

Capítulo 10

Violação de CP e a Matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

10.1 A massa dos quarks

No capítulo anterior vimos como obter a massa dos léptons considerando que os neutrinos não têm massa, o que é uma boa aproximação para os processos em que estamos aqui interessados.

Consideremos agora o problema de massa dos quarks. O problema é mais complicado por duas razões. Uma que tem que ver com a impossibilidade de diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa e as interações como foi afirmado atrás e será discutido mais à frente. A outra é mais técnica. Para percebermos o problema consideremos os quarks da primeira família

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad ; \quad u_R, d_R. \quad (10.1)$$

Se considerarmos uma interação da forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d \bar{Q}_L \phi d_R + \text{h.c.} \quad (10.2)$$

depois da quebra espontânea de simetria

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d v (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \dots, \quad (10.4)$$

isto é, um termo de massa para o quark d , mas não para o quark u . É fácil de ver que para o termos envolvendo d_R temos

$$Y(\bar{Q}_L \phi d_R) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0, \quad (10.5)$$

o que assegura a invariância teste termos para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, enquanto que para u_R temos,

$$Y(\overline{Q}_L \phi u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = +2, \quad (10.6)$$

mostrando que o termo $(\overline{Q}_L \phi u_R)$ não é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Como resolver este problema? Felizmente a solução não é muito difícil. Numa transformação de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ o dubleto transforma-se da forma seguinte

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi & SU_L(2) \\ \delta\phi &= i\frac{\epsilon}{2} \phi & U_Y(1). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Consideremos agora o dubleto $\tilde{\phi}$ definido por

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^- \equiv (\phi^+)^*. \quad (10.8)$$

Vejamos agora como se transforma $\tilde{\phi}$. Para $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi^*) = i\tau_2 \left(-i\epsilon^a \frac{\tau^{a*}}{2} \phi^* \right) \\ &= \epsilon^a \tau_2 \tau^{a*} \frac{1}{2} \phi^*. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Usando agora a identidade

$$\tau_2 \tau^{a*} \tau_2 = -\tau^a, \quad (10.10)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= -\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tau_2 \phi^* = i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} (i\tau_2 \phi^*) \\ &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

isto é, transforma-se exatamente como ϕ . Mas numa transformação de $U_Y(1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi)^* = i\tau_2 \left(+i\frac{\epsilon}{2} \phi \right)^* \\ &= -i\frac{\epsilon}{2} (i\tau_2 \phi^*) = -i\frac{\epsilon}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

o que mostra que $\tilde{\phi}$ tem hipercarga fraca igual a -1 . Então um termo

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_u \overline{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \text{h.c.}$$

$$= -h_u v (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \dots, \quad (10.13)$$

é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, pois

$$Y(\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 0, \quad (10.14)$$

e dá massa ao quark u . Precisamos portanto de ϕ para dar massa aos quarks com $T_3 = -1/2$ e de $\tilde{\phi}$ para dar massa aos quarks com $T_3 = +1/2$. Notar que se trata do mesmo dubleto, a construção de $\tilde{\phi}$ destina-se a obter uma hipercarga oposta à do ϕ . Noutras teorias, como em supersimetria ou nos modelos com dois dubletos de Higgs, este problema é resolvido usando mais do que um dubleto com hipercargas diferentes.

O termo mais geral que dá massa aos quarks é portanto

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j} h_{dij} \bar{Q}_L(i) \phi d_R(j) - \sum_{i,j} h_{uij} \bar{Q}_L(i) \tilde{\phi} u_R(j), \quad (10.15)$$

numa notação óbvia. Vemos assim que há uma matriz de massa para os quarks de baixo, e outra para os quarks de cima. É possível diagonalizar estas matrizes e passar o efeito para os termos de interação. Os termos de corrente neutra continuarão diagonais, mas nos termos de corrente carregada tal não acontecerá. De facto a corrente neutra liga os quarks de cima com os quarks de cima e os de baixo com os baixo, e portanto teremos sempre termos diagonais se usarmos a unitariedade das matrizes. Isso não acontece para as correntes carregadas pois elas misturam os quarks de cima com os de baixo que são diagonalizados de maneira diferente. O resultado é uma matriz de mistura, que convencionalmente se coloca nos quarks de baixo, a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21, 32]. Como há três famílias de quarks trata-se duma matriz 3×3 unitária. Para vermos o mecanismo, consideremos primeiro o modelo só com duas famílias de quarks deixando para uma secção seguinte o estudo do caso geral. Então o lagrangeano de massa dos quarks pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = & -h_{u1} v \bar{u} u - h_{u2} v \bar{c} c - h_{d1} v \bar{d}_c d_c - h_{d2} v \bar{s}_c s_c \\ & - h_{d12} v (\bar{d}_c s_c + \bar{s}_c d_c), \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde se usou a liberdade referida atrás para escrever os quarks u e c diretamente na forma diagonal. Olhemos para a matriz dos quarks de baixo. Escrevemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d}_c \quad \bar{s}_c) \begin{pmatrix} h_{d1} v & h_{d12} v \\ h_{d12} v & h_{d2} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Agora o ângulo de Cabibbo pode ser facilmente compreendido. De facto do ponto de vista das interações fortes, a matriz de massa deve ser diagonal nos quarks d e s .

