

Capítulo 2

Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos

Seguimos aqui essencialmente o capítulo 6 do Griffiths [1] mas com $\hbar = c = 1$.

2.1 Introdução

Como vimos nas aulas anteriores há dois conceitos fundamentais para o estudo das propriedades das partículas elementares e das suas interações, a largura de decaimento e a secção eficaz de difusão. Estes conceitos básicos já foram introduzidos num contexto de mecânica quântica não relativista, mas na quase totalidade das experiências em física de partículas as velocidades são muito perto da velocidade da luz e portanto precisamos das expressões relativistas.

O procedimento para calcular as taxas de transição envolvidas nos decaimentos e secções eficazes é tradicionalmente designado pela regra de ouro de Fermi. Nós aqui precisamos da regra para a cinemática relativista e vamos dá-la sem demonstração, procurando compreender o seu significado através de exemplos. Para uma dedução no âmbito de QED ver por exemplo o meu texto *Introdução à Teoria de Campo* [2].

2.2 Sistema de unidades naturais

Em física de partículas tratamos de grandezas à escala sub-atômica, para as quais o sistema internacional (SI) não é bem adaptado. Assim faz sentido escolher um sistema de unidades mais adaptado a estas escalas, o chamado sistema de unidades naturais. Neste sistema as unidades [Kg,m,s] são substituídas por [\hbar, c, GeV], onde $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-10} \text{ J}$, é uma unidade de energia.

No sistema de unidades naturais é usual fazer uma simplificação adicional, escolhendo $\hbar = c = 1$, complementado com $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ (notar que $c = 1$ implica $\epsilon_0\mu_0 = 1$). Assim só há uma unidade independente, a energia. Por vezes, em vez da energia usa-se também a distância ou o tempo, sendo a conversão feita usando as

18 Capítulo 2. Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos

relações:

$$1 = c = 2.999792 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \rightarrow 1 \text{ s} = 2.999792 \times 10^8 \text{ m} \quad (2.1)$$

$$1 = \hbar c = 197.327 \text{ MeV.fermi} \rightarrow 1 \text{ MeV}^{-1} = 197.327 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (2.2)$$

$$1 = \hbar = 1.054571 \times 10^{-34} \text{ Js} \rightarrow 1 \text{ J.s} = 9.482529 \times 10^{33} \quad (2.3)$$

Como exemplo, vamos escrever as várias unidades em termos da energia. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 5.067730 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ s} &= 1.520214 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ Kg} &= \frac{1 \text{ J.s}}{1 \text{ m}^2 \times 1 \text{ s}^{-1}} = \frac{1 \text{ J.s} \times 1 \text{ s}}{1 \text{ m}^2} = 5.613088 \times 10^{29} \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Particularmente úteis são as relações:

$$\begin{aligned} 1 \text{ s}^{-1} &= 6.578023 \times 10^{-22} \text{ MeV} \\ 1 \text{ barn} &= 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.568189 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ pb} &= 2.568189 \times 10^{-15} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ MeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^{14} \text{ pb} \\ 1 \text{ GeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^8 \text{ pb} \\ 1 \text{ eV}^{-2} &= 1.5202 \times 10^{15} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Poderia parecer que ao fazer $\hbar = c = 1$ se perde informação. No entanto é sempre possível voltar atrás e re-introduzir estas constantes. Tomemos como exemplo a secção eficaz $e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+$ em QED (isto é a baixas energias). No limite em que se desprezam as massas o resultado é

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \text{ GeV}^{-2} \quad (2.6)$$

onde s é o quadrado da energia no centro de massa e $\alpha = 1/137.032 \dots$, é a constante de estrutura fina. Se quisermos voltar para o sistema SI, usamos o facto de que uma secção eficaz tem as dimensões duma área. Então

$$\begin{aligned} L^2 &= (ML^2T^{-2})^{-2} \hbar^\beta c^\gamma \\ &= M^{-2} L^{-4} T^4 (ML^2T^{-1})^\beta (LT^{-1})^\gamma \\ &= M^{-2+\beta} L^{-4+2\beta+\gamma} T^{4-2\beta-\gamma} , \end{aligned} \quad (2.7)$$

que tem como solução, $\beta = 2, \gamma = 2$ e portanto a expressão correta, do ponto de vista dimensional, seria

$$\sigma = \frac{4\pi\hbar^2 c^2 \alpha^2}{s} . \quad (2.8)$$

2.3 A regra de ouro para os decaimentos

Consideremos a partícula 1, com massa m_1 , que no seu referencial próprio decai em várias outras partículas,

