



TÉCNICO LISBOA

Física de Partículas

(Versão de 2013-2014)

Jorge Crispim Romão

Departamento de Física
2013

Conteúdo

1	Breve Revisão de Mecânica Quântica	1
1.1	Princípios básicos da mecânica quântica	1
1.2	A equação de Schrödinger	3
1.3	O átomo de hidrogénio	4
1.3.1	A equação de Schrödinger para o átomo de hidrogénio	4
1.3.2	Significado físico dos resultados	6
1.3.3	As funções de onda atómicas	7
1.3.4	Propriedades das funções de onda atómicas	8
1.3.5	O spin	10
1.3.6	Adição de momentos angulares	11
1.3.7	Estrutura fina	12
1.3.8	Desdobramento de Lamb	13
1.3.9	Desdobramento hiperfino	14
	Problemas Capítulo 1	15
2	Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos	17
2.1	Introdução	17
2.2	A regra de ouro para os decaimentos	17
2.2.1	Dimensões de Γ e de \mathcal{M}	19
2.2.2	Decaimentos para duas partículas	19
2.3	A regra de ouro para as secções eficazes	20
2.3.1	Colisões $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no CM	21
2.4	Regras de Feynman para um modelo sem spin	22
2.4.1	Tempo de vida média de A	24
2.4.2	Colisão $A + A \rightarrow B + B$	25
2.4.3	Processos de ordem superior	26
	Problemas Capítulo 2	28
3	Grupos e Simetrias	31
3.1	Simetrias, grupos e leis de conservação	31
3.2	Momento angular	34
3.3	Spin $1/2$	35
3.3.1	Rotação de spinores	37

3.4	Adição de momentos angulares	37
3.5	Simetrias internas	38
3.6	Simetrias discretas	39
3.6.1	Paridade	39
3.6.2	Conjugação de carga	41
3.6.3	Violação de CP	42
3.6.4	Inversão no tempo e o teorema TCP	42
	Problemas Capítulo 3	43
4	Equações de Klein-Gordon e Dirac	45
4.1	A equação de Klein-Gordon.	45
4.2	A equação de Dirac	47
	Complemento 4.1 Tensores simétricos e anti-simétricos	48
4.3	Soluções para a partícula livre	51
4.3.1	Sistema de unidades $\hbar = c = 1$	51
4.3.2	Soluções da equação de Dirac no referencial próprio	52
4.3.3	Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$	53
4.4	Covariância da equação de Dirac	56
4.4.1	Transformações de spinores	56
4.4.2	Adjunto de Dirac	57
4.4.3	Covariantes bilineares	58
4.5	Interpretação das soluções de energia negativa	59
4.6	Conjugação de carga	61
	Problemas Capítulo 4	63
5	Teoria Quântica dos Campos e Diagramas de Feynman	69
5.1	O fóton	69
5.2	A eletrodinâmica quântica (QED)	71
5.3	Regras de Feynman para QED	72
5.4	Exemplos	74
5.4.1	Colisão elástica elétron-muão	74
5.4.2	Colisão elástica elétron-positrão	75
5.4.3	Efeito de Compton	75
5.5	O truque de Casimir	76
5.5.1	Teoremas de traços de matrizes γ	77
5.5.2	Difusão Bhabha	79
5.5.3	Efeito de Compton	80
5.6	Produção de hádrões em colisões $e^- + e^+$	81
5.6.1	Hadronização	81
5.6.2	Processo elementar	82
5.6.3	A razão R	84
	Problemas Capítulo 5	86

6	As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A	89
6.1	A teoria de Fermi	89
6.2	A teoria V-A	91
6.2.1	Introdução	91
6.2.2	Violação de paridade nas interações fracas	91
6.2.3	Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica	92
6.2.4	A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann	94
6.3	As interações fracas dos hadrões	96
6.3.1	Universalidade e a teoria de Cabibbo	96
6.3.2	O mecanismo de GIM e a descoberta do charm	99
6.4	A hipótese do bóson vetorial intermédio	101
6.5	Problemas com a teoria corrente-corrente	103
6.5.1	Violação da unitariedade na interação de Fermi	103
6.5.2	Violação de unitariedade no modelo IVB	104
	Problemas Capítulo 6	107
7	Invariância de Gauge	109
7.1	Lagrangeanos em mecânica clássica	109
7.2	Lagrangeanos em teoria de campo	110
7.3	Invariância de gauge. O eletromagnetismo	112
7.4	Teorias de Yang-Mills	115
7.5	Regras de Feynman para a teoria de gauge	119
7.5.1	Propagadores	119
7.5.2	Vértices	119
	Problemas Capítulo 7	121
8	Quebra Espontânea de Simetria: Mecanismo de Higgs	125
8.1	Introdução	125
8.2	O teorema de Goldstone	132
8.3	O mecanismo de Higgs	136
	Problemas Capítulo 8	143
9	O Modelo Standard Eletrofraco: $SU(2)_L \times U_Y(1)$	145
9.1	Introdução	145
9.2	O sector de gauge	146
9.3	As interações fracas dos leptões	148
9.3.1	As representações e números quânticos	149
9.3.2	As correntes carregadas	151
9.3.3	As correntes neutras	153
9.4	A introdução dos quarks	154
9.5	A massa dos Leptões	156
9.6	Exemplos	158
9.6.1	Decaimento $Z \rightarrow f\bar{f}$	158

9.6.2 Colisão $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$	160
Problemas Capítulo 9	163
10 Violação de CP e a Matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa	167
10.1 A massa dos quarks	167
10.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$	170
10.2.1 A simetria CP	170
10.2.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$	172
10.2.3 Violação de CP noutros sistemas	174
10.3 Violação de CP e a matriz CKM	174
10.3.1 A matriz CKM	174
10.3.2 Contagem de parâmetros na matriz CKM	176
10.3.3 Parametrizações da matriz CKM	177
10.3.4 Confrontado a experiência com a matriz CKM	178
Problemas Capítulo 10	179

Capítulo 1

Breve Revisão de Mecânica Quântica

Seguimos as secções 5.1 a 5.3 do Griffiths [1] e a secção 1.1 do meu texto de *Introdução à Teoria de Campo* [2]. É assumido como pré-requisito o conhecimento do essencial dos capítulos 1 a 5 do livro *Quantum Mechanics* do Griffiths [3].

1.1 Princípios básicos da mecânica quântica

A mecânica quântica [3, 4] baseia-se nos seguintes princípios:

- Para o estado físico existe uma função de estado $|\Phi\rangle$ que contém toda a informação possível sobre o sistema. Na maior parte dos casos tratemos com uma representação do estado $|\Phi\rangle$ em termos das coordenadas, a chamada função de onda $\Psi(q_i, s, t)$ onde s designa outros números quânticos para além dos possíveis de descrever a partir das coordenadas (por exemplo o spin). $|\Psi(q_i, s_i, t)|^2 \geq 0$ tem a interpretação duma densidade de probabilidade de encontrar o sistema num estado com coordenadas q_i , números quânticos internos s_i , no instante t .
- As observáveis físicas são representadas por operadores hermíticos lineares. Por exemplo

$$p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (1.1)$$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2)$$

- Um estado $|\Phi\rangle$ do sistema é um estado próprio de operador Ω se

$$\Omega |\Phi_n\rangle = \omega_n |\Phi_n\rangle \quad (1.3)$$

onde $|\Phi_n\rangle$ é o estado próprio a que corresponde o valor próprio ω_n . Se Ω for hermítico então os ω_n são reais. Na representação das *coordenadas* temos

$$\Omega(q, s, t)\Psi(q, s, t) = \omega_n \Psi(q, s, t) \quad (1.4)$$

- Existe um conjunto completo e ortonormal de funções próprias, Ψ_n , dum conjunto completo de operadores que comutam $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$. Uma função de onda arbitrária pode ser expandida em termos desse conjunto completo

