

Capítulo 4

Teoria Quântica dos Campos e Diagramas de Feynman

Seguimos aqui os capítulos 5 e 6 do Thomson e 7 e 8 do Griffiths. Algumas destas questões estão mais desenvolvidas em ITC [2]. This is part in English and part in Portuguese, to be improved next year.

4.1 Feynman Diagrams and Time Ordering

This a complement of what we have seen in Chapter 2¹.

Consider the process $a + b \rightarrow c + d$ as shown in Fig. 4.1 Using second order

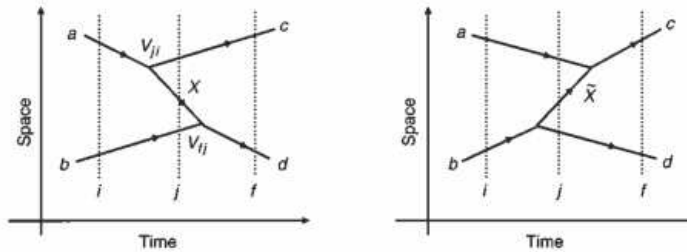


Figura 4.1: Time ordered diagrams

perturbation theory the first diagram is

$$T_{fi}^{ab} = \frac{\langle f|V|j\rangle \langle j|V|i\rangle}{E_i - E_j} = \frac{\langle d|V|X + b\rangle \langle c + X|V|a\rangle}{E_a + E_b - (E_c + E_X + E_b)} \quad (4.1)$$

In non-relativistic QM one uses the transition amplitude T_{fi} while in relativistic QM one uses the Lorentz Invariant (LI) amplitude \mathcal{M}_{fi} . The relation is

$$T_{fi} = \mathcal{M}_{fi} \prod_k (2E_k)^{-1/2} \quad (4.2)$$

¹Next year it should be included there

Therefore

$$V_{ji} = \langle c + X | V | a \rangle = \frac{\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X}}{(2E_a 2E_c 2E_X)^{1/2}} \quad (4.3)$$

Take the LI amplitudes in the simplest case, a constant

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow c+X} = g_a, \quad \mathcal{M}_{X+b \rightarrow d} = g_b \quad (4.4)$$

Then

$$\mathcal{M}_{fi}^{ab} = (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2} T_{fi}^{ab} = \frac{(2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}}{2E_X (2E_a 2E_b 2E_c 2E_d)^{1/2}} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \quad (4.5)$$

$$= \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_a - E_c - E_X} \quad (4.6)$$

For the second diagram we get

$$\mathcal{M}_{fi}^{ba} = \frac{1}{2E_X} \frac{g_a g_b}{E_b - E_d - E_X} \quad (4.7)$$

and the total LI amplitude is

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{2E_X} \left[\frac{1}{E_a - E_c - E_X} + \frac{1}{E_b - E_d - E_X} \right] \quad (4.8)$$

$$= \frac{g_a g_b}{2E_X} \left[\frac{1}{E_a - E_c - E_X} - \frac{1}{E_a - E_c + E_X} \right] \quad (4.9)$$

$$= \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - E_X^2} \quad (4.10)$$

wher we have used

$$E_a + E_b = E_c + E_d \Rightarrow E_b - E_d = -(E_a - E_c) \quad (4.11)$$

But we can relate E_X with the momenta. We have

$$E_X^2 = |\vec{p}_X|^2 + m_X^2 = |\vec{p}_a - \vec{p}_c|^2 + m_X^2 \quad (4.12)$$

and therefore we get

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{g_a g_b}{(E_a - E_c)^2 - |\vec{p}_a - \vec{p}_c|^2 - m_X^2} = \frac{g_a g_b}{q^2 - m_X^2} \quad (4.13)$$

where $q = p_a - p_c$ is the momentum in the Feynman propagator. Therefore we concluded that Feynman diagrams represents the two time orderings, therefore the relative position of the vertices with respect to time does not matter, as shown in Fig. 4.2.

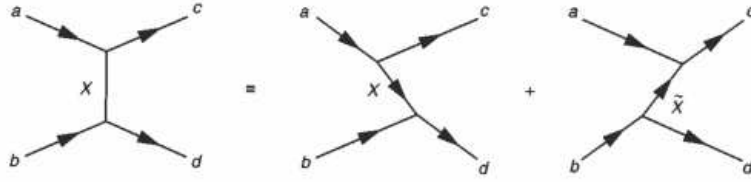


Figura 4.2: Feynman Diagrams and time ordering

4.2 O fóton

Em teoria quântica a quantidade fundamental é o potencial vetor. A regra é sempre que os 4-vetores contravariantes, isto é aqueles que se transformam como as coordenadas, têm as dimensões e os nomes da parte espacial. Assim definimos (nesta secção não estamos a fazer $c = 1$)

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (4.14)$$

Podemos facilmente verificar que a condição de gauge de Lorentz [11]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (4.15)$$

se escreve nesta notação (notar que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$),

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.16)$$

O outro 4-vetor importante é a corrente J^μ definida por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (4.17)$$

satisfazendo a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 = \partial_\mu J^\mu. \quad (4.18)$$

Os campos eletromagnéticos fazem parte do chamado *tensor de Maxwell* definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.19)$$

que é invariante para transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (4.20)$$

Usando as relações usuais [11] entre os potenciais e os campos \vec{E} e \vec{B} , obtemos numa conveniente representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

ou ainda

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (4.22)$$

As equações de Maxwell não homogêneas (isto é com cargas e correntes) obtém-se a partir da equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (4.23)$$

As equações homogêneas são uma consequência do tensor $F_{\mu\nu}$ ser antisimétrico. De facto, se definirmos o tensor dual (ver Problema 3.2)

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (4.24)$$

então o facto do tensor de Maxwell ser antisimétrico implica que

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.25)$$

e esta equação é equivalente às equações homogêneas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Este resultado é conhecido por identidade de Bianchi.