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n \quad (2.9)$$

Então a fórmula para a largura de decaimento Γ é,

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2m_1}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}}_D \quad (2.10)$$

Vamos explicar sucessivamente cada um dos fatores

A) *Estado inicial*

Este fator só depende do estado inicial através da massa da partícula que decai.

B) *Fator de simetria*

Para evitar contagens múltiplas, quando há partículas idênticas é preciso multiplicar por um fator $1/s!$ para cada conjunto de partículas idênticas, onde s é o número de partículas dessa espécie. Por exemplo para o decaimento $a \rightarrow b + b + c + c + c$, o fator será

$$S = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{3!} \quad (2.11)$$

C) *Amplitude quadrada*

A dinâmica está contida neste fator. Veremos como obtê-lo a partir das regras de Feynman.

D) *Estado final*

Este fator é o espaço de fases do estado final. A conservação de energia-momento é assegurada pela função delta, e as partículas estão na camada de massa (*on-shell* em inglês), satisfazendo $p_j^2 = m_j^2$. Nesta forma é claro que este fator é invariante de Lorentz e isto é importante em cálculos práticos. Pode-se usar a função $\delta(p_j^2 - m_j^2)\theta(p_j^0)$ para fazer uma das integrações e escrever o resultado na forma mais habitual,

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2m_1}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.12)$$

onde, depois da integração as partículas finais estão on-shell com $p_j^0 > 0$.

Exemplo 2.1 Deduza a Eq. (2.12) a partir da definição, Eq. (2.10).

Para isso é preciso recordar que

$$\delta(f(x)) = \sum_i^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}} \quad (2.13)$$

onde x_i são os zeros de $f(x)$. Assim

$$\delta(p^2 - m^2) = \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2) \quad (2.14)$$

$$= \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) + \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \quad (2.15)$$

onde $p^0 \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$. Portanto

$$\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2) = \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \quad (2.16)$$

o que torna o resultado trivial usando agora,

$$d^4p = dp^0 d^3p \quad (2.17)$$

onde fazemos um abuso de notação. De facto $d^3p = d^3\vec{p}$

2.3.1 Dimensões de Γ e de \mathcal{M}

A largura de decaimento foi definida como o inverso do tempo de vida média, portanto tem as dimensões de s^{-1} . No sistema de unidades naturais tem portanto as dimensões de massa ou energia. Usando esta informação podemos obter que as dimensões da amplitude são

$$[\mathcal{M}] = (\text{massa})^{4-n} \quad (2.18)$$

onde n é o número total de partículas do processo.

Exemplo 2.2 Mostre a Eq. (2.18)

Para isso comece por mostrar que

$$[A] = \left[\frac{1}{2m_1} \right] = (\text{massa})^{-1} \quad (2.19)$$

e que

$$[D] = (\text{massa})^{2n-6} \quad (2.20)$$

Usando as Eqs. (2.19) e (2.20) obtemos então a Eq. (2.18).

2.3.2 Decaimentos para duas partículas

Para decaimentos com duas partículas no estado final as integrações podem ser feitas até ao fim e o resultado é particularmente simples¹.

De facto da Eq. (2.12) obtemos,

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{2m_1} S \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_3}{p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta \left(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2} \right) \frac{d^3 p_2}{p_2^0 p_3^0}\end{aligned}\quad (2.21)$$

onde fizemos a integração em \vec{p}_3 , da qual resultou $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Como anteriormente, $p_i^0 = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2}$. Para prosseguir usamos coordenadas esféricas no espaço dos momentos, isto é,

$$d^3 p_2 = d\Omega_2 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \quad (2.22)$$

Nas nossas hipótese \mathcal{M} não depende dos ângulos e a integração nas variáveis angulares da partícula 2 podem ser feitas dando 4π . Obtemos então,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi m_1} \int d|\vec{p}_2| |\vec{p}_2|^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2})}{p_2^0 p_3^0} \quad (2.23)$$