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n \quad (1.5)$$

- O resultado dum medição é qualquer um dos valores próprios. Se $\Psi = \sum_n a_n \Psi_n$ com $\Omega \Psi_n = \omega_n \Psi_n$ então o resultado da medição será o valor ω_n com probabilidade $|a_n|^2$. O valor médio dum observável é dado por

$$\langle \Omega \rangle_\Psi = \sum_s \int dq_1 \dots \Psi^*(q_i, s_i, t) \Omega \Psi(q_i, s_i, t) = \sum_n |a_n|^2 \omega_n \quad (1.6)$$

- A evolução no tempo dum sistema físico é dada pela equação

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi \quad (1.7)$$

- onde o Hamiltoniano H é um operador linear e hermítico. A linearidade implica o princípio de sobreposição e a hermiticidade conduz à *conservação* de probabilidade

$$\frac{d}{dt} \sum_s \int dq_1 \dots \Psi^* \Psi = \frac{i}{\hbar} \sum_s \int dq_1 \dots [(H\Psi)^* \Psi - \Psi^* (H\Psi)] = 0 \quad (1.8)$$

Exemplo 1.1 *Demonstre a afirmação anterior.*

A equação conjugada da Eq. (1.7) é

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = H \psi^* \quad (1.9)$$

onde usámos a hermiticidade de $H = H^\dagger$. Então multiplicando a Eq. (1.9) à direita por ψ e a Eq. (1.7) à esquerda por ψ^* e subtraindo obtemos

$$-i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) = -i\hbar \frac{\partial (\psi^* \psi)}{\partial t} = (H\psi^*)\psi - \psi^* H\psi \quad (1.10)$$

Integrando nas coordenadas e somando em todas as outras variáveis internas, obtemos então

$$\frac{d}{dt} \sum_s \int dq_1 \cdots \Psi^* \Psi = \frac{i}{\hbar} \sum_s \int dq_1 \cdots [(H\Psi)^* \Psi - \Psi^* (H\Psi)] = 0 \quad (1.11)$$

onde o último passo resulta da definição de operador hermitico. Na notação de Dirac

$$\langle H\psi | \psi \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle . \quad (1.12)$$

1.2 A equação de Schrödinger

A evolução dum sistema quântico, bem como a descoberta dos seus estados estacionários, é obtida resolvendo a equação de Schrödinger, Eq. (1.7). Para sistemas a 3 dimensões a equação escreve-se

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (1.13)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.14)$$

é o operador Laplaciano.

Se $V(\vec{r})$ não depende do tempo a equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis,

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad (1.15)$$

onde $\psi(\vec{r})$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}) \quad (1.16)$$

que tem a forma duma equação aos valores próprios

$$H\psi = E\psi \quad (1.17)$$

onde ψ é a função própria do Hamiltoniano H , e E o seu valor próprio. Os estados que satisfazem a Eq. (1.15) são designados por estados estacionários com a energia E que resulta de resolver a Eq. (1.16).

Resulta que os valores para os quais a equação de Schrödinger independente do tempo tem soluções bem comportadas, isto é que satisfaçam a condição de normalização

$$\int d^3r |\Psi|^2 = 1 \quad (1.18)$$

são discretos. Para se ter uma ideia gráfica do que está a acontecer recomendo que façam o exercício 2.54 do Griffiths (Quantum Mechanics [3]).

Em muitos problemas o sistema tem simetria esférica. Nesse caso pode usar-se o resultado, válido em coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \quad (1.19)$$

onde \vec{L} é o operador momento angular, para separar ainda mais as soluções. Sabe-se que as funções próprias do operador L^2 são as harmônicas esféricas, isto é,

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.20)$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (1.21)$$

Notar que as harmônicas esféricas são funções próprias simultâneas dos operadores L_z e L^2 pois eles comutam.

Usando estes resultados, para o caso de simetria esférica $V(\vec{r}) = V(r)$, a equação de Schrödinger separa-se nas 3 variáveis r, θ e ϕ ,

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.22)$$

onde a função radial satisfaz a equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = ER \quad (1.23)$$

É por vezes conveniente escrever $R(r) = u(r)/r$. Então a função $u(r)$ satisfaz

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = Eu \quad (1.24)$$

que é uma equação para um potencial a uma dimensão aumentada pela barreira centrífuga.

1.3 O átomo de hidrogénio

1.3.1 A equação de Schrödinger para o átomo de hidrogénio

No nosso estudo simplificado vamos considerar o protão como fixo e o eletrão descrevendo um movimento em torno dele. Esta é uma boa aproximação, pois a massa do protão é cerca de 2000 vezes maior do que a do eletrão. Assim a energia potencial do eletrão no campo do protão é

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (1.25)$$

onde r é a distância entre o eletrão e o protão. Como se trata dum potencial com simetria esférica (potencial central) as soluções são da forma geral,

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.26)$$

onde a equação radial é

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2m}{\hbar^2} \left[V(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R + \frac{2mE}{\hbar^2} R = 0. \quad (1.27)$$

As harmónicas esféricas são o produto das soluções das equações para θ e ϕ

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \ell(\ell+1) \sin \theta \Theta - \frac{m_\ell^2}{\sin \theta} \Theta = 0. \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m_\ell^2, \quad (1.29)$$

convenientemente normalizadas,

$$Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \equiv N_{\ell m_\ell} P_\ell^{m_\ell}(\theta) e^{im_\ell \varphi}$$

$$N_{\ell m_\ell} = (-1)^m \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m_\ell)!}{(\ell+m_\ell)!} \right]^{1/2}, \quad (1.30)$$

onde $P_\ell^{m_\ell}(\theta)$ são os polinómios associados de Legendre e a normalização é convencional.

O problema de encontrar as soluções gerais das Eqs. (1.27) e (1.28) pode ser revisto em qualquer curso básico em mecânica quântica (por exemplo Griffiths [3]). Para os nossos fins aqui basta-nos indicar sem demonstração os resultados.

i) Quando resolvemos a Eq. (1.29) para $\Phi(\phi)$ encontramos que as únicas soluções que satisfazem as condições apropriadas são aquelas para as quais m_ℓ é inteiro,

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.31)$$

ii) Quando resolvemos a Eq. (1.28) para $\Theta(\theta)$ encontramos que as únicas soluções que são *finitas* em todo o lado (para todos os θ 's) são aquelas em que

$$\ell = 0, 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

e

$$\ell \geq |m_\ell|. \quad (1.33)$$

iii) Quando resolvemos a equação radial para $R(r)$ encontramos que as únicas soluções que são finitas em toda a parte (isto é, para $0 \leq r \leq \infty$) são aquelas para as quais

$$E_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.34)$$

e

$$\ell < n . \quad (1.35)$$

Tomando em conta as Eqs. (4.21), (1.33) e (1.35) as restrições em m_ℓ e ℓ podem ser reescritas na forma seguinte:

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell$$

$$\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1 . \quad (1.36)$$

1.3.2 Significado físico dos resultados

- O facto mais importante destes resultados, é que *a energia do átomo é quantizada*. Tal como no caso do poço de potencial infinito a quantificação não resulta duma imposição *à priori*, mas antes das exigências físicas sobre as funções de onda.
- O segundo facto é que a expressão para a energia é exatamente a encontrada no átomo de Bohr, que como vimos, embora introduzida duma forma *ad hoc*, explicava os resultados experimentais. A energia depende somente do inteiro n , chamado *número quântico principal*.
- Como para cada valor de n há vários valores admissíveis para ℓ e m_ℓ , é possível o eletrão ter características diferentes e manter a mesma energia. Os estados ψ que têm a mesma energia para valores de ℓ e m_ℓ diferentes são designados por *estados degenerados*.

