

# Capítulo 9

## O Modelo Standard Eletrofraco: $SU(2)_L \times U_Y(1)$

Aqui seguimos o capítulo 5 do meu texto FIE [12]. A matéria está também coberta no capítulo 9 do Griffiths [1].

### 9.1 Introdução

Vamos neste capítulo aplicar as ideias das teorias de gauge com quebra espontânea de simetria às interações fracas de quarks e leptões. Consideraremos o modelo específico associado aos nomes de Glashow [29], Weinberg [30] e Salam [31], que devido ao seu sucesso experimental se veio a tornar conhecido como o *modelo standard das interações eletrofracas*. Contudo antes de entrarmos em detalhes, tentemos responder a três questões:

- i)* Porquê uma teoria de gauge com quebra espontânea de simetria?
- ii)* Qual o grupo de simetria relevante?
- iii)* Quais as representações a escolher?

Começemos pela primeira. Há várias razões. Talvez a mais importante resulte do estudo da fenomenologia das interações fracas, onde aparecia claro que estas deviam ser mediadas por uma partícula de spin 1 (campo vetorial) e que esta partícula devia ter massa devido ao curto alcance das interações fracas (ver discussão no capítulo 7). Ora, depois de muito trabalho teórico mostrou-se que as únicas teorias consistentes, isto é, *renormalizáveis e unitárias*, com partículas de spin 1 com massa eram precisamente as teorias de gauge com quebra espontânea de simetria. Uma evidência adicional vem da existência duma universalidade de intensidades entre as interações de leptões e quarks se descontarmos a rotação de Cabibbo, efeito que, como veremos, não provém do sector de gauge da teoria, mas sim do sector das massas. Uma tal universalidade seria precisamente o que seria de esperar duma

teoria de gauge, onde uma constante  $g_w$  desempenhasse um papel semelhante à carga elétrica em QED.

As outras duas questões podem ser respondidas em simultâneo. Vimos que a estrutura das correntes fracas sugeria a ideia dum grupo de isospin fraco  $SU_L(2)$  para as componentes esquerdas que participam na corrente carregada. Daí resultava que as componentes esquerdas deviam ser agrupados num dubleto. As componentes direitas dos campos carregados deveriam ser então singletos de  $SU_L(2)$  para não participarem na interação fraca das correntes carregadas. Poderia o grupo ser então só  $SU_L(2)$ ? Pensando um pouco logo se conclui que não. A razão prende-se com o facto da estrutura das correntes de  $SU_L(2)$  ser  $V - A$ . Então a componente 3 (neutra) também teria essa estrutura e não poderia ser identificada com a corrente eletromagnética que, como sabemos, tem acoplamento vetorial ao fóton. Portanto o bosão  $W_\mu^3$  não pode ser o fóton. Assim surgiu a ideia de alargar o grupo da forma mínima com um produto por um grupo Abelian obtendo-se portanto  $SU(2) \times U(1)$ . Como vimos no capítulo 8, havia neste caso dois bosões  $W_\mu^3$  e  $B_\mu$  que se misturavam para dar um campo com massa a que chamámos  $Z_\mu$  e outro, sem massa, designado por  $A_\mu$  e que, como veremos no seguimento, se identificará com o fóton.

Este modelo prevê portanto, para além da corrente eletromagnética a existência de correntes fracas neutras, o que foi verificado experimentalmente. Os resultados experimentais mostram que a Natureza escolheu a hipótese mais simples. Nas secções seguintes descreveremos os vários aspetos do modelo.

## 9.2 O sector de gauge

O sector de gauge e de Higgs do modelo standard é aquele que já descrevemos no final da secção 8.3. Vamos aqui apenas resumir os resultados. Consideremos então a teoria de gauge para  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  com invariância local. O lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (9.1)$$

onde  $V$  é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (9.2)$$

e onde introduzimos os campos  $W_\mu^a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ) e  $B_\mu$  correspondentes a  $SU_L(2)$  e a  $U_Y(1)$ , respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (9.3)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (9.4)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left( \partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (9.5)$$

onde  $\tau^a$  são as matrizes de Pauli. Depois do mecanismo da quebra espontânea de simetria vimos que a parte livre do lagrangeano se podia escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.6}$$

onde introduzimos os campos  $A_\mu$  e  $Z_\mu$  através das relações

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{9.7}$$

O ângulo  $\theta_W$  foi determinado pelo requerimento que  $A_\mu$  seja o vetor próprio de massa nula e obtivemos

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \tag{9.8}$$

Do lagrangeano na Eq. (9.6) resulta que temos um campo escalar com massa  $\sigma$ , que passaremos a designar por  $H$ . É o bóson de Higgs e a sua massa é dada por

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{9.9}$$

Além disso existem dois campos vetoriais  $W_\mu^{1,2}$  com massa

$$M_{W^1, W^2} = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \tag{9.10}$$

e outro campo vetorial  $Z_\mu$  com massa

$$M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)} \tag{9.11}$$

Em vez dos campos  $W_\mu^{1,2}$  é usual introduzir um campo vetorial complexo  $W_\mu^\pm$  através das relações

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad ; \quad W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \tag{9.12}$$

Então a massa deste campo será

$$M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \quad (9.13)$$

Comparando a Eq. (9.13) com a Eq. (9.11) e usando a definição 9.8 obtemos uma relação importante entre as massas do  $W$  e do  $Z$

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (9.14)$$

Finalmente o outro campo vetorial  $A_\mu$  não tem massa

$$M_A = 0 \quad (9.15)$$

Vemos assim que o campo  $A_\mu$  deve ser identificado com o fóton. Esta identificação permite eliminar uma das constantes  $g$  e  $g'$  (ou equivalentemente  $g$  e  $\theta_W$ ) em termos da carga elétrica que corresponde ao gerador conservado

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (9.16)$$

Para isso escrevemos a derivada covariante em termos dos campos físicos, isto é,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \left( \partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \\ &= \left[ \partial_\mu + i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \tau^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \tau^- \right. \\ &\quad \left. + ig \sin \theta_W Q A_\mu + i \frac{g}{\cos \theta_W} \left( \frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right) \right] \phi \end{aligned} \quad (9.17)$$

o que permite identificar

$$g \sin \theta_W = e \quad (9.18)$$

Como a carga elétrica é conhecida o único parâmetro a determinar é o ângulo  $\theta_W$ .