Usando agora,

$$\delta(m_1 - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2}) = \frac{\delta(|\vec{p}_2| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0} + \frac{|\vec{p}_2|}{p_3^0}} \quad (2.24)$$

obtemos finalmente,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi m_1^2} |\vec{p}_2| |\mathcal{M}|^2 \quad (2.25)$$

2.4 A regra de ouro para as secções eficazes

Consideremos que temos a colisão

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (2.26)$$

A regra de ouro para a secção eficaz é então,

$$\sigma = \underbrace{\frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.27)$$

¹Estamos a supor que somamos sobre todos os spins do estado final e fazemos médias sobre os spins do estado inicial. Assim a amplitude só pode depender dos produtos internos do 3 quadri-vetores e estes podem sempre ser escritos em termos das massas, não envolvendo ângulos.

A explicação dos termos B, C e D é a mesma que anteriormente. O único termos novo é

A) Estado inicial

Este fator tem que ver com o fluxo do feixe incidente e a densidade de partículas no alvo. A vantagem de escrever a secção eficaz como na Eq. (2.27), reside no facto de cada termo ser invariante de Lorentz para transformações ao longo do eixo do processo. Isto quer dizer em particular que se deve obter a mesma secção eficaz total no referencial do Laboratório e no referencial do CM.

Exemplo 2.3 *Mostre que as dimensões de \mathcal{M} continuam a ser as da Eq. (2.18). Para isso comece por mostrar que a secção eficaz (uma área) é*

$$[\sigma] = (\text{massa})^{-2} \quad (2.28)$$

e que agora o termo do estado inicial vem também

$$[A] = (\text{massa})^{-2} \quad (2.29)$$

notando que agora

$$[D] = (\text{massa})^{2n-8} \quad (2.30)$$

obtemos a Eq. (2.18).

2.4.1 Colisões $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no CM

A colisão mais simples é a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Mas mesmo neste caso não é possível em geral fazer as integrações até ao fim sem saber a amplitude \mathcal{M} . A razão é que com 4 quadri-momentos não é possível exprimir todos os invariantes em termos das massas das partículas ou da energia total no centro de massa (\sqrt{s}). Mas é possível levar as integrações bastante longe deixando só uma integração nas variáveis angulares duma das partículas. Por simplicidade vamos mostrar isto no CM.

Consideremos então o processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no referencial CM. É conveniente usar a variável de Mandelstam s , definida por²,

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad (2.31)$$

Expandindo

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (2.32)$$

e portanto

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (s - m_1^2 - m_2^2) \quad (2.33)$$

²Estou aqui a usar as convenções usuais em física de partículas e em particular do livro recomendado do Thomson [5] onde \sqrt{s} é uma energia. Esta convenção difere do Griffiths [1], onde s tem as dimensões dum quadrado duma massa.

o que permite escrever

$$4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = 4\sqrt{s} |\vec{p}_1| \quad (2.34)$$

Exemplo 2.4 *Mostre a Eq. (2.34)*

Sabendo que

$$|\vec{p}_1|^2 = E_1^2 - m_1^2 = \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 - m_1^2 \quad (2.35)$$

obtemos

$$\begin{aligned} s|\vec{p}_1|^2 &= \frac{1}{4} \left[(s + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4sm_1^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{4} (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right] \\ &= (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde resulta a Eq. (2.34)

Obtemos então

$$\sigma = \frac{S}{64\pi^2 \sqrt{s} |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{p_3^0} \frac{d^3 p_4}{p_4^0} \quad (2.37)$$

Começamos por fazer a integração em \vec{p}_4 ,

$$\sigma = \frac{S}{64\pi^2 \sqrt{s} |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2}) \frac{d^3 p_3}{p_3^0 p_4^0} \quad (2.38)$$

Agora introduzimos coordenadas esféricas para o momento \vec{p}_3 . Os ângulos θ e ϕ são os ângulos de difusão da partícula 3 em relação à partícula 1. Escrevemos então a secção eficaz diferencial,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{S}{64\pi^2 \sqrt{s} |\vec{p}_1|} \int \frac{d|\vec{p}_3| |\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2}) \\ &= \frac{S}{64\pi^2 \sqrt{s} |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{d|\vec{p}_3| |\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0} + \frac{|\vec{p}_3|}{p_4^0}} \\ &= \frac{S}{64\pi^2 \sqrt{s} |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0 + p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{S}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

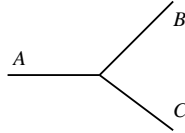
Para continuar temos de saber a forma explícita de \mathcal{M} , pois em geral depende dos ângulos de difusão.