$$\text{Grau de degenerescência} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{m_\ell=-\ell}^{+\ell} m_\ell = \sum_{\ell=0}^{n-1} (2\ell + 1) = n^2 . \quad (1.37)$$

- Se os diferentes estados correspondentes a um dado n têm todos a mesma energia E_n , qual é a outra grandeza física que os distingue? Se tivéssemos efetuado os cálculos em detalhe teríamos compreendido que essa grandeza é o *momento angular*. Pode-se mostrar que o *quadrado* do momento angular L^2 *i.e.*

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 , \quad (1.38)$$

e o momento angular segundo o eixo dos zz , L_z , comutam simultaneamente entre si e com o Hamiltoniano do átomo de hidrogénio, isto é

$$[L^2, L_z] = 0, \quad [L^2, H] = 0, \quad [L_z, H] = 0 , \quad (1.39)$$

Assim de acordo com os resultados gerais enunciados anteriormente, as funções de onda $\psi_{n\ell m_\ell}$ deverão ser funções próprias *simultâneas* de H, L^2 e L_z .

1.3.3 As funções de onda atómicas

Vimos que as funções de onda são da forma,

$$\psi_{nlm_\ell}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi) \quad (1.40)$$

Aqui vamos só indicar as funções para valores baixos dos números quânticos, Para as as harmónicas esféricas temos,

$$\begin{aligned} \ell = 0 \quad Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ \\ \\ \ell = 1 \quad Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{1,-1} &= -Y_{11}^* \\ Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{i2\varphi} \sin^2 \theta \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta \\ \ell = 2 \quad Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{2,-1} &= -Y_{21}^* \\ Y_{2,-2} &= Y_{22}^* \end{aligned} \quad (1.41)$$

As funções próprias correspondentes a valores próprios diferentes eram ortogonais. Para as harmónicas esféricas isto significa,

$$\int d\Omega Y_{\ell m_\ell}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'_\ell}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m_\ell m'_\ell} \quad (1.42)$$

As constantes $N_{\ell m_\ell}$ foram escolhidas para que as harmónicas estejam normalizadas a 1, isto é

$$\int d\Omega |Y_{\ell m_\ell}(\theta, \varphi)|^2 = 1 \quad (1.43)$$

Vamos agora ver a forma das soluções $R_{nl}(r)$ da equação radial, Eq. (1.27). Contenta-mo-nos com as expressões exaltas de $R_{nl}(r)$ para $n \leq 3$. Nestas expressões usamos o raio de Bohr,

$$r_0 = \frac{\hbar}{m c \alpha} = 0.53 \text{Å} , \quad (1.44)$$

onde a constante de estrutura fina α é definida por

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.04} . \quad (1.45)$$

Temos então

$$\begin{aligned} n = 1 \quad R_{10}(r) &= 2 \left(\frac{1}{r_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{r_0}} \\ R_{20}(r) &= 2 \left(\frac{1}{2r_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) e^{-\frac{r}{2r_0}} \end{aligned}$$

$n = 2$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2r_0} \right)^{3/2} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{2r_0}}$$

e

$$\begin{aligned} R_{30}(r) &= 2 \left(\frac{1}{3r_0} \right)^{3/2} \left[1 - \frac{2r}{2r_0} + \frac{2r^2}{27\alpha_0^2} \right] e^{-\frac{r}{3r_0}} \\ n = 3 \quad R_{31}(r) &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{3r_0} \right)^{3/2} \frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{6r_0} \right) e^{-\frac{r}{3r_0}} \\ R_{32}(r) &= \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{1}{3r_0} \right)^{3/2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 e^{-\frac{r}{3r_0}} \end{aligned} \quad (1.46)$$

1.3.4 Propriedades das funções de onda atômicas

As funções de onda atômicas descritas na secção anterior têm várias propriedades que vão ter um papel muito importante na interpretação física dos resultados. Vamos nesta secção estudar algumas delas.

Normalização

A função de onda do eletrão deve ser normalizada, isto é

$$\int |\psi_{n\ell m_\ell}|^2 dV = 1 . \quad (1.47)$$

No sistema de coordenadas esféricas devemos ter $dV = r^2 dr d\Omega$ com $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$. Então

$$\int |\psi_{n\ell m_\ell}|^2 dV = \int_0^\infty dr r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 \int d\Omega |Y_{\ell m_\ell}|^2 = \int_0^\infty dr r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 = 1 \quad (1.48)$$

onde se usou o facto de as harmónicas esféricas estarem normalizadas, Eq. (1.43). Assim os fatores nas Eqs. (1.46) são escolhidos para que¹

¹Ter-se normalizado independentemente $R_{n\ell}$ e $Y_{\ell m_\ell}$ é, como veremos, muito conveniente. Não era contudo necessário, pois fisicamente só a função de onda total $\psi_{n\ell m_\ell}$ tem que ser normalizada.

$$\int_0^{\infty} dr r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 = 1 . \quad (1.49)$$

Notar que daqui resulta imediatamente que $[R_{n\ell}(r)] = [\text{distância}]^{-3/2}$.

Exemplo 1.2 Verifique o resultado anterior para $R_{10}(r)$.

Usando a expressão da Eq. (1.46) para R_{10} obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dr r^2 R_{10}^2 &= 4 \left(\frac{1}{r_0} \right)^3 \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-\frac{2r}{r_0}} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} d\xi \xi^2 e^{-\xi}}_2 \\ &= 1 , \end{aligned} \quad (1.50)$$

como queríamos mostrar.

Ortogonalidade das soluções radiais $R_{n\ell}(r)$

Para valores de ℓ diferentes as funções $R_{n\ell}$ não têm que ser ortogonais pois essa ortogonalidade é assegurada pelas harmônicas esféricas. Contudo para o mesmo ℓ devemos ter

$$\int_0^{\infty} dr r^2 R_{n\ell} R_{n'\ell} = \delta_{nn'} . \quad (1.51)$$

Exemplo 1.3 Verifique este resultado para R_{20} e R_{10} .

Usando as Eqs. (1.46) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dr r^2 R_{20} R_{10} &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{r_0} \right)^3 \int_0^{\infty} dr r^2 \left(1 - \frac{r}{2r_0} \right) e^{-\frac{3r}{2r_0}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{27} \int_0^{\infty} d\xi \xi^2 \left(1 - \frac{1}{3}\xi \right) e^{-\xi} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{27} \left(2! - \frac{1}{3} 3! \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.52)$$

onde se usou o resultado geral (integral de Euler)

$$\int_0^{\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n! . \quad (1.53)$$

Nodos de $R_{n\ell}(r)$

Designam-se por nodos os zeros de $R_{n\ell}(r)$. O seu número é dado por

$$\# \text{ nodos} = n - \ell - 1 \quad (1.54)$$

Vê-se aqui um caso particular dum resultado geral, referido anteriormente, que a estados com energia maior (n maior) correspondem numa maneira geral mais nodos.

1.3.5 O spin

Para resolver contradições no espectro dos átomos do tipo do hidrogénio na presença dum campo magnético, o chamado efeito de Zeeman, G. Uhlenbeck e S. Goudsmit propuseram que o eletrão possuía um momento angular intrínseco chamado *spin*, \vec{S} . A palavra spin vem do inglês e quer dizer *rodar* mas é usada na literatura de física sem tradução e significando esta propriedade do eletrão.