Então se introduzirmos

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

na Eq. (10.17) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.19)$$

onde

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{12} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{21} &= + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c) \\ m_{22} &= \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Como queremos que a matriz seja diagonal,

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

devemos impor as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ e $m_{11} = m_d, m_{22} = m_s$. A condição $m_{12} = m_{21} = 0$ tem como solução

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2h_{d12}}{h_{d2} - h_{d1}}, \quad (10.22)$$

isto é relaciona os parâmetros do lagrangeano com o ângulo de Cabibbo. É usual em vez de usar os parâmetros h_{uij} e h_{dij} , usar os valores experimentais das massas dos quarks e os elementos da matriz de rotação, isto é os ângulos. Esta para o caso de três famílias de quarks é a matriz CKM que vamos escrever com mais detalhe numa secção seguinte.

10.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

10.2.1 A simetria CP

Como vimos as interações fracas não são invariantes para a transformação de paridade P. Por exemplo no decaimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad (10.23)$$

os múons têm sempre a helicidade esquerda. Também não são invariantes para a operação de conjugação de carga (transforma partícula em antipartícula), porque então a reação

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (10.24)$$

viria sempre com múons esquerdos e de facto eles têm helicidade direita. No entanto o produto das duas transformações, CP, parece ser uma boa simetria pois transforma o antimúon esquerdo num múon direito que parece ser o que observamos.

Gell-Mann e Pais mostraram que a invariância de CP tinha implicações estranhas para os kaões neutros. Eles observaram que o K^0 com estranheza +1 pode-se transformar na sua antipartícula \bar{K}^0 com estranheza -1 através dos diagramas de segunda ordem representados na Fig. 10.1.

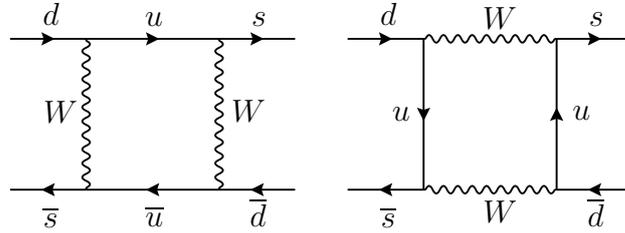


Figura 10.1: Diagramas para a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$. Há ainda os diagramas com u trocado com c e t através da mistura na matriz CKM.

Como resultado, as partículas que observamos no laboratório não são o K^0 , \bar{K}^0 mas alguma linear combinação dos dois. Podemos formar estados próprios de CP da forma seguinte. Como os kaões são pseudo-escalares devemos ter

$$P |K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad P |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle. \quad (10.25)$$

Por outro lado sob a ação da conjugação de carga temos,

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \quad (10.26)$$

e obtemos portanto

$$CP |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle. \quad (10.27)$$

Podemos portanto formar estados próprios de CP, corretamente normalizados, através de

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad (10.28)$$

com os valores próprios de CP

$$CP |K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP |K_2\rangle = -|K_2\rangle. \quad (10.29)$$

Se admitirmos que CP é conservado nas interações fracas, então K_1 só pode decair num estado com $CP = +1$ e K_2 num estado com $CP = -1$. Os kaões decaem em dois ou três piões. O estado de dois piões tem $P = +1$ e $C = +1$ enquanto o estado fundamental de três piões tem $P = -1$ mas também $C = +1$. Em conclusão, devemos ter

$$K_1 \rightarrow 2\pi, \quad K_2 \rightarrow 3\pi. \quad (10.30)$$

O decaimento em dois piões é mais rápido pois o espaço de fase é maior. Portanto, se começarmos com um feixe de K^0

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle + |K_2\rangle), \quad (10.31)$$

a componente K_1 decairá rapidamente e ficará somente um feixe quase puro de K_2 . Esta previsão foi confirmada experimentalmente, com

$$\tau_1 = 0.895 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (10.32)$$

Notar que K_1 e K_2 não são antipartículas um do outro mas antes as suas próprias antipartículas com $C = -1$ para K_1 e $C = +1$ para K_2 . Têm mesmo uma diferença de massa,

$$m_2 - m_1 = 3.48 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (10.33)$$

Em resumo, os kaões são produzidos nas interações fortes em estados próprios da estranheza, K_0 e \bar{K}^0 mas decaem através das interações fracas em estado próprios de CP, K_1 e K_2 .