2.5 Regras de Feynman para um modelo sem spin

Para prosseguir é necessário especificar as regras para calcular a amplitude \mathcal{M} . Para cada teoria as interações serão diferentes e algumas das regras são também diferentes. No entanto grande parte delas não depende da teoria. Assim antes de vermos casos mais complicados de partículas com spin vamos pensar num modelo com 3 tipos de partículas escalares neutras: A, B e C . Admitimos que têm massas tais que

$$m_A > m_B + m_C \tag{2.40}$$

de tal forma que A pode decair em $B + C$. O modelo tem uma única interação representada pelo diagrama, dito de Feynman,



com interação dada através duma constante g que nesta teoria tem as dimensões de momento. Com esta interação temos por exemplo a colisão $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa dada pelos diagramas da Fig. 2.1. Notar que há dois diagramas pois ambos os processos são indistinguíveis e devem portanto ser somados. Para a

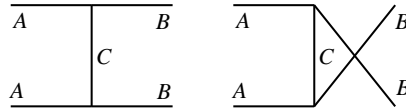


Figura 2.1: Processo $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa.

colisão $A + B \rightarrow A + B$ temos os diagramas da Fig. 2.2. Estes processos, em ordem

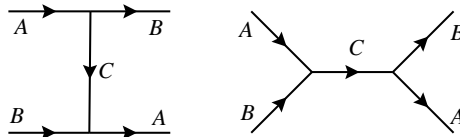


Figura 2.2: Processo $A + B \rightarrow A + B$ em ordem mais baixa.

mais baixa, designam-se por processos ao nível árvore (*tree level* em inglês) devido à sua estrutura ramificada. Os processos em ordem superior ocorrem com malhas fechadas (*loops* em inglês) como os indicados para as correções ao vértice indicadas na Fig. 2.3. No espírito da teoria das perturbações estas correções sendo de ordem g^3 devem ser mais pequenas do que as de ordem mais baixa e portanto em primeira aproximação desprezáveis.

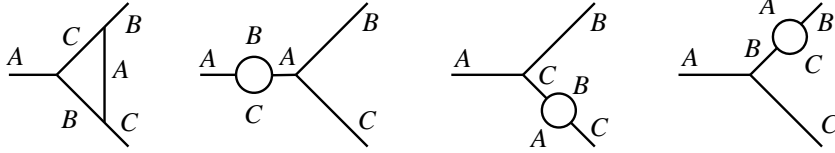


Figura 2.3: Correções a 1 loop ao vértice.

Vamos então enunciar as regras de Feynman. Designamos então por p_1, \dots, p_n os momentos que entram e saiam do diagrama e por q_1, \dots, q_n os momentos internos. Nas regras enunciadas abaixo, eu afasto-me do Griffiths pois o uso dele das funções delta, embora correto, é complicado e não é necessário. Assim eu exijo conservação de quadri-momento em cada vértice, o que para os diagramas ao nível árvore determina completamente todos os quadri-momentos. Para diagramas a 1 loop é fácil de ver que falta especificar um momento, que eu designo por q , para dois loops dois momentos q_1, q_2 e assim sucessivamente.

1. Desenhe todas as maneiras distintas de ligar o estado inicial ao estado final numa dada ordem da interação. Notar que de acordo com as regras da mecânica quântica se houver mais do que um diagrama as amplitudes têm de ser somadas.
2. Por cada vértice multiplique pelo fator

$$-i g \quad (2.41)$$

que nesta teoria tem as dimensões duma massa $\times c$.

3. Por cada linha interna com momento q multiplique por

$$\frac{i}{q^2 - m^2} \quad (2.42)$$

designado por propagador. A massa m é a massa da partícula que está associada a essa linha. Note que $q^2 \neq m^2$, isto é as partículas não estão na camada de massa.