A equação de Maxwell não homogênea na gauge de Lorentz, Eq. (5.4), escreve-se,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (4.26)$$

Contudo esta escolha não eliminou completamente a ambiguidade dos potenciais. De facto podemos ainda usar uma transformação de gauge em que $\square \Lambda = 0$, sem modificar a Eq. (4.26). Esta dificuldade está na base de muitos problemas em quantizar a teoria de Maxwell, que não vamos detalhar aqui.

No espaço livre a equação é a equação das ondas,

$$\square A^\mu = 0 \quad (4.27)$$

que tem com o solução ondas planas

$$A^\mu(x) = N e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (4.28)$$

onde N é uma normalização e $\epsilon^\mu(p)$ é o vetor polarização que caracteriza ao spin do fóton. A condição de Lorentz implica que

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0. \quad (4.29)$$

Sabe-se do eletromagnetismo clássico que o fóton tem dois estados de polarização (spin 1 sem massa), mas aqui o vetor polarização tem quatro graus de liberdade (4-vetor). Esta dificuldade está relacionada com a ambiguidade dos potenciais e resolve-se escolhendo uma dada condição de gauge. A condição na Eq. (4.29) já retira um grau de liberdade. Para fixar completamente os graus de liberdade escolhe-se muitas vezes a gauge de Coulomb, que é uma restrição da classe de gauges de Lorentz onde

$$A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (4.30)$$

Nesta gauge

$$\epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0 \quad (4.31)$$

o que quer dizer que as polarizações são perpendiculares à direção de movimento. Se tomarmos essa direção como o eixo dos z então os dois vetores independentes são

$$\epsilon(p, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon(p, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (4.32)$$

Estes vetores obedecem às relações gerais

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \epsilon_\mu(p, 1)\epsilon^\mu(p, 2) = 0, \quad \epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda) = -1 \quad (4.33)$$

e

$$\sum_{\text{Pol}} \epsilon^{\mu*} \epsilon^\nu = -g^{\mu\nu} \quad (4.34)$$

4.3 A eletrodinâmica quântica (QED)

A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação de elétrons (e positrões) com fótons. No capítulo 6 discutiremos em detalhe a construção do lagrangeano de QED. Aqui vamos somente discutir a forma da interação. Vimos no capítulo 3 que para a equação de Dirac temos uma corrente de probabilidade conservada dada por,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.35)$$

Se multiplicarmos pela carga do elétron, $q_e = -e$, onde e é a carga do próton, obtemos a corrente eletromagnética

$$J^\mu = -ej^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4.36)$$

Esta é a corrente que aparece na Eq. (4.26). Como é que esta corrente interatua com o fóton? Do eletromagnetismo clássico sabemos que o lagrangeano para uma partícula não relativista com carga q em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (4.37)$$

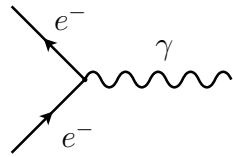
o que com a identificação (ver capítulo 6)

$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L} \quad (4.38)$$

dá

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -eQ_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (4.39)$$

onde definimos $Q_e = -1$. Na linguagem dos diagramas de Feynman descrevemos a interação da forma seguinte



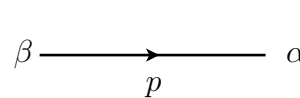
$$-ie Q_e \gamma^\mu \quad (4.40)$$

Vemos assim que a regra de Feynman corresponde a *tirar* os campos do lagrangeano de interação e multiplicar o resultado por i .

4.4 Regras de Feynman para QED

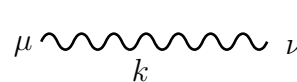
Vamos agora indicar o conjunto completo de regras de Feynman para QED. Elas seguem o que vimos para o modelo ABC com as modificações necessárias devido a termos spinores e antipartículas.

1. Para num dado processo desenhar todos os diagramas topologicamente distintos.
2. Para cada eletrão que entra no diagrama um fator $u(p, s)$. Se sai do diagrama um fator $\bar{u}(p, s)$.
3. Para cada positrão deixando o diagrama um fator $v(p, s)$. Entrando o diagrama um fator $\bar{v}(p, s)$.
4. Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização $\varepsilon_\mu(k)$ e no estado final $\varepsilon_\mu^*(k)$.
5. Por cada linha fermiônica interna o propagador



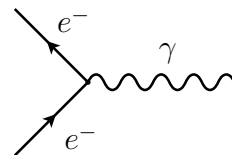
$$S_{F\alpha\beta}(p) = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.41)$$

6. Por cada linha interna do fóton o propagador (na gauge de Feynman)



$$D_{F\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (4.42)$$

7. Por cada vértice o fator



$$(-ieQ_e\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (4.43)$$

onde passamos a usar a notação, mais convencional, de introduzir o sinal da carga explicitamente. Portanto, a partir daqui, $e = |e|$, é a carga do positrão ou do próton e claro que para o eletrão $Q_e = -1$.