10.2.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Os kaões neutros são um laboratório perfeito para testarmos se as interações fracas são de facto invariantes para o produto CP. Usando um feixe suficientemente longo sabemos que temos só kaões do tipo que têm um tempo de vida longa. Se observarmos que estes decaem em 2π sabemos que CP é violada. Esta experiência, descrita na Fig. 10.2, foi feita por Christenson, Cronin, Fitch e Turlay [34], em 1964 e eles descobriram uma fração de 1 em 500 que decaíam em 2π . O produto CP não é conservado nas interações fracas e o kaão que tem um tempo de vida longo não é um estado perfeito de CP, deve ter uma pequena mistura de K_1 . Designamos esse estado por K_L

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (\epsilon |K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (10.34)$$

De igual modo podemos definir o estado ortogonal que é predominantemente K_1 e decai rapidamente por

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1\rangle + \epsilon |K_2\rangle). \quad (10.35)$$

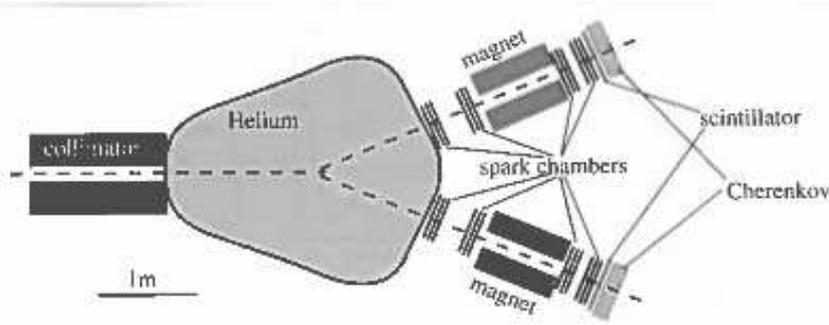


Figura 10.2: Experiência de Cronin e Fitch

O parâmetro ϵ mede o desvio do estado K_L em relação ao estado de CP, isto é, mede a violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$. Para a determinação experimental, é usual definir a razão das amplitudes

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi_{+-}} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.36)$$

Obtemos então

$$|\epsilon|^2 \equiv |\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.37)$$

O valor experimental atual é $\epsilon = 2.24 \times 10^{-3}$.

A experiência de Cronin-Fitch, como veio a ser conhecida depois da atribuição do prémio Nobel a estes dois físicos em 1980, destruiu a última esperança para uma simetria exata que envolvesse a Paridade¹. Mas as coisas ficaram ainda piores quando se olhou para os decaimentos semi-leptónicos do K_L . De facto, cerca de 41% das vezes o K_L decai semileptonicamente nos canais,

$$a) K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e; \quad b) K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \quad (10.38)$$

Agora notemos que a operação de CP leva o estado final em a) para o estado final em b) e vice-versa. Então se K_L fosse um estado próprio de CP, os dois decaimentos deviam ocorrer exatamente com as mesmas probabilidades. Experimentalmente verificou-se que isso não acontecia, e que o decaimento do K_L em positrão (ou leptão carregado positivamente) ocorria mais frequentemente, com uma diferença fracional, δ_L , definida por

$$\delta_L = \frac{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) - N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) + N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \simeq 3.3 \times 10^{-3}, \quad (10.39)$$

onde $l = e, \mu$. Há assim uma distinção absoluta entre matéria e anti-matéria. Podemos dizer que o positrão é o leptão que ocorre mais frequentemente no decaimento do K_L . De facto esta distinção entre matéria e anti-matéria é mais profunda e permite pensar em compreender porque somos feitos de matéria e não de anti-matéria.

¹Isto não é rigorosamente verdade, pois acredita-se que o teorema TCP seja válido e que o produto das três transformações seja uma invariância da teoria quântica.