### 9.3 As interações fracas dos leptões

A beleza das teorias de gauge é que as interações dos campos de matéria com os bósons de gauge ficam completamente determinadas pela invariância de gauge. Vimos isso já para o caso da interação com os campos de Higgs e o mesmo se passa para os fermiões. De facto no final do capítulo 6, já dissemos que forma devia ter o lagrangeano de qualquer fermião para a teoria  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Este era dado pela Eq. (6.69), da qual reproduzimos aqui a parte dos fermiões (os campos de gauge já foram discutidos na secção anterior). Obtemos

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i\mathcal{D} - m) \Psi_f \quad (9.19)$$

onde

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW_\mu^a \Omega^a + ig'Y B_\mu) \Psi \quad (9.20)$$

onde as matrizes  $\Omega^a$  são as apropriadas para a representação em que os fermiões se encontrem. Temos portanto, antes de escrever as interações, descobrir quais as representações de  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  em que se encontram os diferentes fermiões<sup>1</sup>.

### 9.3.1 As representações e números quânticos

Os leptões conhecidos distribuem-se por 3 famílias com propriedades idênticas só diferindo na sua massa. Esta repetição que se verifica experimentalmente não é explicada pela teoria, mas introduzida para estar de acordo com a fenomenologia conhecida. No seguimento falaremos somente da família do eletrão (o eletrão e o seu neutrino), mas tudo o que dissermos e aplica às famílias do muão e do tau.

Como vimos no capítulo 7, as correntes carregadas que medeiam a interação fraca (troca do  $W_\mu^\pm$ ) são exatamente  $V - A$ , ou seja, nelas tomam parte somente a componente de helicidade esquerda dos leptões carregados. Para se obter isto é necessário tratar de forma diferente as duas helicidades das partículas carregadas. Assim e tendo em conta que o grupo que emerge da fenomenologia é  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ , distribuimos o eletrão e o seu neutrino pelas seguintes representações de  $SU_L(2)$ , dito *isospin fraco*

$$E_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad ; \quad e_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad (9.21)$$

Portanto as componentes de helicidade esquerda do eletrão e do seu neutrino formam um dubleto de  $SU_L(2)$ , enquanto que a componente de helicidade direita do eletrão é um singleto do isospin fraco. A escolha na Eq. (9.21) determina as transformações de  $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta E_L &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} E_L \\ \delta e_R &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Falta-nos então determinar as transformações sob a ação do grupo  $U_Y(1)$ . Estas serão em geral

$$\delta \ell = i\frac{\epsilon}{2} Y_\ell \ell \quad (9.23)$$

onde  $\ell$  é qualquer componente de helicidade dos leptões, isto é  $\ell = e_L, e_R, \nu_{eL}$ , e  $Y_\ell$  é um número, designado por *hipercarga fraca* diferente, em princípio, para cada

---

<sup>1</sup>Não fizemos uma grande discussão deste ponto para os campos de Higgs, pois admitimos à partida que eles estavam em dubletos como tinha sido sugerido na discussão do mecanismo de Higgs no capítulo 8.

helicidade do leptão. Notar que isto exclui logo termos de massa para os leptões, pois estes são da forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -m (\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L) \quad (9.24)$$

e portanto não seriam invariantes nem para  $SU_L(2)$ , pois não é um singlete, nem para  $U_Y(1)$  se as hipercargas fracas de  $\ell_L$  e  $\ell_R$  forem diferentes. O valor  $Y$  não é arbitrário pois o fóton deve acoplar com a corrente eletromagnética. Assim, usando as Eqs. (9.19) e (9.20), vemos que para uma dada helicidade do leptão  $\ell$  devemos ter a seguinte interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[ g W_\mu^3 T^3 + \frac{1}{2} g' B_\mu Y \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[ A_\mu \left( g \sin \theta_W T^3 + \frac{1}{2} g' \cos \theta_W Y \right) + Z_\mu \left( g \cos \theta_W T^3 - \frac{1}{2} g' \sin \theta_W Y \right) \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma_\mu \left\{ A^\mu e \left( T^3 + \frac{1}{2} Y \right) + Z^\mu \frac{g}{\cos \theta_W} \left[ T^3 - \sin^2 \theta_W \left( T^3 + \frac{1}{2} Y \right) \right] \right\} \ell \quad (9.25) \end{aligned}$$

onde  $T^3$  é o valor numérico do isospin fraco<sup>2</sup>, (ver Tabela 9.1), para o leptão  $\ell$ . Comparando a Eq. (9.25) com o que devíamos ter para a corrente eletromagnética,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eQ \bar{\ell} \gamma^\mu \ell A_\mu \quad (9.26)$$

onde  $e = |e|$  e portanto  $Q$  é o valor da carga da partícula em unidades da carga do próton, obtemos então

$$Q = T^3 + \frac{1}{2} Y \quad (9.27)$$

o que determina  $Y$ .

	$e_L$	$e_R$	$\nu_L$
$T^3$	-1/2	0	+1/2
$Y$	-1	-2	-1
$Q$	-1	-1	0

Tabela 9.1: Números quânticos para os leptões.