8. Por cada momento interno não fixado por conservação de energia-momento (*loops*) um fator

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (4.44)$$

9. Por cada loop de fermiões um sinal (-1) .

10. Um fator -1 entre diagramas que diferem por permutações ímpares de linhas fermiônicas (estatística de Fermi dos fermiões).

11. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i\mathcal{M}$, por isso para obter \mathcal{M} multiplique o resultado final por i .

Comentários

1. As regras 9) e 10) são um pouco difíceis de explicar sem operadores e teorema de Wick. A este nível aparecem mais como uma receita.
2. Para escrever corretamente as linhas fermiônicas devemos notar que elas no final devem dar um número, isto é uma matriz 1×1 no espaço de Dirac. Para obter isso deve-se usar a regra empírica que se começa a escrever cada linha do diagrama pela ponta da seta.
3. Os denominadores dos propagadores têm a mesma forma do que no caso da teoria escalar ABC . Os numeradores diferem para eletrões e fótons (gauge de Feynman) da maneira indicada.
4. The $i\epsilon$ in the denominators is here for completeness. It only matters for one and higher loops diagrams. For tree level we can forget about it, putting $\epsilon \rightarrow 0$.

4.5 Exemplos

Se nos ficarmos por duas partículas no estado final, o número de processos em causa é muito reduzido. Na tabela 4.1 está feito um resumo.

Processo	Observação
$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	Efeito Compton
$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	Em QED
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	Difusão Bhabha
$e^- + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow e^- + \text{Núcleo}(Z) + \gamma$	Bremsstrahlung
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Aniquilação de pares
$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	Difusão Möller
$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$	Criação de pares
$\gamma + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow \text{Núcleo}(Z) + e^- + e^+$	Criação de pares

Tabela 4.1: Processos simples em QED.

Vamos analisar os três primeiros casos.

4.5.1 Colisão elástica eletrão-muão

Consideremos primeiro a colisão elástica eletrão-muão. Embora este processo não seja em QED no sentido restrito, o muão é em tudo, exceto na massa, igual ao eletrão e tem a vantagem de haver só um diagrama que se mostra na Fig. 4.3. Com

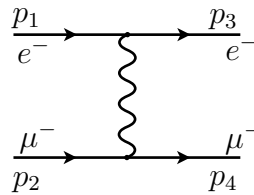


Figura 4.3: Difusão $e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ em QED.

a cinemática da figura obtemos para a amplitude,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\
 &= - \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Para prosseguir e calcular a secção eficaz, Eq. (2.39), temos de calcular $|\mathcal{M}|^2$. Antes de fazer isso vamos ver mais dois processos e voltaremos então ao cálculo das secções eficazes.

4.5.2 Colisão elástica eletrão-positrão

Neste processo, conhecido por difusão Bhabha, temos dois diagramas conforme indicado na Fig. 4.4. Temos ainda uma situação em que existe um sinal menos entre

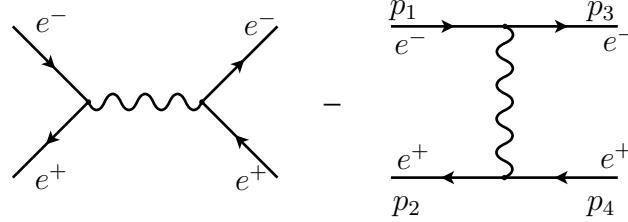


Figura 4.4: Difusão Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

os dois diagramas, uma consequência da regra 10. A amplitude escreve-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (4.46)$$

onde

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad \mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4) \quad (4.47)$$

onde as variáveis de Mandelstam s, t são

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2. \quad (4.48)$$

4.5.3 Efeito de Compton

Consideremos finalmente o efeito de Compton. Com a cinemática indicada na Fig. 4.5, obtemos para a amplitude

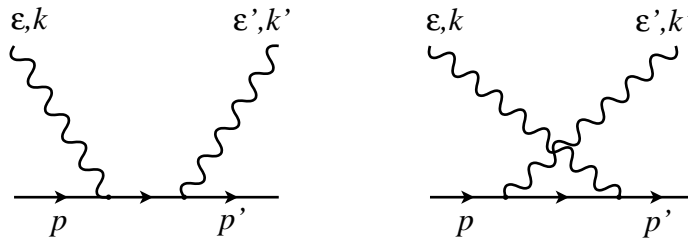


Figura 4.5: Diagramas para o efeito de Compton, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (4.49)$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p+k)^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k') \quad (4.50)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p - k')^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\nu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k'). \quad (4.51)$$

Let us learn how to do a real calculation. To avoid unnecessary complications we choose the simplest process, $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$, that has just one Feynman diagram, shown in Fig. 4.6. The amplitude for this process is

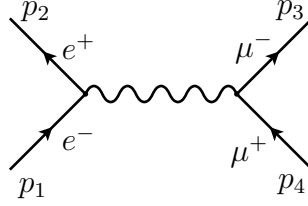


Figura 4.6: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ scattering.

$$\mathcal{M} = i \bar{v}(p_2) (ie\gamma^\mu) u(p_1) \frac{-i g_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3) (ie\gamma^\nu) v(p_4) \quad (4.52)$$

$$= - \frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4) \quad (4.53)$$

where we have the CM kinematics of Fig. 4.7.