4. Como explicado acima aplique conservação de energia-momento em cada vértice
5. Por cada loop escolha um momento q para uma linha interna qualquer e multiplique pelo fator

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (2.43)$$

Os momentos de cada linha ficam então determinados por conservação de energia momento em cada vértice.

6. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i \mathcal{M}$, por isso para obter \mathcal{M} multiplique o resultado final por i .

2.5.1 Tempo de vida média de A

Como a partícula A decai, podemos calcular o seu tempo de vida média. O diagrama de Feynman coincide com a definição do vértice. A aplicação das regras de Feynman

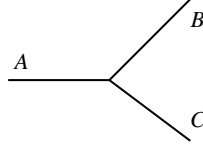


Figura 2.4: Decaimento $A \rightarrow B + C$ em ordem mais baixa.

dá neste caso

$$\mathcal{M} = g \quad (2.44)$$

Podemos usar agora a expressão da largura de decaimento, Eq. (2.25), para obter

$$\Gamma = \frac{g^2 |\vec{p}|}{8\pi m_A^2 c} \quad (2.45)$$

e obter para o tempo de vida média,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi m_A^2 c}{g^2 |\vec{p}|} \quad (2.46)$$

onde

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.47)$$

2.5.2 Colisão $A + A \rightarrow B + B$

Consideremos a cinemática da Fig. 2.5 A conservação de energia momento diz-nos

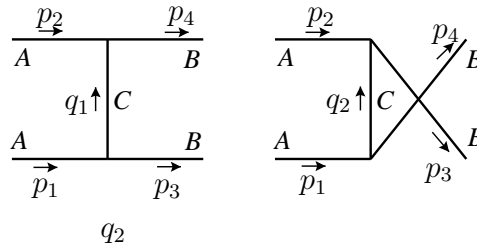


Figura 2.5: Cinemática para o processo $A + A \rightarrow B + B$.

que

$$q_1 = p_1 - p_3, \quad q_2 = p_1 - p_4 \quad (2.48)$$

e a aplicação das regras de Feynman dá

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2} + \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2} \\ &= \frac{g^2}{t - m_C^2} + \frac{g^2}{u - m_C^2}\end{aligned}\quad (2.49)$$

onde na última passagem usámos as variáveis de Mandelstam. Por esta razão estes diagramas costumam ser designados por canal t e canal u , respetivamente. Introduzindo esta expressão na secção eficaz diferencial, Eq. (2.39), obtemos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{g^4}{64\pi^2 s c^6} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \left[\frac{1}{t - m_C^2} + \frac{1}{u - m_C^2} \right]^2 \quad (2.50)$$

Para prosseguir devíamos escrever t e u em termos dos ângulos de difusão no CM,

$$\begin{aligned}t &= (p_1 - p_3)^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2E_1 E_3 (1 - \beta_3 \beta_1 \cos \theta) \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2E_1 E_4 (1 + \beta_4 \beta_1 \cos \theta)\end{aligned}\quad (2.51)$$

onde β_i são as velocidades das partículas no CM, e θ é o ângulo de difusão entre a partícula 1 e 3. Notar que $E_3 = E_4$ e $\beta_3 = \beta_4$ pois têm a mesma massa. Notar ainda na Eq. (2.50), o fator $S = 1/2$ pois há duas partículas idênticas no estado final.

2.5.3 Processos de ordem superior

Os exemplos que vimos foram de processos em ordem mais baixa. Quando se pretende ir para as ordens seguintes de teorias de perturbação, os problemas aparecem. Não vamos aqui explicar em detalhe como eles são resolvidos, mas vamos dar um caso simples para vermos que tipo de problemas aparecem.