Mais precisamente, em mecânica quântica \vec{S} é um operador que obedece à álgebra do momento angular, isto é,

$$\begin{aligned} [S_x, S_y] &= i\hbar S_z \\ [S_y, S_z] &= i\hbar S_x \\ [S_z, S_x] &= i\hbar S_y, \end{aligned} \quad (1.55)$$

e é quantificado de acordo com as relações

$$\begin{aligned} S^2 &= \vec{S} \cdot \vec{S} = s(s+1)\hbar^2 \quad \text{com} \quad s = \frac{1}{2} \\ S_z &= m_s \hbar \quad ; \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

isto é, toma valores semi-inteiros.

Associado ao spin \vec{S} existe um momento magnético $\vec{\mu}_s$ dado por

$$\vec{\mu}_s = -\frac{|e|\hbar}{m} \vec{S}. \quad (1.57)$$

Por vezes escreve-se esta expressão na forma equivalente,

$$\vec{\mu}_s = -\frac{|e|\hbar}{2m} g \vec{S} \quad ; \quad g = 2 \quad (1.58)$$

onde g é a chamada *razão giromagnética*. O valor $g = 2$ para o eletrão foi determinado experimentalmente para explicar o espectro dos átomos.

Ao nível da equação de Schrödinger, o spin é postulado como um número quântico adicional para o eletrão, e o fator g determinado experimentalmente. O spin só aparece naturalmente no quadro da teoria relativista de Dirac que prevê exatamente o valor $g = 2$ para o eletrão².

²De facto g não é exatamente igual a 2 e a teoria de Dirac não é o fim da história. Só a eletrodinâmica quântica consegue prever corretamente a diferença $g-2 = \frac{\alpha}{\pi} + \dots = 0.00232$.

O estado do eletrão é então completamente especificado pelos números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s (pois $s = 1/2$ sempre). Notar que

$$[\vec{L}, \vec{S}] = 0, \quad (1.59)$$

pois \vec{L} e \vec{S} atuam em espaços diferentes, \vec{L} no espaço usual e \vec{S} num espaço interno abstrato. A equação anterior explica porque é que é possível ter funções próprias simultâneas de \vec{L} e \vec{S} .

1.3.6 Adição de momentos angulares

Vimos na secção anterior que o estado do eletrão pode ser descrito por dois momentos angulares, \vec{L} (momento angular orbital) e \vec{S} (spin). Em muitas aplicações é importante definir o chamado *momento angular total*,

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}. \quad (1.60)$$

Que \vec{J} é um momento angular é fácil de ver pois obedece à álgebra usual

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y, \end{aligned} \quad (1.61)$$

como facilmente se mostra usando as definições anteriores. Quais os valores possíveis para \vec{J} ? Está fora do âmbito deste curso introdutório fazer uma apresentação completa da teoria do momento angular. Os resultados são no entanto simples de apresentar e serão relevantes para a compreensão da estrutura dos átomos e moléculas. Vamos apresentá-los sob a forma de teoremas, sem demonstração:

Teorema 1.1 *Seja um operador \vec{J} que obedece à álgebra do momento angular. Então os valores próprios de $J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$ e J_z são*

$$\begin{aligned} J^2 &= j(j+1)\hbar^2 \\ J_z &= m_j\hbar \end{aligned} \quad (1.62)$$

em que j é um inteiro ou semi-inteiro e m_j toma os $(2j+1)$ valores

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j. \quad (1.63)$$

Casos particulares deste teorema, são evidentemente os casos $\vec{J} = \vec{L}$ onde $j = \ell =$ inteiro e $\vec{J} = \vec{S}$ onde $j = s = \frac{1}{2} =$ semi-inteiro.

Teorema 1.2 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ o momento angular correspondente à soma de dois momentos angulares com valores j_1 e j_2 . Então o valor j correspondente a \vec{J} pode tomar os valores*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 . \quad (1.64)$$

Exemplo 1.4 *Como exemplo de aplicação construa uma tabela para os valores possíveis para j e m_j para um elétron de momento angular $\ell = 0, 1$ e 2 .*

O momento angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ pode tomar os valores

$$|\ell - \frac{1}{2}| \leq j \leq \ell + \frac{1}{2} \quad (1.65)$$

e portanto podemos construir a tabela seguinte

ℓ	j	m_j
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$
	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

Tabela 1.1: Valores de j e m_j .

Teorema 1.3 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Então o número de valores possíveis de m_j obedece à relação*

$$\sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) . \quad (1.66)$$

Na tabela 1.1 pode-se verificar este último resultado para $j_1 = \frac{1}{2}$ e $j_2 = 0, 1, 2$.

1.3.7 Estrutura fina

Quando há uma emissão dum fóton a sua energia é dada pela fórmula de Planck,

$$E_\gamma = h\nu = E_i - E_f = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right) \quad (1.67)$$

a que corresponde o comprimento de onda ($n_i > n_f$)

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \quad R = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3c} = 1.09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (1.68)$$

a famosa fórmula de Rydberg.

Com o aumento da precisão das experiências percebeu-se que havia pequenos desvios que vieram a ser conhecidos como a estrutura fina do átomo de Hidrogénio. A estrutura fina tem origem em dois mecanismos

- Correções relativistas à energia cinética

$$T \simeq \sqrt{p^2c + m^2c^4} - mc^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} \quad (1.69)$$

Notar que o c desaparece na física não relativista!

- Acoplamento spin-órbita. O eletrão tem um momento magnético

$$\vec{\mu} = -\frac{|e|\hbar}{mc} \vec{S} \quad (1.70)$$

No referencial do eletrão o campo de Coulomb dá origem a um campo magnético \vec{B} que vai dar origem a uma interação

$$H_{\text{SO}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (1.71)$$

O resultado final é

$$\Delta E_{\text{fs}} = -\alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^4} \left(\frac{2n}{j + 1/2} - \frac{3}{2} \right) \quad (1.72)$$

onde $j = l \pm 1/2$.

- Ambos os efeitos são relativistas. A equação de Dirac dá os níveis corretos sem nenhuma aproximação suplementar.

1.3.8 Desdobramento de Lamb

Uma característica da estrutura fina é que as energias passam a depender de n e do momento angular total j e não do momento angular orbital l . Assim os níveis $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ devem ter a mesma energia. Em 1947 Lamb e Retherford descobriram uma pequena diferença. Esta é hoje compreendida como correções devido a flutuações quânticas e só calculáveis no âmbito da Eletrodinâmica Quântica (QED).

1.3.9 Desdobramento hiperfino

Mencionamos aqui um último efeito que tem implicações importantes em astronomia. Até aqui o próton foi considerado um centro de força pontual. Contudo sabe-se que o próton tem um momento magnético

$$\vec{\mu}_p = \gamma_p \frac{e}{m_p c} \vec{S}_p \quad (1.73)$$

onde $\gamma_p = 2.7928$. Este momento magnético produz um campo magnético que vai interagir com o spin do elétron. No final este efeito conduz a um pequeno desvio, conhecido como desdobramento hiperfino,

$$\Delta E_{hf} = \frac{m}{m_p} \alpha^4 m c^2 \frac{\gamma_p}{2n^3} \frac{\pm 1}{(f + 1/2)(l + 1/2)}, \quad \text{para } f = j \pm \frac{1}{2} \quad (1.74)$$

- O efeito é menor devido ao fator $m/m_p \simeq 2000$
- Para $l = 0$ podemos ter $f = 0, 1$ correspondendo à combinação singleto e tripleto respetivamente. Para o estado fundamental

$$E_{\text{tripleto}} - E_{\text{singleto}} = \frac{32\gamma_p E_1^2}{3m_p c^2} \quad (1.75)$$

a que corresponde um comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{E_{\text{tripleto}} - E_{\text{singleto}}} = 21.1 \text{ cm} \quad (1.76)$$

Problemas capítulo 1

1.1 Escreva as funções de onda estacionárias $\Psi_{2,0,0}$ e $\Psi_{2,1,0}$ para o átomo de hidrogénio, corretamente normalizadas, e faça um gráfico que ilustre qualitativamente o comportamento da parte radial destas funções de onda.