Esta tabela implica a seguinte forma para as derivadas covariantes,

$$D_\mu E_L = \left( \partial_\mu + i g \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) E_L$$

<sup>2</sup>Mais rigorosamente é o valor próprio da matriz  $T^3 = \frac{\tau^3}{2}$  no dubleto  $E_L$  e zero no singlete  $e_R$ .

$$= \left[ \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-) + ieQA_\mu + i\frac{g}{\cos\theta_W} \left( \frac{\tau^3}{2} - \sin^2\theta_W Q \right) Z_\mu \right] E_L$$

$$D_\mu e_R = (\partial_\mu - ig'B_\mu)e_R = (\partial_\mu - ieA_\mu + ie \tan\theta_W Z_\mu) e_R \quad (9.28)$$

Das expressões anteriores é fácil obter as interações dos leptões com os campos de gauge, as chamadas correntes fracas carregada e neutra. O lagrangeano dos leptões no limite em que as massas dos leptões são nulas é

$$\mathcal{L}_{\text{leptões}} = i\bar{E}_L \not{D} E_L + i\bar{e}_R \not{D} e_R + \text{termos iguais para o } \mu \text{ e para o } \tau. \quad (9.29)$$

Usando a Eq. (9.28) podemos escrever os termos de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- \quad (9.30)$$

$$- \frac{g}{4\cos\theta_W} \left[ \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 - 4\sin^2\theta_W - \gamma_5) e \right] Z_\mu \quad (9.31)$$

$$- (-e) \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (9.32)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e W_\mu^+ - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} \nu_e W_\mu^- \quad (9.33)$$

$$- \frac{g}{\cos\theta_W} \left[ \bar{\nu}_e \gamma^\mu \left( \underbrace{\frac{1}{4}}_{g_V^\nu} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{g_A^\nu} \gamma_5 \right) \nu_e \right. \quad (9.34)$$

$$\left. + \bar{e} \gamma^\mu \left( \left( -\frac{1}{4} + \sin^2\theta_W \right) \underbrace{\phantom{-\frac{1}{4} + \sin^2\theta_W}}_{g_V^e} - \left( -\frac{1}{4} \right) \underbrace{\phantom{-\frac{1}{4}}}_{g_A^e} \gamma_5 \right) e \right] Z_\mu - eQ_e \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \quad (9.35)$$

O termo proporcional a  $A_\mu$  representa a interação eletromagnética como descrita em QED. Daremos alguns exemplos das outras interações mediadas por  $W_\mu^\pm$  e  $Z_\mu$ .

### 9.3.2 As correntes carregadas

Do lagrangeano de interação na Eq. (9.35) concluímos que os vértices relevantes são os indicados na Fig. (9.1).

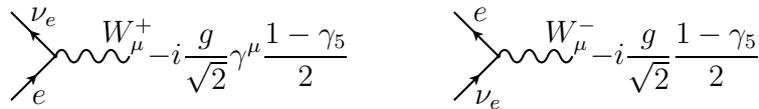


Figura 9.1: Vértices da corrente carregada.

Um exemplo típico é o decaimento do muão

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (9.36)$$

que, como vimos, corresponde ao diagrama da Fig. (9.2). O cálculo deste processo

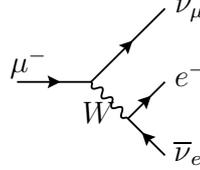


Figura 9.2: Decaimento do muão.

no limite das baixas energias dá uma amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_W^2} \left[ \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \right] \left[ \bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \quad (9.37)$$

que coincide com a amplitude do modelo fenomenológico das interações fracas de Feynman e Gell-Mann, descrito no capítulo 7, se identificarmos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (9.38)$$

onde  $G_F$  é a constante de Fermi. Isto permite obter uma estimativa de massa do  $W$ . De facto usando a Eq. (9.18) obtemos

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g^2}{4\sqrt{2}G_F} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \text{ GeV} \\ &= \left( \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} = \frac{(37.5 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (9.39)$$

Para o presente valor  $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$  obtemos

$$M_W \simeq 78 \text{ GeV} \quad (9.40)$$

Este valor está um pouco abaixo do valor experimental atualmente aceite

$$M_W = 80.37 \pm 0.17 \text{ GeV} \quad (9.41)$$

A diferença está no facto de que a Eq. (9.39) é somente válida na aproximação de Born (nível árvore). Com a introdução das correções radiativas ela passa-se a escrever

$$M_W^2 = \left( \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} \frac{1}{1 - \Delta r} \quad (9.42)$$

onde  $\Delta r$  encerra as correções de ordem superior. Atualmente o valor para  $\Delta r$  é

$$\Delta r = 0.06 \quad (9.43)$$

o que faz subir  $M_W$  para o valor para o indicado na Eq. (9.41). Uma maneira de entender estas correções é dizer que a intensidade da interação eletromagnética à escala da massa do  $Z$  é maior que no limite de baixa energia onde  $\alpha$  é medida. Mais precisamente

$$\alpha(M_Z) = \frac{\alpha}{(1 - \Delta r)} \simeq \frac{1}{128.8} \quad (9.44)$$

### 9.3.3 As correntes neutras

É usual escrever a interação do  $Z^0$ , Eq. (9.35), numa forma aplicável a qualquer fermião  $f$ . Para isso escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^Z &= - \frac{g}{\cos \theta_W} \left[ \bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma_5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] Z^\mu \\ &\quad + \text{termos iguais para os outros leptões} \\ &= - \frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f Z_\mu \end{aligned} \quad (9.45)$$

onde

$$g_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q^f \sin^2 \theta_W \quad ; \quad g_A^f = \frac{1}{2} T_3^f \quad (9.46)$$