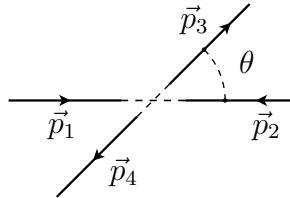


Figura 4.7: CM kinematics

4.5.4 The helicity amplitudes

In the amplitude in Eq.(A.38) we did not show the spin states. We will use the helicity states basis. We have sum over the the final state spins and take the average over the initial state (non-polarized beams). For the initial state (in the CM) we have the four possibilities shown in Fig. 4.8

For the final state (in the CM) we also have four possibilities as shown in Fig. 4.9

Therefore we want to calculate

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} [|\mathcal{M}(\uparrow\uparrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\uparrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots]$$

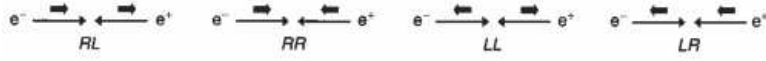


Figure 4.8: Helicity combinations for the initial state. $R \equiv \uparrow$ positive helicity, $L \equiv \downarrow$ negative helicity.

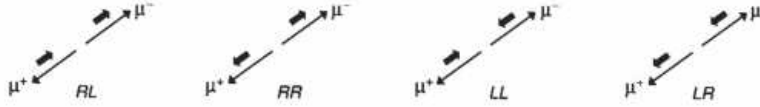


Figure 4.9: Helicity combinations for the final state.

$$\begin{aligned}
 & +|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots \\
 & +|\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots \\
 & +|\mathcal{M}(\downarrow\downarrow; \uparrow\uparrow)|^2 + |\mathcal{M}(\downarrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 + \dots] \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

To simplify matters we take all masses to zero. This is usually a very good approximation, as the center of mass energy is much higher than the masses of the particles. Then the four momenta are given by,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= E(1, 0, 0, 1), & p_2 &= E(1, 0, 0, -1) \\
 p_3 &= E(1, \sin \theta, 0, \cos \theta), & p_4 &= E(1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta) \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Now we recall the helicity spinors using the conditions, $|\vec{p}| = E$, with $E = \sqrt{s}/2$. We have

$$u_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad u_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

and

$$v_{\uparrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \sin(\frac{\theta}{2}) \\ -\cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ -\sin(\frac{\theta}{2}) \\ \cos(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad v_{\downarrow} = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \\ \cos(\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Making the substitutions

$$\begin{aligned}
 p_1 : \theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0, & & p_2 : \theta \rightarrow \pi, \phi \rightarrow \pi \\
 p_3 : \theta \rightarrow \theta, \phi \rightarrow 0, & & p_4 : \theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \pi \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

we get for the initial state

$$u_{\uparrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow}(p_1) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_{\uparrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow}(p_2) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

and for the final state

$$u_{\uparrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad u_{\downarrow}(p_3) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

and

$$v_{\uparrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad v_{\downarrow}(p_4) = \sqrt{E} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

In order to organize the calculation we write the LI amplitude as

$$\mathcal{M}(h_1, h_2, h_3, h_4) = -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(h_1, h_2)^\mu J_{u_3 v_4}(h_3, h_4)_\mu \quad (4.62)$$

where $h_i = \uparrow, \downarrow$, and the currents are given by,

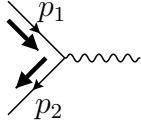
$$J_{u_1 v_2}(h_1, h_2)^\mu = \bar{v}(p_2, h_2) \gamma^\mu u(p_1, h_1), \quad J_{u_3 v_4}(h_3, h_4)^\mu = \bar{u}(p_3, h_3) \gamma^\mu v(p_4, h_4) \quad (4.63)$$

We want to calculate the components of these 4-vectors. It has to be done component by component. For instance

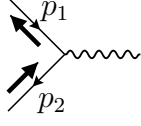
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \uparrow)^0 = (\sqrt{E})^2 v^\dagger(p_2, \uparrow) \gamma^0 \gamma^0 u(p_1, \uparrow) = E [1, 0, -1, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow)^2 &= (\sqrt{E})^2 v^\dagger(p_2, \downarrow) \gamma^0 \gamma^2 u(p_1, \uparrow) \\ &= E [0, -1, 0, -1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E [0, -1, 0, -1] \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \\ &= -2i E \end{aligned} \quad (4.65)$$

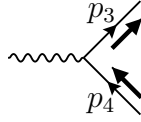
Although this is straightforward, it is a bit boring and with a large possibility of errors. But we can program the procedure in **Mathematica** and get the final results that are quite simple. We get that the only non-zero currents are,



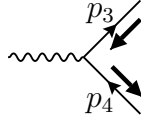
$$J_{u_1 v_2}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -1, -i, 0) \quad (4.66)$$



$$J_{u_1 v_2}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -1, i, 0) \quad (4.67)$$



$$J_{u_3 v_4}(\uparrow, \downarrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, i, \sin \theta) \quad (4.68)$$



$$J_{u_3 v_4}(\downarrow, \uparrow) = \sqrt{s} (0, -\cos \theta, -i, \sin \theta) \quad (4.69)$$

Therefore we get

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) &= -\frac{e^2}{s} [\sqrt{s}(0, -1, -i, 0)] \cdot [\sqrt{s}(0, -\cos \theta, i, \sin \theta)] \\ &= \frac{e^2}{s} (1 + \cos \theta) \equiv 4\pi\alpha (1 + \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.70)$$