1.2 No átomo de hidrogénio, no seu estado fundamental, qual é a probabilidade de o eletrão se encontrar nas seguintes regiões do espaço:

a) $r \leq r_0/2$

b) $r \leq r_0$

c) $r \leq 2r_0$

d) $2r_0 < r < \infty$

Solução: 0.08, 0.32, 0.76, 0.24.

1.3 Considere o eletrão no átomo de hidrogénio num estado descrito pela função de onda

$$\psi(\vec{r}, t) = A \psi_{100}(\vec{r}, t) + B \psi_{211}(\vec{r}, t) + C \psi_{21,-1}(\vec{r}, t) \quad (1.77)$$

onde A, B e C são reais e positivos. Sabendo que neste estado

$$\langle L_z \rangle = \frac{7}{18} \hbar \quad e \quad \langle L^2 \rangle = \hbar^2 \quad (1.78)$$

a) Determine A, B e C .

b) Calcule $\langle E \rangle$.

c) Calcule $\langle r \rangle$.

Solução:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad B = \frac{2}{3} \quad ; \quad C = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= -8.5 \text{ eV} \\ \langle r \rangle &= \frac{13}{4} r_0\end{aligned}\quad (1.79)$$

1.4 O hélio ionizado comporta-se como um átomo de hidrogénio. Qual é a energia do estado fundamental do eletrão que resta no átomo de hélio ionizado?

Solução: 54.24 eV.

1.5 Mostre explicitamente que as componentes do operador momento angular obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (1.80)$$

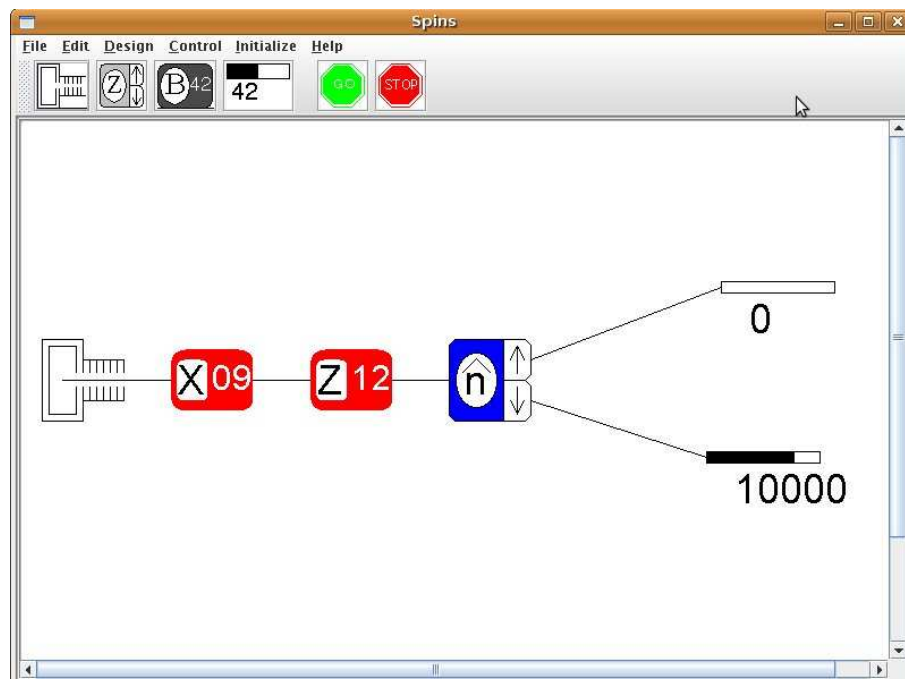
$$[L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad (1.81)$$

$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (1.82)$$

Mostre também que:

$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0. \quad (1.83)$$

1.6 Considere a situação da Figura seguinte. Sabendo que o estado inicial tem spin *up* segundo o eixo dos *z*, descubra a direção \vec{n} . Explique o resultado em termos de precessão do spin no campo \mathbf{B} .



Capítulo 2

Mecânica Quântica Relativista: Colisões e Decaimentos

Seguimos aqui essencialmente o capítulo 6 do Griffiths [1].

2.1 Introdução

Como vimos nas aulas anteriores há dois conceitos fundamentais para o estudo das propriedades das partículas elementares e das suas interações, a largura de decaimento e a secção eficaz de difusão. Estes conceitos básicos já foram introduzidos num contexto de mecânica quântica não relativista, mas na quase totalidade das experiências em física de partículas as velocidades são muito perto da velocidade da luz e portanto precisamos das expressões relativistas.

O procedimento para calcular as taxas de transição envolvidas nos decaimentos e secções eficazes é tradicionalmente designado pela regra de ouro de Fermi. Nós aqui precisamos da regra para a cinemática relativista e vamos dá-la sem demonstração, procurando compreender o seu significado através de exemplos. Para uma dedução no âmbito de QED ver por exemplo o meu texto *Introdução à Teoria de Campo* [2].

2.2 A regra de ouro para os decaimentos

Consideremos a partícula 1, com massa m_1 , que no seu referencial próprio decai em várias outras partículas,

$$1 \rightarrow 2 + 3 + \dots + n \quad (2.1)$$

Então a fórmula para a largura de decaimento Γ é,

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2\hbar m_1}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n 2\pi \delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0) \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}}_D \quad (2.2)$$

Vamos explicar sucessivamente cada um dos fatores

A) *Estado inicial*

Este fator só depende do estado inicial através da massa da partícula que decai.

B) *Fator de simetria*

Para evitar contagens múltiplas, quando há partículas idênticas é preciso multiplicar por um fator $1/s!$ para cada conjunto de partículas idênticas, onde s é o número de partículas dessa espécie. Por exemplo para o decaimento $a \rightarrow b + b + c + c + c$, o fator será

$$S = \frac{1}{2!} \times \frac{1}{3!} \quad (2.3)$$

C) *Amplitude quadrada*

A dinâmica está contida neste fator. Veremos como obtê-lo a partir das regras de Feynman.

D) *Estado final*

Este fator é o espaço de fases do estado final. A conservação de energia-momento é assegurada pela função delta, e as partículas estão na camada de massa (*on-shell* em inglês), satisfazendo $p_j^2 = m_j^2 c^2$. Nesta forma é claro que este fator é invariante de Lorentz e isto é importante em cálculos práticos. Pode-se usar a função $\delta(p_j^2 - m_j^2 c^2) \theta(p_j^0)$ para fazer uma das integrações e escrever o resultado na forma mais habitual,

$$\Gamma = \underbrace{\frac{1}{2\hbar m_1}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - \sum_{i=2}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.4)$$

onde, depois da integração as partículas finais estão on-shell com $p_j^0 > 0$.

Exemplo 2.1 Deduza a Eq. (2.4) a partir da definição, Eq. (2.2).

Para isso é preciso recordar que

$$\delta(f(x)) = \sum_i^n \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x)|_{x=x_i}} \quad (2.5)$$

onde x_i são os zeros de $f(x)$. Assim

$$\delta(p^2 - m^2 c^2) = \delta((p^0)^2 - |\vec{p}|^2 - m^2 c^2) \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}) + \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 + \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}) \quad (2.7)$$

onde $p^0 \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}$. Portanto

$$\theta(p^0) \delta(p^2 - m^2 c^2) = \frac{1}{2p^0} \delta(p^0 - \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2 c^2}) \quad (2.8)$$

o que torna o resultado trivial usando agora,

$$d^4 p = dp^0 d^3 p \quad (2.9)$$

onde fazemos um abuso de notação. De facto $d^3 p = d^3 \vec{p}$

2.2.1 Dimensões de Γ e de \mathcal{M}

A largura de decaimento foi definida como o inverso do tempo de vida média, portanto tem as dimensões de s^{-1} . Usando esta informação podemos obter que as dimensões da amplitude são

$$[\mathcal{M}] = (\text{massa} \times c)^{4-n} \quad (2.10)$$

onde n é o número total de partículas do processo.