O lagrangeano na Eq. (9.45) dá então origem ao vértice da Fig. (9.3). Um exemplo

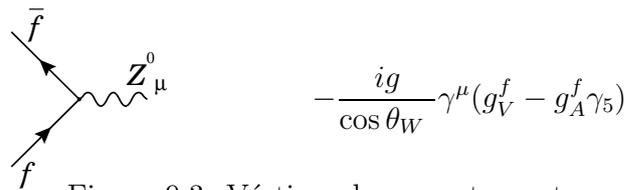


Figura 9.3: Vértices da corrente neutra

típico é a difusão elástica

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad (9.47)$$

a que corresponde o diagrama da Fig. (9.4). A amplitude para baixas energias é

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W M_Z^2} \left[ \bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[ \bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (9.48)$$

Usando a Eq. (9.14) conclui-se que

$$M_W^2 = M_Z^2 \cos^2 \theta_W \quad (9.49)$$

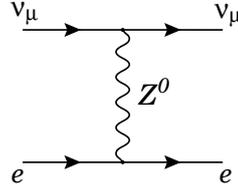


Figura 9.4: Diagrama para o processo  $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$ .

e portanto as Eqs. (9.39) e (9.49) permitem escrever a Eq. (9.48) na forma

$$\mathcal{M} = \sqrt{2}G_F \left[ \bar{\nu}_\mu(1 - \gamma_5)\nu_\mu \right] \left[ \bar{e}\gamma_a(g_V^e - g_A^e\gamma_5)e \right] \quad (9.50)$$

Foi a descoberta experimental do processo na Eq. (9.47) e também do processo

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e \quad (9.51)$$

mediados pela corrente neutra que constituíram a primeira validação, antes da experiências do LEP, do modelo de Glashow-Weinberg-Salam.

## 9.4 A introdução dos quarks

As interações fracas dos hádrões podem ser explicitadas a partir das interações fracas dos quarks que são os seus constituintes. Nós faremos as seguintes hipóteses:

- i) Os quarks aparecem em diferentes sabores. Experimentalmente necessitam-se de 6:  $u, d, s, c, b, e t$ .*
- ii) Para cada sabor os quarks aparecem em 3 cores distintas, mas os hádrões são singletos de cor.*
- iii) As correntes eletromagnéticas e fracas são singletos de cor e atuam somente no espaço dos sabores.*

Uma vez expostas as nossas hipóteses, que incorporam o que é conhecido experimentalmente, vamos agora especificar as propriedades de transformação dos quarks, de helicidades esquerda e direita, sob a ação do grupo  $SU(2) \times U(1)$ . Para isso damos os valores de  $T^3$  e  $Y$  na Tabela 9.2. Nesta tabela  $d_c$  e  $s_c$  são as seguintes misturas de  $d$  e  $s$

$$\begin{cases} d_c = \cos\theta_c d + \sin\theta_c s \\ s_c = -\sin\theta_c d + \cos\theta_c s \end{cases} \quad (9.52)$$

onde  $\theta_c$  é o ângulo de Cabibbo, conforme introduzido na secção 7.3.1. De facto estamos aqui a simplificar. Com a introdução dos quarks  $b$  e  $t$ , a matriz de rotação

	$u_L$	$d_{cL}$	$c_L$	$s_{cL}$	$u_R$	$d_R$	$c_R$	$s_R$	$t$	$b$
$T^3$	1/2	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	0	1/2	-1/2
$Y$	1/3	1/3	1/3	1/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3
$Q$	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3

Tabela 9.2: Números quânticos dos quarks.

$2 \times 2$  entre  $d$  e  $s$  deve ser generalizada para uma matriz de rotação  $3 \times 3$  no espaço  $d$ ,  $s$  e  $b$ , a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [21, 32]. Isto será explicado mais à frente quando falarmos das massas dos quarks. Em primeira aproximação é contudo verdade que o efeito dominante é a rotação de Cabibbo, isto é, consideramos só a mistura entre  $d$  e  $s$ . Dentro desta aproximação as representações de  $SU_L(2)$  são

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (9.53)$$

Usando a Eq. (9.28) como analogia e os valores da Tabela 9.2, é fácil escrever o lagrangeano de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u W_\mu^- \\ & + \left( \frac{2}{3}e \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e \bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \left( \frac{1}{2} \bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \frac{1}{2} \bar{d}_{cL}\gamma^\mu d_{cL} \right) Z_\mu \\ & + \tan\theta_W \left( \frac{2}{3}e \bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e \bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) Z_\mu \\ & + \begin{pmatrix} u & \rightarrow c \\ d_c & \rightarrow s_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rightarrow t \\ d_c & \rightarrow b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.54)$$

o que se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_c + \bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \right] W_\mu^+ \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u + \bar{s}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)c + \bar{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)t \right] W_\mu^- \\ & + e \left[ \frac{2}{3} \bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3} \bar{c}\gamma^\mu c + \frac{2}{3} \bar{t}\gamma^\mu t - \frac{1}{3} \bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3} \bar{s}\gamma^\mu s - \frac{1}{3} \bar{b}\gamma^\mu b \right] A_\mu \end{aligned}$$

$$-\frac{g}{\cos \theta_W} \sum_{f=\text{quarks}} \bar{f} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) f Z_\mu \quad (9.55)$$

com  $g_V^f$  e  $g_A^f$  dados pela Eq. (9.46). Notar que a interação mediada pela corrente carregada tem exatamente a forma encontrada fenomenologicamente por Cabibbo para os acoplamentos semi-leptônicos  $\Delta S = 0, 1$ . Por outro lado a corrente neutra obedece à regra de seleção  $\Delta S = 0$ , isto é, o mecanismo de GIM está incorporado no modelo.