Similarly

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \downarrow\uparrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos \theta)^2 \quad (4.71)$$

$$|\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \downarrow\uparrow)|^2 = |\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow)|^2 = (4\pi\alpha)^2 (1 - \cos \theta)^2 \quad (4.72)$$

and

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{1}{4} (4\pi\alpha)^2 [2(1 + \cos \theta)^2 + 2(1 - \cos \theta)^2] \quad (4.73)$$

$$= (4\pi\alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.74)$$

Finally for the cross section, using Eq. (2.39), we get

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta) \quad (4.75)$$

and the total cross section is obtained after integration in the angles to give,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (4.76)$$

The comparison with the experimental result is given in Fig. 4.10

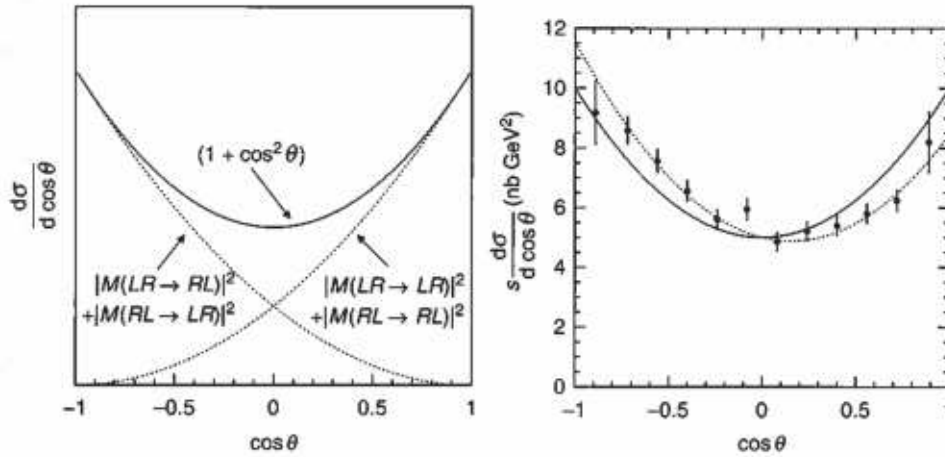


Figura 4.10: Solid curve is QED prediction. Dotted curve includes electroweak corrections. From JADE experiment (Bartel et al. (1985))

4.5.5 Understanding the result

Now that we have obtained the final result we can go back and try to understand what we got, because that will help us in doing other calculations in a simpler manner. First we realize that the only non-vanishing amplitudes correspond to those cases where the total spin along the axis of the particle-antiparticle pair is ± 1 . This is shown in Fig. 4.11. This can be understood as follows. First the fact that we

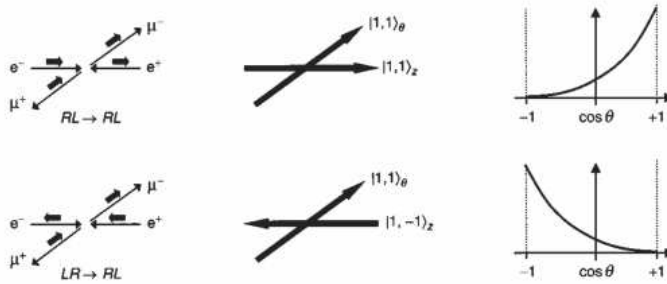


Figura 4.11: Non-zero contributions and the spin projections

have spin 1 is due to the fact that a photon with spin 1 is exchanged. On the other hand, we can express the state with spin 1 and projection +1 along the θ direction, $|1, +1\rangle_\theta$, as a linear combination of the states along the z axis. The result is

$$|1, +1\rangle_\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) |1, -1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle_z + \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) |1, 1\rangle_z \quad (4.77)$$

therefore we get easily

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow; \uparrow\downarrow) \propto \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (4.78)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow\uparrow; \uparrow\downarrow) \propto {}_{\theta}\langle 1, +1 | 1, -1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \quad (4.79)$$

$$(4.80)$$

4.5.6 Chirality

We see that (for zero masses) the non-zero interactions do not flip the spin

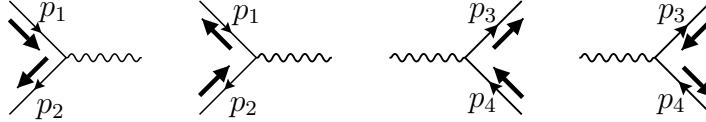


Figura 4.12: Non-zero interactions

This is due to a property known as chirality, that is related to the eigenvalues of the γ_5 matrix. Define the projectors²

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$P_L + P_R = 1, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (4.82)$$

Then, for the massless case

$$P_R u_{\uparrow} = u_{\uparrow}, \quad P_L u_{\uparrow} = 0, \quad P_R u_{\downarrow} = 0, \quad P_L u_{\downarrow} = 0 \quad (4.83)$$

$$P_R v_{\uparrow} = 0, \quad P_L v_{\uparrow} = v_{\uparrow}, \quad P_R v_{\downarrow} = v_{\downarrow}, \quad P_L v_{\downarrow} = 0 \quad (4.84)$$

Therefore for zero masses we have Helicity \equiv Chirality.