Exemplo 2.2 Mostre a Eq. (2.10)

Para isso comece por mostrar que

$$[A] = \left[\frac{1}{2\hbar m_1} \right] = (\text{massa} \times c)^{-2} s^{-1} \quad (2.11)$$

e que

$$[D] = (\text{massa} \times c)^{2n-6} \quad (2.12)$$

Usando as Eqs. (2.11) e (2.12) obtemos então a Eq. (2.10).

2.2.2 Decaimentos para duas partículas

Para decaimentos com duas partículas no estado final as integrações podem ser feitas até ao fim e o resultado é particularmente simples¹.

De facto da Eq. (2.4) obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2\hbar m_1} S \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 p_2}{p_2^0} \frac{d^3 p_3}{p_3^0} \\ &= \frac{S}{32\pi^2 \hbar m_1} \int |\mathcal{M}|^2 \delta \left(m_1 c - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} \right) \frac{d^3 p_2}{p_2^0 p_3^0} \quad (2.13) \end{aligned}$$

¹Estamos a supor que somamos sobre todos os spins do estado final e fazemos médias sobre os spins do estado inicial. Assim a amplitude só pode depender dos produtos internos do 3 quadri-vetores e estes podem sempre ser escritos em termos das massas, não envolvendo ângulos.

onde fizemos a integração em \vec{p}_3 , da qual resultou $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$. Como anteriormente, $p_i^0 = \sqrt{|\vec{p}_i|^2 + m_i^2 c^2}$. Para prosseguir usamos coordenadas esféricas no espaço dos momentos, isto é,

$$d^3 p_2 = d\Omega_2 |\vec{p}_2|^2 d|\vec{p}_2| \quad (2.14)$$

Nas nossas hipótese \mathcal{M} não depende dos ângulos e a integração nas variáveis angulares da partícula 2 podem ser feitas dando 4π . Obtemos então,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1} \int d|\vec{p}_2| |\vec{p}_2|^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{\delta(m_1 c - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2 c^2})}{p_2^0 p_3^0} \quad (2.15)$$

Usando agora,

$$\delta(m_1 c - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2 c^2} - \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_3^2 c^2}) = \frac{\delta(|\vec{p}_2| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0} + \frac{|\vec{p}_2|}{p_3^0}} \quad (2.16)$$

obtemos finalmente,

$$\Gamma = \frac{S}{8\pi\hbar m_1^2 c} |\vec{p}_2| |\mathcal{M}|^2 \quad (2.17)$$

2.3 A regra de ouro para as secções eficazes

Consideremos que temos a colisão

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + \dots + n \quad (2.18)$$

A regra de ouro para a secção eficaz é então,

$$\sigma = \underbrace{\frac{\hbar^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4}}}_A \underbrace{S}_B \int \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{C} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i) \prod_{j=2}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2p_j^0}}_D \quad (2.19)$$

A explicação dos termos B, C e D é a mesma que anteriormente. O único termos novo é

A) Estado inicial

Este fator tem que ver com o fluxo do feixe incidente e a densidade de partículas no alvo. A vantagem de escrever a secção eficaz como na Eq. (2.19), reside no facto de cada termo ser invariante de Lorentz para transformações ao longo do eixo do processo. Isto quer dizer em particular que se deve obter a mesma secção eficaz total no referencial do Laboratório e no referencial do CM.

Exemplo 2.3 *Mostre que as dimensões de \mathcal{M} continuam a ser as da Eq. (2.10). Para isso comece por mostrar que a secção eficaz (uma área) é*

$$[\sigma] = [\hbar]^2 (\text{massa} \times c)^{-2} \quad (2.20)$$

e que agora o termo do estado inicial vem também

$$[A] = [\hbar]^2 (\text{massa} \times c)^{-2} \quad (2.21)$$

notando que agora

$$[D] = (\text{massa} \times c)^{2n-8} \quad (2.22)$$

obtemos a Eq. (2.10).

2.3.1 Colisões $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no CM

A colisão mais simples é a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Mas mesmo neste caso não é possível em geral fazer as integrações até ao fim sem saber a amplitude \mathcal{M} . A razão é que com 4 quadri-momentos não é possível exprimir todos os invariantes em termos das massas das partículas ou da energia total no centro de massa ($\sqrt{s} c^2$). Mas é possível levar as integrações bastante longe deixando só uma integração nas variáveis angulares duma das partículas. Por simplicidade vamos mostrar isto no CM.

Consideremos então o processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no referencial CM. É conveniente usar a variável de Mandelstam s , definida por²,

$$s = (p_1 + p_2)^2/c^2 \quad (2.23)$$

Expandindo

$$s c^2 = m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2p_1 \cdot p_2 \quad (2.24)$$

e portanto

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} (s - m_1^2 - m_2^2) c^2 \quad (2.25)$$

o que permite escrever

$$4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4} = 4\sqrt{s} |\vec{p}_1| c \quad (2.26)$$

Exemplo 2.4 Mostre a Eq. (2.26)

Sabendo que

$$|\vec{p}_1|^2 c^2 = E_1^2 - m_1^2 c^4 = \left(\frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \right)^2 c^4 - m_1^2 c^4 \quad (2.27)$$

obtemos

$$s|\vec{p}_1|^2 c^2 = \frac{c^4}{4} \left[(s + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4s m_1^2 \right]$$

²Estou aqui a usar as convenções do Griffiths [1], onde s tem as dimensões dum quadrado duma massa.

$$\begin{aligned}
 &= c^4 \left[\frac{1}{4} (s - m_1^2 - m_2^2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right] \\
 &= (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 c^4
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

donde resulta a Eq. (2.26)

Obtemos então

$$\sigma = \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 \sqrt{s} c^2 |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{p_3^0} \frac{d^3 p_4}{p_4^0} \tag{2.29}$$

Começamos por fazer a integração em \vec{p}_4 ,

$$\sigma = \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 \sqrt{s} c^2 |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} c - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2 c^2}) \frac{d^3 p_3}{p_3^0 p_4^0} \tag{2.30}$$

Agora introduzimos coordenadas esféricas para o momento \vec{p}_3 . Os ângulos θ e ϕ são os ângulos de difusão da partícula 3 em relação à partícula 1. Escrevemos então a secção eficaz diferencial,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 \sqrt{s} c^2 |\vec{p}_1|} \int \frac{d|\vec{p}_3| |\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \delta(\sqrt{s} c - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2 c^2} - \sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_4^2 c^2}) \\
 &= \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 \sqrt{s} c^2 |\vec{p}_1|} \int |\mathcal{M}|^2 \frac{d|\vec{p}_3| |\vec{p}_3|^2}{p_3^0 p_4^0} \frac{\delta(|\vec{p}_3| - \dots)}{\frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0} + \frac{|\vec{p}_3|}{p_4^0}} \\
 &= \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 \sqrt{s} c^2 |\vec{p}_1|} \frac{|\vec{p}_3|}{p_3^0 + p_4^0} |\mathcal{M}|^2 \\
 &= \frac{\hbar^2 S}{64\pi^2 s c^2 |\vec{p}_1|} |\vec{p}_3| |\mathcal{M}|^2
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

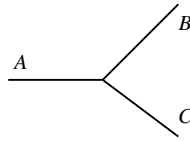
Para continuar temos de saber a forma explícita de \mathcal{M} , pois em geral depende dos ângulos de difusão.