O lagrangeano da Eq. (9.55) descreve portanto as interações fracas e eletromagnéticas dos quarks, isto é as correspondentes ao grupo de simetria  $SU(2) \times U(1)$ . As interações fortes são explicadas pela teoria de gauge da cor, isto a Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta é a teoria de gauge do grupo  $SU(3)_{\text{cor}}$ . De acordo com as nossas hipóteses os geradores de  $SU(3)_{\text{cor}}$  devem comutar com os de  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Portanto o grupo *fenomenológico* que descreve as interações fracas, eletromagnéticas e fortes é

$$G = SU(3)_{\text{cor}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (9.56)$$

## 9.5 A massa dos Leptões

Como as transformações do grupo  $SU(2) \times U(1)$ , (ver as Eqs. (9.22) e (9.23)), tratam de forma diferente as duas helicidades, um termo de massa para os leptões não é invariante sob a aceção de  $SU(2) \times U(1)$ . De facto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} &= -m_e \bar{e} e = \\ &= -m_e (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \end{aligned} \quad (9.57)$$

e numa transformação de  $U(1)$ , por exemplo, obtemos

$$\delta_Y \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} = -m_e \frac{i}{2} \varepsilon (\bar{e}_R e_L - \bar{e}_L e_R) \neq 0 \quad (9.58)$$

A maneira de resolver esta dificuldade é exigir que antes da quebra espontânea de simetria os leptões não tenham massa e que seja o próprio mecanismo de quebra de simetria que dê origem à massa. Isto é possível mediante novas interações a juntar ao lagrangeano entre os leptões e os escalares, ditos campos de Higgs. Para formarmos termos de massa para os leptões carregados, temos portanto de construir primeiro um termo no lagrangeano que seja invariante para  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Façamos isso primeiro para o electrão. Com o dubleto  $E_L$  e o dubleto de Higgs  $\phi$  podemos formar um singlete de  $SU_L(2)$ . Por outro lado

$$\begin{aligned} Y(E_L) &= -1 \\ Y(\phi) &= +1 \end{aligned} \quad (9.59)$$

pelo que um termo de forma  $E_L^\dagger \phi$  é singlete de  $SU_L(2)$  e tem hipercarga fraca

$$Y(E_L^\dagger \phi) = Y(E_L^\dagger) + Y(\phi) = +2 \quad (9.60)$$

Mas  $E_L^\dagger \phi$  não é invariante de Lorentz, pois falta um spinor de helicidade direita. Notando que

$$Y(e_R) = -2 \quad (9.61)$$

concluimos que o lagrangeano invariante de Lorentz e invariante para  $SU_L(2) \times U(1)$  é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e \bar{E}_L \phi e_R + \text{h.c.} \quad (9.62)$$

onde  $f_e$  é uma constante de acoplamento sem dimensões. Para vermos que este lagrangeano dá massa ao eletrão, notemos que quando se dá o fenómeno de quebra espontânea de simetria temos

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \dots \quad (9.63)$$

pelo que obtemos (tomamos  $f_e$  real)

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e v (\bar{e}_R e_L) + \dots \quad (9.64)$$

donde se conclui que

$$f_e = \frac{m_e}{v} = 2.8 \times 10^{-6} \quad (9.65)$$

A introdução do muão e do tau é agora trivial. Há contudo um detalhe que vale a pena explicar. O lagrangeano mais geral que dá massa aos leptões carregados é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \bar{E}(i) \phi e_R(j) \quad (9.66)$$

onde usámos a notação

$$e(1) = e ; e(2) = \mu ; e(3) = \tau \quad (9.67)$$

Em geral a matriz  $f_{ij}$  não é diagonal. Para encontrarmos os estados físicos teríamos de diagonalizar a matriz de massa e rodar os campos das interações para os campos físicos. Contudo, se os neutrinos não tiverem massa é sempre possível redefinir os campos dos neutrinos e acabar com novos campos que são diagonais tanto na matriz de massa como nos termos de interação. Portanto podemos desde logo escrever 9.66 na forma diagonal

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i=1}^3 f_i \bar{E}_L(i) \phi e_R(i) \quad (9.68)$$

Para este argumento é essencial que os neutrinos não tenham massa. Como veremos no capítulo 10 não é possível utilizar o mesmo argumento para os quarks

resultando daí a matriz de Cabibbo (ou mais geralmente a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)). Hoje sabe-se que, embora muito pequena (menor que 1 eV), os neutrinos têm massa. Para explicar a massa dos neutrinos é preciso generalizar o modelo standard. Nessas generalizações aparece então o equivalente à matriz CKM. Nós neste curso introdutório vamos continuar a considerar que os neutrinos não têm massa o que é uma aproximação muito boa para as experiências nos aceleradores.

## 9.6 Simple Examples

### 9.6.1 Decay $Z \rightarrow f \bar{f}$

After this introduction and knowing all the Feynman rules needed for tree level calculations in the electroweak sector of the standard model we are in conditions of giving a first example. Consider then the decay of the  $Z$  boson,

$$Z^0 \rightarrow f \bar{f} \quad (9.69)$$

where  $f$  is any standard model fermion with the exception of the top quark, because this particle has a mass  $m_t \simeq 172.9$  GeV [33] and therefore  $m_t > M_Z$  which means that the  $Z$  boson can not decay in  $t\bar{t}$ . The Feynman diagram is given in Fig. 9.5.

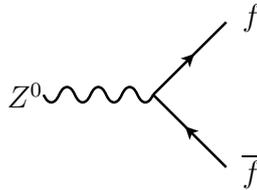


Figura 9.5:  $Z$  decay into  $f \bar{f}$ .