4.5.7 Chirality in QED

Define the left and right components of a spinor through

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_L \equiv P_L\psi, \quad \psi_R \equiv P_R\psi \quad (4.85)$$

Then

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R = (P_L\psi)^\dagger \gamma^0 + (P_R\psi)^\dagger \gamma^0 = (P_L^2\psi)^\dagger \gamma^0 + (P_R^2\psi)^\dagger \gamma^0 \quad (4.86)$$

$$= (P_L\psi)^\dagger P_L^\dagger \gamma^0 + (P_R\psi)^\dagger P_R^\dagger \gamma^0 = (P_L\psi)^\dagger P_L \gamma^0 + (P_R\psi)^\dagger P_R \gamma^0 \quad (4.87)$$

$$= (\psi_L)^\dagger \gamma^0 P_R + (\psi_R)^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\psi}_L P_R + \bar{\psi}_R P_L \quad (4.88)$$

Therefore for the current term in the QED Lagrangian

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\bar{\psi}_L P_R + \bar{\psi}_R P_L) \gamma^\mu (\psi_L + \psi_R) \quad (4.89)$$

²I use L,R for chirality and \uparrow, \downarrow for helicity

$$= \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R \quad (4.90)$$

while for the mass term

$$m \bar{\psi} \psi = m (\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \quad (4.91)$$

Therefore we see that QED current interaction preserves chirality. As in the massless limit chirality and helicity are the same, it also preserves helicity. Do not forget that in this identification the positive (negative) helicity anti-particle is left-handed (right-handed), respectively (see Eq. (4.84))

4.6 A real calculation: $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$

4.7 How to calculate other processes

Now that we have learned how to calculate the amplitudes and cross section for a particular process, the question is how can we handle other processes? We just stay with process with two electrons or positrons in the initial and final states and keeping all masses at zero.

4.7.1 Bhabha scattering

Let us exemplify how we can extend what we have learned with another process, $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ (Bhabha scattering). For this process we have the two diagrams of Fig. 4.13

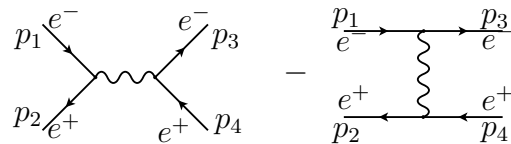


Figura 4.13: Diagrams for Bhabha

Using the fact that, for $m_e = 0$, chirality must be conserved we have only six possible combinations that we represent schematically in terms of diagrams

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \uparrow, \downarrow) = \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \quad (4.92)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \downarrow; \downarrow, \uparrow) = \text{Diagram 3} \quad (4.93)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \uparrow, \downarrow) = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \quad (4.94)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \uparrow; \downarrow, \uparrow) = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \text{---} \text{---} \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad (4.95)$$

$$\mathcal{M}(\uparrow, \uparrow; \uparrow, \uparrow) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad (4.96)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow, \downarrow; \downarrow, \downarrow) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \quad (4.97)$$

4.7.2 t-channel currents

To be able to write the amplitudes in the previous diagrams we need, besides the s-channel results already discussed in Eqs. (A.18)-(A.21), the non-zero amplitudes for the t-channel. These can be obtained easily with a simple `Mathematica` program. We have in a obvious notation for $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ processes

$$J_{u_1 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.98)$$

$$J_{u_1 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.99)$$

$$J_{v_1 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.100)$$

$$J_{v_1 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.101)$$

$$J_{u_2 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.102)$$

$$J_{u_2 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.103)$$

$$J_{v_2 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.104)$$

$$J_{v_2 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.105)$$

4.7.3 Final result for Bhabha scattering

The general amplitude for Bhabha scattering can then be written in the form

$$\mathcal{M}(h_1, h_2; h_3, h_4) = -\frac{e^2}{s} J_{u_1 v_2}(h_1, h_2) \cdot J_{u_3 v_4}(h_3, h_4) + \frac{e^2}{t} J_{u_1 u_3}(h_1, h_3) \cdot J_{v_2 v_4}(h_2, h_4) \quad (4.106)$$

Summing the six non-zero helicity amplitudes we get finally

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right] \quad (4.107)$$

$$= 2e^4 \left[\frac{1 + \cos^4(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{2 \cos^4(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right] \quad (4.108)$$

where

$$t = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) = -s \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad u = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) = -s \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.109)$$

4.7.4 u-channel Amplitudes

To be able to calculate all the processes with electrons and positrons we also need the u-channel amplitudes. These are,

$$J_{u_1 u_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.110)$$

$$J_{u_1 u_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.111)$$

$$J_{u_2 u_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.112)$$

$$J_{u_2 u_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.113)$$

$$J_{v_1 v_4}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.114)$$

$$J_{v_1 v_4}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.115)$$

$$J_{v_2 v_3}(\uparrow, \uparrow) = \sqrt{s} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.116)$$

$$J_{v_2 v_3}(\downarrow, \downarrow) = \sqrt{s} \left(-\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (4.117)$$

4.8 Produção de hádrões em colisões $e^- + e^+$

4.8.1 Hadronização

Na colisão $e^- + e^+$ podemos produzir um grande número de estados finais: $e^- + e^+$ (Bhabha), $\mu^- + \mu^+$, $\gamma + \gamma$ e em geral qualquer par de fermiões $f\bar{f}$. Podemos portanto ter também a produção de pares quark-antiquark, $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$. Se as energias foram baixas isso ocorre através do diagrama de QED indicado na Fig 4.14 Como os quarks não são estados livres (confinamento), quando estão a distâncias

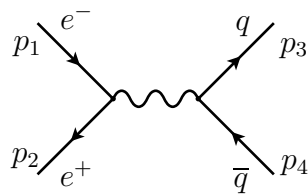


Figura 4.14: Difusão $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$.