2.4 Regras de Feynman para um modelo sem spin

Para prosseguir é necessário especificar as regras para calcular a amplitude \mathcal{M} . Para cada teoria as interações serão diferentes e algumas das regras são também diferentes. No entanto grande parte delas não depende da teoria. Assim antes de vermos casos mais complicados de partículas com spin vamos pensar num modelo com 3 tipos de partículas escalares neutras: A, B e C . Admitimos que têm massas tais que

$$m_A > m_B + m_C \tag{2.32}$$

de tal forma que A pode decair em $B + C$. O modelo tem uma única interação representada pelo diagrama, dito de Feynman,



com interação dada através duma constante g que nesta teoria tem as dimensões de momento. Com esta interação temos por exemplo a colisão $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa dada pelos diagramas da Fig. 2.1. Notar que há dois diagramas pois ambos os processos são indistinguíveis e devem portanto ser somados. Para a

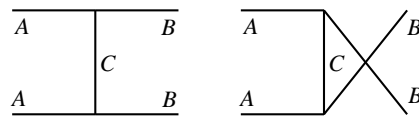


Figura 2.1: Processo $A + A \rightarrow B + B$ em ordem mais baixa.

colisão $A + B \rightarrow A + B$ temos os diagramas da Fig. 2.2. Estes processos, em ordem

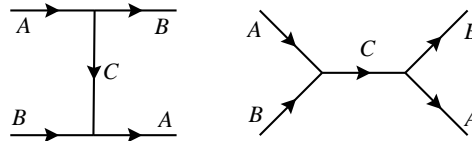


Figura 2.2: Processo $A + B \rightarrow A + B$ em ordem mais baixa.

mais baixa, designam-se por processos ao nível árvore (*tree level* em inglês) devido à sua estrutura ramificada. Os processos em ordem superior ocorrem com malhas fechadas (*loops* em inglês) como os indicados para as correções ao vértice indicadas na Fig. 2.3. No espírito da teoria das perturbações estas correções sendo de ordem

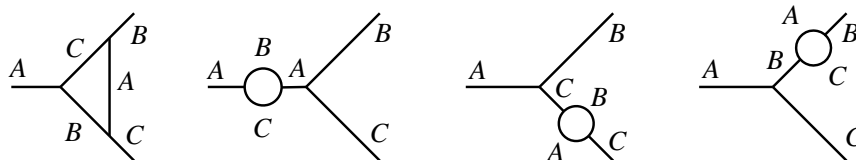


Figura 2.3: Correções a 1 loop ao vértice.

g^3 devem ser mais pequenas do que as de ordem mais baixa e portanto em primeira aproximação desprezáveis.

Vamos então enunciar as regras de Feynman. Designamos então por p_1, \dots, p_n os momentos que entram e saiam do diagrama e por q_1, \dots, q_n os momentos internos. Nas regras enunciadas abaixo, eu afasto-me do Griffiths pois o uso dele das funções

delta, embora correto, é complicado e não é necessário. Assim eu exijo conservação de quadri-momento em cada vértice, o que para os diagramas ao nível árvore determina completamente todos os quadri-momentos. Para diagramas a 1 loop é fácil de ver que falta especificar um momento, que eu designo por q , para dois loops dois momentos q_1, q_2 e assim sucessivamente.

1. Desenhe todas as maneiras distintas de ligar o estado inicial ao estado final numa dada ordem da interação. Notar que de acordo com as regras da mecânica quântica se houver mais do que um diagrama as amplitudes têm de ser somadas.
2. Por cada vértice multiplique pelo fator

$$-i g \tag{2.33}$$

que nesta teoria tem as dimensões duma massa $\times c$.

3. Por cada linha interna com momento q multiplique por

$$\frac{i}{q^2 - m^2 c^2} \tag{2.34}$$

designado por propagador. A massa m é a massa da partícula que está associada a essa linha. Note que $q^2 \neq m^2 c^2$, isto é as partículas não estão na camada de massa.

4. Como explicado acima aplique conservação de energia-momento em cada vértice
5. Por cada loop escolha um momento q para uma linha interna qualquer e multiplique pelo fator

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \tag{2.35}$$

Os momentos de cada linha ficam então determinados por conservação de energia momento em cada vértice.

6. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i \mathcal{M}$, por isso para obter \mathcal{M} multiplique o resultado final por i .

2.4.1 Tempo de vida média de A

Como a partícula A decai, podemos calcular o seu tempo de vida média. O diagrama de Feynman coincide com a definição do vértice. A aplicação das regras de Feynman dá neste caso

$$\mathcal{M} = g \tag{2.36}$$

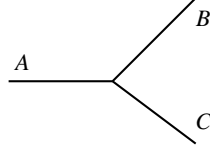


Figura 2.4: Decaimento $A \rightarrow B + C$ em ordem mais baixa.

Podemos usar agora a expressão da largura de decaimento, Eq. (2.17), para obter

$$\Gamma = \frac{g^2 |\vec{p}|}{8\pi \hbar m_A^2 c} \quad (2.37)$$

e obter para o tempo de vida média,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi \hbar m_A^2 c}{g^2 |\vec{p}|} \quad (2.38)$$

onde

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.39)$$

2.4.2 Colisão $A + A \rightarrow B + B$

Consideremos a cinemática da Fig. 2.5 A conservação de energia momento diz-nos

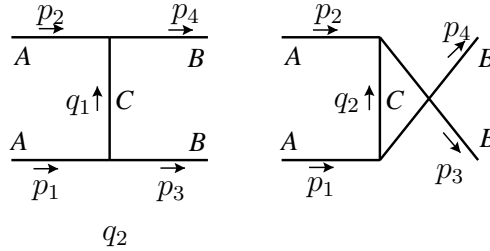


Figura 2.5: Cinemática para o processo $A + A \rightarrow B + B$.

que

$$q_1 = p_1 - p_3, \quad q_2 = p_1 - p_4 \quad (2.40)$$

e a aplicação das regras de Feynman dá

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{g^2}{(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 c^2} + \frac{g^2}{(p_1 - p_4)^2 - m_C^2 c^2} \\ &= \frac{g^2/c^2}{t - m_C^2} + \frac{g^2/c^2}{u - m_C^2} \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde na última passagem usamos as variáveis de Mandelstam. Por esta razão estes diagramas costumam ser designados por canal t e canal u , respetivamente. Introduzindo esta expressão na secção eficaz diferencial, Eq. (2.31), obtemos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 g^4}{64\pi^2 s c^6} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} \left[\frac{1}{t - m_C^2} + \frac{1}{u - m_C^2} \right]^2 \quad (2.42)$$

Para prosseguir devíamos escrever t e u em termos dos ângulos de difusão no CM,

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2/c^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2\frac{E_1 E_3}{c^4} (1 - \beta_3 \beta_1 \cos \theta) \\ u &= (p_1 - p_4)^2/c^2 = m_A^2 + m_B^2 - 2\frac{E_1 E_4}{c^4} (1 + \beta_4 \beta_1 \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde β_i são as velocidades das partículas no CM, e θ é o ângulo de difusão entre a partícula 1 e 3. Notar que $E_3 = E_4$ e $\beta_3 = \beta_4$ pois têm a mesma massa. Notar ainda na Eq. (2.42), o fator $S = 1/2$ pois há duas partículas idênticas no estado final.

