando estudarmos as colisões em QED, voltaremos a este assunto e mostraremos a sua utilidade nas aplicações.