Applying the Feynman rules we get for the amplitude

$$\mathcal{M} = g_Z \epsilon_\mu(k, \lambda) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu \left( g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) v(p_4) \quad (9.70)$$

where we have defined the shorthand notation,

$$g_Z = \frac{g}{\cos \theta_W} . \quad (9.71)$$

The decay width is given by the general formula,

$$\Gamma = \int \frac{1}{2M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k - p_3 - p_4) \prod_{i=3}^4 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i} . \quad (9.72)$$

In order to simplify matters and also because it is a very good approximation, ( $M_Z \gg m_f$ ), we will neglect all the fermion masses. In the rest frame of the  $Z^0$  we get easily

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \quad (9.73)$$

and we only need to evaluate the square of the amplitude averaged over spins and polarizations. We will neglect the fermion masses and use the techniques of the helicity amplitudes explained in Chapter 4. The  $Z$  boson is a spin 1 particle with mass, and therefore has three polarizations. Two of these, called transversal polarizations, correspond to the polarization states of the photon ( $S_z = \pm 1$  or  $h = \pm 1$ ) and the third one, called longitudinal polarization, corresponds to  $S_z = 0$ . In the rest frame of the  $Z$  the polarization vectors for these three cases can be written as

$$\begin{aligned} \epsilon_+^\mu &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0), & S_z = +1, \quad h = +1 \\ \epsilon_-^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0), & S_z = -1, \quad h = -1 \\ \epsilon_L^\mu &= (0, 0, 0, 1), & S_z = 0, \quad h = 0 \end{aligned} \quad (9.74)$$

On the other hand we can write

$$\begin{aligned} g_V^f - g_A^f \gamma_5 &= (g_V^f - g_A^f \gamma_5) (P_L + P_R) \\ &= (g_V^f + g_A^f) P_L + (g_V^f - g_A^f) P_R \equiv g_L^f P_L + g_R^f P_R \end{aligned} \quad (9.75)$$

with

$$g_L^f \equiv g_V^f + g_A^f, \quad g_R^f \equiv g_V^f - g_A^f \quad (9.76)$$

As in the massless limit chirality equals helicity, this means that we can have only two possible helicity combinations,

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} p_3 \\ \nearrow \\ \text{wavy line} \\ \searrow \\ p_4 \end{array} & \quad J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \end{aligned} \quad (9.77)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} p_3 \\ \searrow \\ \text{wavy line} \\ \nearrow \\ p_4 \end{array} & \quad J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \end{aligned} \quad (9.78)$$

We therefore obtain ( $\sqrt{s} = M_Z$ )

$$\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (9.79)$$

$$\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (9.80)$$

$$\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = g_Z g_R^f M_Z \sin \theta \quad (9.81)$$

$$\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_+ \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \cos \theta) \quad (9.82)$$

$$\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_- \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = -g_Z g_L^f M_Z \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \cos \theta) \quad (9.83)$$

$$\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f \epsilon_L \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = g_Z g_L^f M_Z \sin \theta \quad (9.84)$$

These angular distributions are shown in Fig. 9.6 for the case of the  $P_R$  operator in Eq. (9.75). These angular distributions can be easily understood using the results

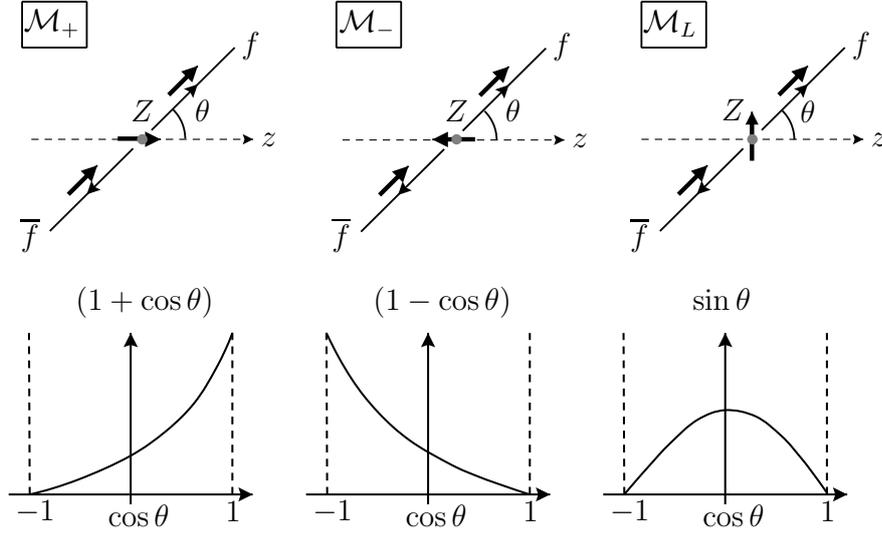


Figura 9.6: Angular distributions for the  $P_R$  case.

of Problem 9.1 for eigenstates of spin 1 in an arbitrary direction. Choosing, without loss of generality the plane  $\phi = 0$ , we have in the basis where  $S_z$  is diagonal

$$|1, 1\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}, \quad |1, 0\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{bmatrix}, \quad |1, -1\rangle_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (9.85)$$

we immediately see how the eigenstates of spin 1 along the  $z$  axis project into the state  $|1, 1\rangle_\theta$  with coefficients proportional to  $(1 + \cos \theta)$ ,  $\sin \theta$  and  $(1 - \cos \theta)$  for the states  $|1, 1\rangle_z$ ,  $|1, 0\rangle_z$  and  $|1, -1\rangle_z$ , respectively.