da ordem da dimensão dos hádrões ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) a interação forte vai produzir muitos novos pares $q\bar{q}$ e glúões que finalmente se combinam para produzir os hádrões que são medidos no detetor. Este processo chama-se hadronização e está representado na Fig. 4.15 Quando estes acontecimentos são observados nos dete-

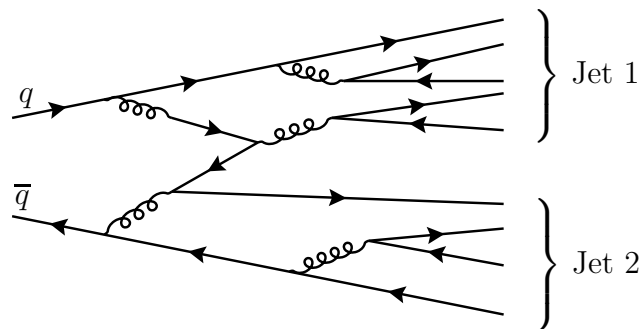


Figura 4.15: Processo de Hadronização

tores eles mantêm a memória do acontecimento original e aparecem como dois jatos de partículas que aparecem em sentidos opostos (*back-to-back*) e apontando para as direções dos quarks iniciais que lhes deram origem, como representado no lado esquerdo da Fig. 4.16. Por vezes parecem acontecimentos com três jatos que podem ser interpretados como resultado da hadronização do glúão, um processo de ordem mais elevada, desde que esse glúão leve uma percentagem significativa da energia, como representado na Fig. 4.17. De facto a observação deste acontecimentos são uma prova experimental da existência dos glúões, os portadores da força forte na chamada Cromodinâmica Quântica (QCD).

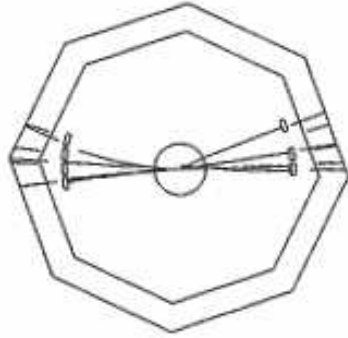


Fig. 8.2 A typical two-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

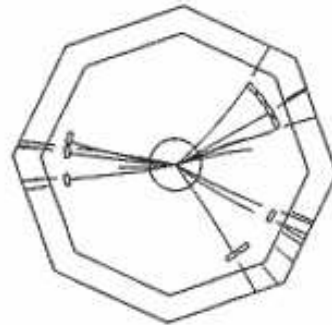


Fig. 8.3 A three-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

Figura 4.16: Acontecimentos com dois e três jets.

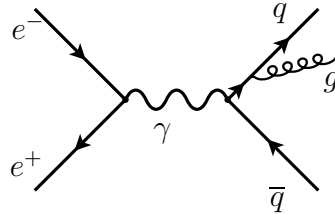


Figura 4.17: Processo elementar com emissão dum glúão

4.8.2 Processo elementar

Apesar de todas as complicações anteriores o processo elementar que está na base de todas estas considerações é um processo simples em QED (desde que as energias sejam tais que $\sqrt{s} \ll M_Z$),

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \quad (4.118)$$

que corresponde ao diagrama da Fig. 4.14. A amplitude é então

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] \quad (4.119)$$

onde Q_q é a carga do quark em unidades de e , isto é, $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$. Usando o truque de Casimir obtemos para a amplitude não polarizada, isto é, somando todos os spins finais e fazendo a média sobre os spins iniciais,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_q) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_q) \gamma_\nu] \quad (4.120)$$

onde $s = (p_1 + p_2)^2$. Usando os teoremas dos traços podemos obter,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 8 \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)]$$

$$\begin{aligned}
& +m_e^2(p_3 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2m_q^2] \\
= & Q_q^2 e^4 \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (4.121)
\end{aligned}$$

onde usámos a cinemática para obter

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_e), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_e) \\
p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_q \sin \theta, 0, \beta_q \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_q \sin \theta, 0, -\beta_q \cos \theta) \\
\beta_e &= \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \quad (4.122)
\end{aligned}$$

onde β_e, β_q são as velocidades do electrão e do quark no referencial do CM, respetivamente. Usando a Eq. (2.39) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_q}{\beta_e} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\
&= \frac{Q_q^2 e^4}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \quad (4.123)
\end{aligned}$$

A secção eficaz obtém-se fazendo a integração final nas variáveis angulares com o resultado

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[1 + \frac{2m_q^2}{s} \right] \quad (4.124)$$

Notar nesta equação o limiar de produção. A energia no CM tem de ser maior que duas vezes a massa do quark para a reação ter lugar, isto é, $\sqrt{s} > 2m_q$ assegurando que as raízes quadradas são bem definidas. Quando $\sqrt{s} \gg m_e, m_q$ a expressão simplifica-se enormemente para dar,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \quad (4.125)$$

4.8.3 A razão R

Quando começamos com uma energia do feixe mínima para aparecer o primeiro par de quarks e começamos a aumentar essa energia vamos passando os diferentes limiares de produção para as diferentes espécies de leptões e quarks. Este efeito pode ser descrito duma forma muito conveniente definindo a razão R ,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \quad (4.126)$$

Se usamos a expressão aproximada na Eq. (4.125) devemos obter

$$R(\sqrt{s}) = 3 \sum_i Q_i^2 \tag{4.127}$$

onde a soma é sobre todos os quarks tais que $\sqrt{s} > 2m_q$. O fator 3 vem porque cada quark aparece em 3 cores. Assim se estivermos a uma energia onde só podem ser produzidos os quarks u, d, s temos