10.2.3 Violação de CP noutros sistemas

Embora o sistema dos mesões K^0 tenha sido, durante mais de 30 anos, o único sistema a evidenciar a violação de CP, tal não era de esperar do ponto de vista teórico, como será explicado na secção seguinte. No ano 2000 a situação mudou drasticamente pois foi observada pelas colaborações BaBar no SLAC (Stanford, Estados Unidos) e Belle no KEK (Japão), pela primeira vez a violação de CP no sistema dos mesões B^0 ($d\bar{b}$). Essa violação de CP foi observada, medindo a assimetria

$$A = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)}{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)} = 0.679 \pm 0.020 \quad (10.40)$$

que seria zero se CP fosse conservada. O resultado de $\sim 70\%$ para esta assimetria mostra que a violação de CP é intrinsecamente grande. Perceberemos na secção seguinte por que razão em muitos casos os resultados experimentais são pequenos. Estes resultados são muito importantes pois ajudam a determinar os parâmetros da mistura dos quarks, descritos pela matriz CKM como veremos na secção seguinte. A importância destas medidas justifica que no LHC, presentemente em operação no CERN, haja uma experiência dedicada à física dos mesões B , a colaboração LHCb, que tem produzido resultados notáveis que ajudam a nossa compreensão da física da mistura dos quarks.

Finalmente, é de esperar também resultados para os mesões D^0 ($c\bar{u}$). Contudo as previsões teóricas do modelo standard são pequenas para este sistema. Os resultados de LHCb não indicam, até ao momento, qualquer indicação de violação de CP nos mesões D^0 . Certamente que este assunto ficará resolvido com mais dados na nova fase do LHC.

10.3 Violação de CP e a matriz CKM

10.3.1 A matriz CKM

A generalização da matriz de Cabibbo para o caso de três gerações de quarks é a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21, 32] que passamos a explicar. Começamos por recordar as partes do lagrangeano do modelo standard em que aparecem os quarks. Escrevemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}}, \quad (10.41)$$

onde os diferentes lagrangeanos, corrente carregada, corrente neutra e de Yukawa, são,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d'_i \right] W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{d}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u'_i \right] W_\mu^- \quad (10.42)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} = e \left[\frac{2}{3} \bar{u}'_i \gamma^\mu u'_i - \frac{1}{3} \bar{d}'_i \gamma^\mu d'_i \right] A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{q}'_i \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) q'_i Z_\mu \quad (10.43)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}} = -h_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \Phi d'_{Rj} - h_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{\Phi} u'_{Rj} + \text{h.c.}, \quad (10.44)$$

onde os índices $i, j = 1, 2, 3$ são de família (ou geração), isto é, por exemplo, $d'_i = (d', s', b')$ e $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ como anteriormente. A notação u'_i, d'_i quer dizer que estes estados não são os estados de massas mas aqueles que resultam da escrita das derivadas covariantes. Para simplificar escrevemos ainda $q'_i = (u'_i, d'_i)$.

Quando se dá a quebra espontânea de simetria, substituímos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

e obtemos a partir do lagrangeano de Yukawa o lagrangeano de massa para os quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{massa}} = -\bar{d}'_L M^d d'_{Rj} - \bar{u}'_L M^u u'_{Rj} + \text{h.c.} \quad (10.46)$$

onde $M_{ij}^{d,u} = h_{ij}^{d,u} v$ e passámos a usar uma notação matricial no espaço das famílias. Em geral as matrizes $M^{d,u}$ são matrizes arbitrárias complexas. Não sendo estas matrizes diagonais, os quarks u'_i, d'_i não são os estados próprios de massa. Para os obter temos de diagonalizar as matrizes de massa, o que é sempre possível. Na verdade uma matriz arbitrária complexa é diagonalizada através de duas matrizes unitárias diferentes à esquerda e direita. Isto quer dizer que devemos ter,

$$U_L^u M^u U_R^{u\dagger} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad U_L^d M^d U_R^{d\dagger} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b). \quad (10.47)$$

Isto é equivalente a rodar os estados de acordo com

$$d_L = U_L^d d'_L, \quad d_R = U_R^d d'_R, \quad u_L = U_L^u d'_L, \quad u_R = U_R^u u'_R. \quad (10.48)$$

Depois de diagonalizar as matrizes de massa, temos de aplicar a rotação inversa nos lagrangeanos de interação, isto é

$$d'_L = U_L^{d\dagger} d_L, \quad d'_R = U_R^{d\dagger} d_R, \quad u'_L = U_L^{u\dagger} u_L, \quad u'_R = U_R^{u\dagger} u_R. \quad (10.49)$$