Therefore we get for the sum over spins,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{3} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \quad (9.86)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} [|\mathcal{M}(+; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \uparrow, \downarrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \uparrow, \downarrow)|^2 \\
&\quad + |\mathcal{M}(+; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(-; \downarrow, \uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(L; \downarrow, \uparrow)|^2] \\
&= \frac{2}{3} g_Z^2 (g_R^{f2} + g_L^{f2}) \\
&= \frac{4}{3} \left( \frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 M_Z^2 [g_V^{f2} + g_A^{f2}] \tag{9.87}
\end{aligned}$$

For the total width we get (the integration in  $d\Omega$  gives  $4\pi$ )

$$\Gamma = \frac{M_Z}{12\pi} \left( \frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 [g_V^{f2} + g_A^{f2}] \tag{9.88}$$

This result is normally presented in terms of the Fermi constant,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \left( \frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{8M_Z^2} \tag{9.89}$$

where we have used the standard model relation for the  $W$  and  $Z$  masses,

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \tag{9.90}$$

Therefore we get

$$\Gamma = \frac{2G_F M_Z^3}{3\sqrt{2}\pi} [g_V^{f2} + g_A^{f2}] \tag{9.91}$$

which gives, for example for electrons<sup>3</sup>

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) \simeq 83.4 \text{ MeV} \tag{9.92}$$

that can be compared with the PDG [33] value

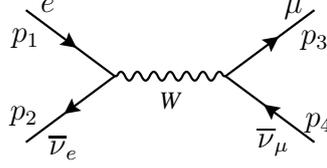
$$\begin{aligned}
\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= \Gamma_Z \times \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) \\
&= (2.4952 \pm 0.0023) \times 10^3 \times (3.363 \pm 0.004) \times 10^{-2} \text{ MeV} \\
&= (83.914 \pm 0.127) \text{ MeV} . \tag{9.93}
\end{aligned}$$

### 9.6.2 Scattering $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

As a second example we consider the  $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$  scattering in the CM. It will be instructive to see how the  $W$  cures some of the problems of the current-current theory. To simplify, and in order to be able to apply the helicity techniques, we will assume that  $\sqrt{s}$  is such that we can neglect all the fermion masses but not the  $W$  mass and width. In lowest order in perturbation theory we have the Feynman diagram of Fig. 9.7. The amplitude is given by,

---

<sup>3</sup>Notice that this just the lowest order calculation. The reason why the result is so good is that some higher order corrections are already incorporated in  $G_F$ .

Figura 9.7: scattering  $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ .

$$\mathcal{M} = i \left( \frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} v(p_4) \quad (9.94)$$

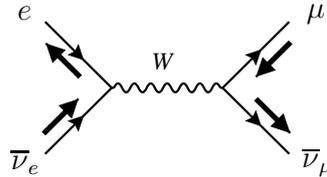
where  $q = p_1 + p_2$  and  $\Gamma_W$  is the decay width of the  $W$ . Using the fact that we are neglecting the fermion masses the term in the numerator of the  $W$  boson propagator proportional to the momenta vanishes after application of the Dirac equation. For instance,

$$\begin{aligned} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) q_\mu &= \bar{v}(p_2) (\not{p}_1 + \not{p}_2) \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \\ &= \bar{v}(p_2) \not{p}_2 \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) + \bar{v}(p_2) \frac{1 + \gamma_5}{2} \not{p}_1 u(p_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9.95)$$

where we have used  $\not{p}_1 u(p_1) = 0$  and  $\bar{v}(p_2) \not{p}_2 = 0$ . Making use of the relation  $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$ , we further simplify the expression

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= - \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_4) \\ &= - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu P_L u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\mu P_L v(p_4). \end{aligned} \quad (9.96)$$

From the structure of Eq. (9.96) we immediately see that the only non-zero helicities are those shown in Fig. 9.8 Therefore we get only one helicity combination,

Figura 9.8: Helicities for  $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ .

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = - \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) \cdot J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} \sqrt{s}(0, -1, i, 0) \cdot \sqrt{s}(0, -\cos\theta, -i, \sin\theta) \\
&= -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W\Gamma_W} s(1 + \cos\theta)
\end{aligned} \tag{9.97}$$

where we have used the usual kinematics

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1), \tag{9.98}$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin\theta, 0, \cos\theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin\theta, 0, -\cos\theta) \tag{9.99}$$

Now we obtain

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} |\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow)|^2 \\
&= 4G_F^2 \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} s^2(1 + \cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{9.100}$$

We get therefore for the differential cross section in the CM frame

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\
&= \frac{G_F^2 s}{16\pi^2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} (1 + \cos\theta)^2
\end{aligned} \tag{9.101}$$

After integration over the angles we get finally,

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2\Gamma_W^2} \tag{9.102}$$

We can see that we have two regimes. For  $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$  the cross section grows like

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \tag{9.103}$$

However for values of  $\sqrt{s} \simeq M_W$  the  $W$  propagator begins to be important and unitarity is not violated. For  $\sqrt{s} \gg M_W$  we have

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 M_W^4}{\pi s} \tag{9.104}$$

In Fig. 9.9 we show this behavior. In the left panel, for  $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$ , the cross section grows like  $s$  and this would violate unitarity. The  $W$  propagator corrects for this and restores unitarity as shown on the right panel. Notice the different scales on the two situations. The standard model has the correct asymptotic behavior.