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = 2 \tag{4.128}$$

Acima do limiar de produção do quarks c devemos ter

$$R = 2 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33 \tag{4.129}$$

e acima do limiar do b

$$R = \frac{10}{3} + 3 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67 \tag{4.130}$$

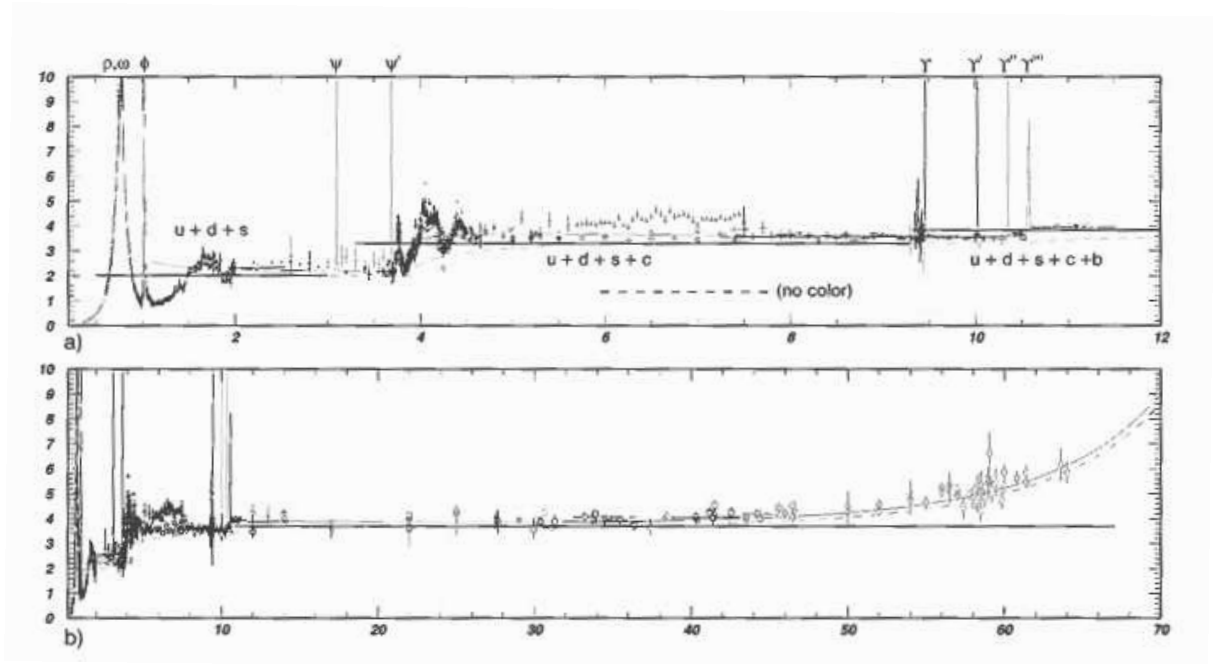


Figura 4.18: Gráfico de R baseado em dados experimentais. Tirado do Griffiths.

Se houve energia suficiente para produzir o quark top tínhamos $R = 5$. Temos assim um efeito de escada em que há medida que a energia aumenta o R vai subindo a escada.

Como compara isto com a experiência? Vemos na Fig. 4.18 o gráfico de R baseado em dados experimentais. Vemos que o andamento em patamares se confirma, incluindo o fator 3 da cor. No entanto há zonas de ressonâncias que não são explicadas pelo argumento acima. Quando a reação tem a energia exata podem ser produzidos estados ligados quark-antiquark que aparecem como ressonâncias na figura: $\rho, \omega, \phi, \psi, \dots$. Mas se excluirmos estas ressonâncias o andamento geral confirma os cálculos e em particular constitui uma demonstração experimental da existência de tripletos de cor, a base para a construção da Cromodinâmica Quântica, a teoria das interações fortes. Voltaremos a esta teoria depois de vermos as teorias de gauge no capítulo 6.

Problemas capítulo 4

4.1 Considere os processos em QED:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma, \quad e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-, \quad \gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+ \quad (4.131)$$

- Desenhe os diagramas de Feynman para cada um destes processos.
- Escreva as respectivas amplitudes.

4.2 Utilize as expressões explícitas dos spinores u e v , Eq. (3.79) e Eq. (3.80) para mostrar as seguintes propriedades

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = \bar{v}(p, s)v(p, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (4.132)$$

$$u^\dagger(p, s)u(p, s') = -v^\dagger(p, s)v(p, s') = 2E\delta_{ss'} \quad (4.133)$$

$$\sum_s u(p, s)_\alpha \bar{u}(p, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (4.134)$$

$$\sum_s v(p, s)_\alpha \bar{v}(p, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (4.135)$$

4.3 Considere o processo $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$. Defina as variáveis de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (4.136)$$

Mostre que satisfazem a relação

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (4.137)$$

isto é, só duas delas são independentes.

4.4 Evaluate the differential cross section for Bhabha scattering: $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$. Do not forget that there is a minus sign between the two diagrams.

4.5 Evaluate the differential cross section for $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$, Möller scattering. Do not forget that there is a minus sign between the two diagrams.

4.6 Para entender a Eq. (4.34), veja o Complemento 4.1 de *Introdução à Teoria de Campo* [2].