Olhemos primeiro para a corrente neutra. Um termo genérico é da forma, tomando os quarks down como exemplo,

$$\bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L + \bar{d}'_R \gamma^\mu d'_R = \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R, \quad (10.50)$$

onde usámos $U_L^d U_L^{d\dagger} = U_R^d U_R^{d\dagger} = 1$ devido à unitariedade das matrizes. Para os quarks u obtemos resultados semelhantes. Assim vemos que para as correntes neutras o resultado final em termos dos estados de massa é o mesmo que na Eq. (10.43), basta fazer $q' \rightarrow q$. No entanto para as correntes carregadas tal não vai ser possível pois elas misturam quarks do tipo u com quarks do tipo d . Talvez a maneira mais simples de ver isto é pensar no dubleto

$$Q'_L = \begin{bmatrix} u'_L \\ d'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L^{u\dagger} u_L \\ U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix} = U_L^{u\dagger} \begin{bmatrix} u_L \\ U_L^u U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

o que mostra o não alinhamento entre a diagonalização das matrizes de massa e as interações. Para ver a consequência escrevemos os termos relevantes do lagrangeano das correntes carregadas, Eq. (10.42). Obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu u'_L W_\mu^-) \quad (10.52)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^\dagger u_L W_\mu^-), \quad (10.53)$$

onde se definiu

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (10.54)$$

Como as matrizes de diagonalização são diferentes, a $V_{\text{CKM}} \neq 1$.

10.3.2 Contagem de parâmetros na matriz CKM

Como vimos, a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [21,32] liga os estados próprios de sabor com os estados próprios de massa. Tradicionalmente esta mistura é descrita nos quarks do tipo *down*, isto é com $T^3 = -1/2$ e que se costuma escrever na forma,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Esta matriz é uma matriz 3×3 e unitária pela maneira como foi construída. Em geral uma matriz complexa $N \times N$ terá $2N^2$ parâmetros reais. Contudo as condições de unitariedade $VV^\dagger = 1$ impõem N^2 condições reduzindo o número de parâmetros independentes a N^2 . No entanto podemos ainda absorver $2N - 1$ fases nos campos dos $2N$ quarks deixando uma fase global arbitrária. Isto reduz o número de parâmetros para

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2. \quad (10.56)$$

Destes, $N(N - 1)/2$ correspondem a ângulos, (para $N = 2$ temos só um ângulo o ângulo de Cabibbo) e portanto os outros parâmetros devem ser fases num número dado por

$$\# \text{ fases} = (N - 1)^2 - \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2}. \quad (10.57)$$

Vemos assim que para ter uma fase complexa, necessária para explicar a violação de CP, precisamos de $N = 3$. Este argumento foi apresentado antes da descoberta da terceira família. Obtemos portanto para $N = 3$, três ângulos e uma fase independentes, e portanto 4 parâmetros físicos.

10.3.3 Parametrizações da matriz CKM

Há várias parametrizações da matriz CKM. As duas mais utilizadas são a do PDG e de Wolfenstein. A parametrização do PDG usa rotações em três planos, escrevendo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{CKM}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}, \quad (10.58)
 \end{aligned}$$

onde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e δ é uma fase responsável pela violação de CP no modelo standard. Como $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ é conveniente definir esta hierarquia numa forma explícita, ainda que aproximada. É o que faz a parametrização de Wolfenstein, onde

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (10.59)$$

A correspondência entre as duas parametrizações é

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta). \quad (10.60)$$

Os valores experimentais atuais são aproximadamente,

$$\lambda \simeq 0.223, \quad A \simeq 0.811, \quad \rho \simeq 0.131, \quad \eta \simeq 0.345 \quad (10.61)$$

$$s_{12} = \lambda \simeq 0.223, \quad s_{23} \simeq 0.041, \quad s_{13} \simeq 0.003, \quad \delta \simeq 1.2079 = 69.2^\circ. \quad (10.62)$$

Notar que os efeitos de CP são pequenos, não por a fase ser pequena, mas por vir multiplicada por s_{13} que é um número muito pequeno. Uma ideia melhor da hierarquia na matriz CKM, pode ser obtida se considerarmos os módulos dos elementos (tomamos o valor central, sem considerar os erros, ver PDG [33] para resultados mais precisos)

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} 0.97427 & 0.22534 & 0.00351 \\ 0.22520 & 0.97344 & 0.0412 \\ 0.00867 & 0.0404 & 0.999146 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Vemos que os elementos são cada vez mais pequenos à medida que nos afastamos da diagonal e também da esquerda para a direita. Esta observação está na base da parametrização de Wolfenstein.

Problemas capítulo 10

10.1 Verifique que obtém a Eq. (10.20) e que as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ conduzem à Eq. (10.22).

10.2 Mostrar que se obtém a matriz da parametrização do PDG, multiplicando as três matrizes na Eq. (10.58).

10.3 Mostrar que a matriz CKM na representação do PDG, Eq. (10.58), é unitária.

10.4 Mostrar que a matriz CKM na representação de Wolfenstein Eq. (10.59), é unitária até à ordem indicada.