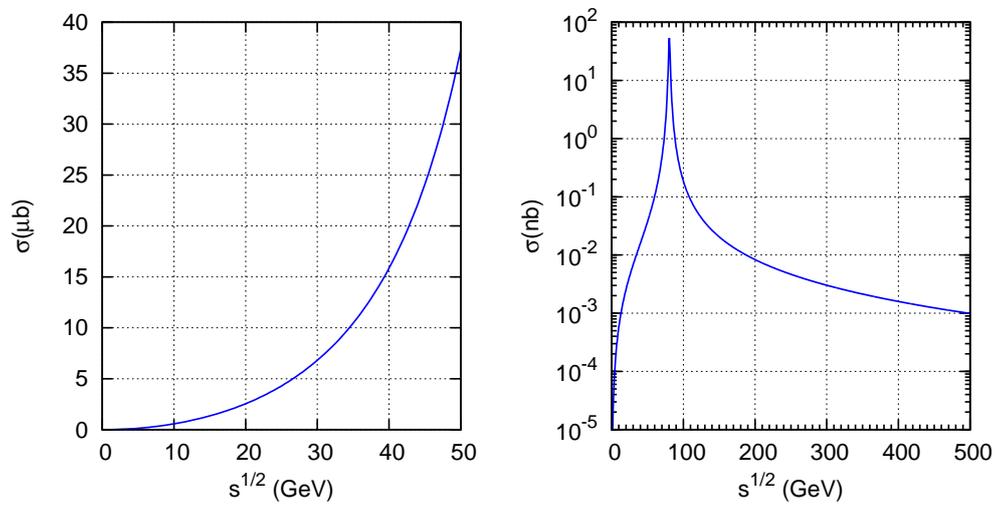


Figura 9.9:  $\sigma(e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)$ . Left panel: Behavior of Eq. (9.103). Right panel: The exact result, Eq. (9.104). Notice the different scales.

## Problemas capítulo 9

9.1 Considere as matrizes de spin 1 na representação em que  $S_z$  é diagonal,

$$S_x = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \hbar \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (9.105)$$

a) Verify that these matrices obey the correct commutation relation for spin and angular momenta,

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad + \text{permutations} . \quad (9.106)$$

b) Consider now spin 1 in an arbitrary direction  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ . Show that the eigenvalues of the matrix

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \hbar \begin{bmatrix} \cos \theta & \sqrt{2} \sin \theta e^{-i\phi} & 0 \\ \sqrt{2} \sin \theta e^{i\phi} & 0 & \sqrt{2} \sin \theta e^{-i\phi} \\ 0 & \sqrt{2} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (9.107)$$

are 1, 0, -1 and the corresponding eigenvectors are,

$$|1, 1\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{-i\phi} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad |1, 0\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\phi} \\ -\cos \theta \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (9.108)$$

$$|1, -1\rangle_{(\theta, \phi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (9.109)$$

9.2 Consider the elastic scattering

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^+ \quad (9.110)$$

- a) Consider only the  $W$  diagram first. Show that in the limit that  $m_e \ll \sqrt{s} \ll M_W$  we have

$$M^{(a)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(1 - \gamma_5)u(e) \quad (9.111)$$

- b) Consider now the  $Z$  diagram. Show that

$$M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5)u(e) \quad (9.112)$$

and therefore

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(C_V - C_A\gamma_5)u(e) \quad (9.113)$$

with

$$C_V = 2\sin^2\theta_W \frac{1}{2} \quad ; \quad C_A = \frac{1}{2} \quad (9.114)$$

This process allows to distinguish between a  $V - a$  pure theory ( $C_V = C_A = 1$ ) from the standard model. The experimental results confirm the neutral current structure of the standard model.

- c) Neglecting the fermion masses, determine the non-vanishing helicity amplitudes for both channels.

### 9.3 Consider the process $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$ , that occurs via neutral current.

- a) Show that the amplitude is

$$\mathcal{M} = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(\nu) \bar{u}(e)\gamma_\mu(C'_V - C'_A\gamma_5)u(e) \quad (9.115)$$

with

$$C'_V = \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W \quad ; \quad C'_A = \frac{1}{2} \quad (9.116)$$

while for a theory without neutral currents one would have

$$C'_V = C'_A = 0 \quad (9.117)$$

- b) Neglecting the fermion masses, determine the non-vanishing helicity amplitudes for this process.

9.4 Considere os dois decaimentos do  $Z^0$

$$Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu} \quad (9.118)$$

$$Z^0 \rightarrow e^-e^+ . \quad (9.119)$$

Mostre que

$$\frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^-e^+)} \simeq 2 . \quad (9.120)$$

9.5 Desprezando as massas de todos os fermiões mostre que

$$BR(Z^0 \rightarrow e^-e^+) \equiv \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^-e^+)}{\Gamma_Z} \simeq 3.4\% \quad (9.121)$$

onde  $\Gamma_Z \equiv \Gamma(Z^0 \rightarrow \text{tudo})$ .

9.6 Considere o processo  $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$ .

- Quais os diagramas que contribuem para esse processo ?
- Escreva a amplitude correspondente ao diagrama dominante para  $\sqrt{s} \simeq M_Z$ .
- Mostre que para  $\sqrt{s} \simeq M_Z$  temos

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)} \simeq 2 \quad (9.122)$$

9.7 Considere o decaimento  $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ .

- Calcule a velocidade do eletrão no referencial em que o  $W$  está em repouso.
- Escreva a expressão para a amplitude do processo.
- Desprezando a massa do eletrão calcule a largura do decaimento. Compare com o resultado experimental  $\Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = 229 \text{ MeV}$ .

9.8 Calcule o *branching ratio*  $BR(W^- \rightarrow e^- \nu)$  definido por

$$BR(W^- \rightarrow e^- \nu) \equiv \frac{BR(W^- \rightarrow e^- \nu)}{\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo})} \quad (9.123)$$

onde  $\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo}) = \Gamma_W = 2.0 \text{ GeV}$ .

9.9 Quando se desprezam as massas dos leptões e se considera que a energia no CM,  $\sqrt{s}$ , é muito inferior às massas dos bosões  $W$  e  $Z$ , as secções eficazes para os processos da tabela seguinte

Processo	$\lambda_i$
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$	1
$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$\frac{1}{3}$
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$	$\sigma = \frac{32}{3} [(g_V^\nu)^2 + (g_A^\nu)^2] (g_V^e)^2 + 2g_V^\nu g_A^\nu g_V^e g_A^e$
$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$	
$\mu^- + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	
$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	

podem-se escrever na forma

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\pi} G_F^2 s$$

Mostre que isto é verdade, verificando os valores dados na tabela e preenchendo as entradas que faltam.