Para exemplificar vamos considerar as correções ao propagador da partícula A , também designada por *self-energy*. O diagrama de Feynman correspondente é mostrado na Fig. 2.6. Aplicando as regras de Feynman, obtemos para a amplitude,

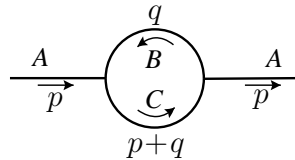


Figura 2.6: Self-energy da partícula A

$$\mathcal{M} = i g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - m_B^2][(p+q)^2 - m_C^2]} \quad (2.52)$$

28 Capítulo 2. Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos

As integrações são feitas de $-\infty$ a $+\infty$. Imediatamente vemos que há problemas pois para q grande o integral diverge logaritmicamente,

$$\int q^3 dq \frac{1}{q^4} = \int \frac{dq}{q} = \infty \quad (2.53)$$

Este problema levou mais de 30 anos a ser compreendido e resolvido através do procedimento chamado de renormalização. O estudo deste procedimento está para além deste curso introdutório, mas podemos dizer que o problema foi resolvido numa forma completamente satisfatória, produzindo a teoria renormalizada resultados comparáveis com sucesso com a experiência. Para uma explicação do procedimento em QED ver Ref. [2].

Problemas capítulo 2

2.1 O tempo de vida média τ duma partícula instável (que decai noutra) é definido como o tempo ao fim do qual o número de partículas é reduzido a $1/e$ do seu valor inicial, ou seja

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

onde N_0 é o número de partículas no instante inicial e τ é referido ao referencial no qual a partícula se encontra em repouso. Sabendo que os piões carregados têm $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}$ s e $m_\pi = 140$ MeV calcule:

- O fator γ para um feixe de piões de 200 GeV.
- O tempo de vida média no referencial do Laboratório.
- Calcule a percentagem de piões que decaiu ao fim de percorrerem 300 m no Laboratório. Se não houvesse dilatação no tempo qual seria a percentagem ao fim da mesma distância?

2.2 Considere o decaimento $A \rightarrow B+C$ na teoria descrita na secção 2.5. Mostre que no referencial em que a partícula que decai está em repouso, o módulo do momento de cada uma das partículas no estado final é dado pela Eq. (2.47),

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.54)$$

2.3 Considere a colisão $1+2 \rightarrow 3+4$ no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Considere ainda que as partículas 3 e 4 não têm massa. Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3| |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| (E_1 + m_2) - |\vec{p}_1| c \cos \theta} \quad (2.55)$$

2.4 Considere a colisão $1+2 \rightarrow 3+4$, no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3|^2 |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| |(E_1 + m_2) |\vec{p}_3| - |\vec{p}_1| E_3 \cos \theta} \quad (2.56)$$

30 Capítulo 2. Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos

2.5 Nas condições do problema 2.4 os dados do problema são as massas das partículas e a energia do feixe incidente (partícula 1) no referencial do laboratório. (**Nota:** Neste problema considere $\hbar = c = 1$)

- a) Mostre que o momento $|\vec{p}_3|$ no lab se obtém resolvendo a equação

$$p_{3\text{Lab}} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.57)$$

com

$$\begin{aligned} A &= 4(E_1 + m_2)^2 - 4p_{1\text{Lab}}^2 \cos^2 \theta \\ B &= 2p_{1\text{Lab}} \cos \theta [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2] \\ C &= 4m_3^2 (E_1 + m_2)^2 - [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2]^2 \\ p_{1\text{Lab}}^2 &= E_1^2 - m_1^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Qual o significado dos sinais \pm na Eq. (2.57)?

Sugestão: Veja a secção 3.6 e o problema 3.8 da Ref. [2].

- b) Considere agora que $m_1 = m_3 = 2$ GeV, $m_2 = m_4 = 5$ GeV. Considere ainda que $E_1 \in [100, 1000]$ GeV. Faça um gráfico da secção eficaz no referencial do lab e no referencial do CM e confirme numericamente que conduzem ao mesmo resultado.

2.6 Considere no quadro da teoria ABC, descrita na secção 2.5, o processo

$$A + B \rightarrow A + B \quad (2.59)$$

Em ordem mais baixa os diagramas são os indicados na Fig. 2.2.

- a) Calcule a amplitude \mathcal{M} .
 b) Escreva a expressão para a secção eficaz diferencial no referencial do centro de massa.

2.7 Considere o processo $A + A \rightarrow A + A$.

- a) Desenhe todos os diagramas (seis) que contribuem em ordem mais baixa.
 b) Assumindo $m_B = m_C = 0$ encontre a amplitude para este processo. Deixe o resultado na forma de integral.