2.4.3 Processos de ordem superior

Os exemplos que vimos foram de processos em ordem mais baixa. Quando se pretende ir para as ordens seguintes de teorias de perturbação, os problemas aparecem. Não vamos aqui explicar em detalhe como eles são resolvidos, mas vamos dar um caso simples para vermos que tipo de problemas aparecem.

Para exemplificar vamos considerar as correções ao propagador da partícula A , também designada por *self-energy*. O diagrama de Feynman correspondente é mostrado na Fig. 2.6. Aplicando as regras de Feynman, obtemos para a amplitude,

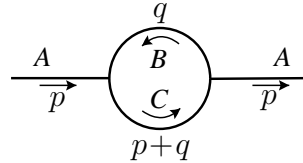


Figura 2.6: Self-energy da partícula A

$$\mathcal{M} = i g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 - m_B^2 c^2][(p+q)^2 - m_C^2 c^2]} \quad (2.44)$$

As integrações são feitas de $-\infty$ a $+\infty$. Imediatamente vemos que há problemas pois para q grande o integral diverge logaritmicamente,

$$\int q^3 dq \frac{1}{q^4} = \int \frac{dq}{q} = \infty \quad (2.45)$$

Este problema levou mais de 30 anos a ser compreendido e resolvido através do procedimento chamado de renormalização. O estudo deste procedimento está para além deste curso introdutório, mas podemos dizer que o problema foi resolvido duma forma completamente satisfatória, produzindo a teoria renormalizada resultados comparáveis com sucesso com a experiência. Para uma explicação do procedimento em QED ver Ref. [2].

Problemas capítulo 2

2.1 O tempo de vida média τ duma partícula instável (que decai noutra) é definido como o tempo ao fim do qual o número de partículas é reduzido a $1/e$ do seu valor inicial, ou seja

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

onde N_0 é o número de partículas no instante inicial e τ é referido ao referencial no qual a partícula se encontra em repouso. Sabendo que os piões carregados têm $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8}$ s e $m_\pi = 140$ MeV calcule:

- O fator γ para um feixe de piões de 200 GeV.
- O tempo de vida média no referencial do Laboratório.
- Calcule a percentagem de piões que decaiu ao fim de percorrerem 300 m no Laboratório. Se não houvesse dilatação no tempo qual seria a percentagem ao fim da mesma distância?

2.2 Considere o decaimento $A \rightarrow B + C$ na teoria descrita na secção 2.4. Mostre que no referencial em que a partícula que decai está em repouso, o módulo do momento de cada uma das partículas no estado final é dado pela Eq. (2.39),

$$|\vec{p}| = \frac{c}{2m_A} \sqrt{m_A^4 + m_B^4 + m_C^4 - 2m_A^2 m_B^2 - 2m_A^2 m_C^2 - 2m_B^2 m_C^2} \quad (2.46)$$

2.3 Considere a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Considere ainda que as partículas 3 e 4 não têm massa. Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3| |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| (E_1 + m_2 c^2) - |\vec{p}_1| c \cos \theta} \quad (2.47)$$

2.4 Considere a colisão $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, no referencial do lab (partícula 2 em repouso). Mostre que a secção eficaz diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 S \frac{|\vec{p}_3|^2 |\mathcal{M}|^2}{m_2 |\vec{p}_1| |(E_1 + m_2 c^2) |\vec{p}_3| - |\vec{p}_1| E_3 \cos \theta} \quad (2.48)$$

2.5 Nas condições do problema 2.4 os dados do problema são as massas das partículas e a energia do feixe incidente (partícula 1) no referencial do laboratório. (**Nota:** Neste problema considere $\hbar = c = 1$)

a) Mostre que o momento $|\vec{p}_3|$ no lab se obtém resolvendo a equação

$$p_{3\text{Lab}} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad (2.49)$$

com

$$\begin{aligned} A &= 4(E_1 + m_2)^2 - 4p_{1\text{Lab}}^2 \cos^2 \theta \\ B &= 2p_{1\text{Lab}} \cos \theta [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2] \\ C &= 4m_3^2 (E_1 + m_2)^2 - [(E_1 + m_2)^2 - m_4^2 + m_3^2 - p_{1\text{Lab}}^2]^2 \\ p_{1\text{Lab}}^2 &= E_1^2 - m_1^2 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Qual o significado dos sinais \pm na Eq. (2.49)?

Sugestão: Veja a secção 3.6 e o problema 3.8 da Ref. [2].

b) Considere agora que $m_1 = m_3 = 2$ GeV, $m_2 = m_4 = 5$ GeV. Considere ainda que $E_1 \in [100, 1000]$ GeV. Faça um gráfico da secção eficaz no referencial do lab e no referencial do CM e confirme numericamente que conduzem ao mesmo resultado.

2.6 Considere no quadro da teoria ABC, descrita na secção 2.4, o processo

$$A + B \rightarrow A + B \quad (2.51)$$

Em ordem mais baixa os diagramas são os indicados na Fig. 2.2.

- Calcule a amplitude \mathcal{M} .
- Escreva a expressão para a secção eficaz diferencial no referencial do centro de massa.

2.7 Considere o processo $A + A \rightarrow A + A$.

- Desenhe todos os diagramas (seis) que contribuem em ordem mais baixa.
- Assumindo $m_B = m_C = 0$ encontre a amplitude para este processo. Deixe o resultado na forma de integral.

Capítulo 3

Grupos e Simetrias

Seguimos o capítulo 4 do Griffiths [1].

3.1 Simetrias, grupos e leis de conservação

Simetrias desempenham um papel muito importante em física e em particular em física de partículas. Isto deve-se por um lado à sua ligação às leis de conservação, por outro porque nos permitem conhecer determinadas propriedades dos sistemas sem ter de fazer todas as contas.

Comecemos com um exemplo deste último caso, adaptado do Griffiths. Consideremos a função representada na Fig. 3.1 Trata-se duma função ímpar. Como tal,

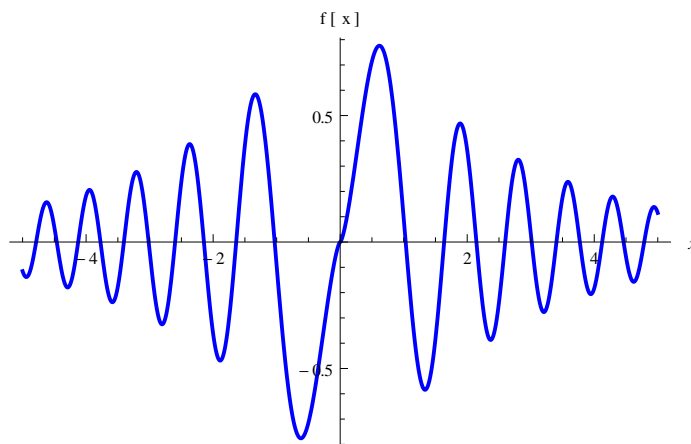


Figura 3.1: Função ímpar

sem mais, podemos fazer várias afirmações sem efetuar qualquer cálculo,

$$(f(-x))^4 = (f(x))^4, \quad \int_{-3}^3 f(x) dx = 0, \quad \int_{-5}^5 [f(x)]^2 dx = 2 \int_0^5 [f(x)]^2 dx \quad (3.1)$$

Podemos ainda afirmar que a sua série de Fourier só tem senos e que a expansão de Taylor só tem potências ímpares de x . Obtemos assim muita informação sem fazer qualquer cálculo. A simetria neste caso é a simetria de reflexão $x \rightarrow -x$ debaixo da qual as funções podem ser pares ou ímpares ou não ter nenhuma simetria.

A importância das simetrias em relação com as leis de conservação vem do Teorema de Noether. O teorema diz que para cada simetria contínua há uma lei de conservação. Os exemplos mais importantes estão na Tabela 3.1. Em física das

Simetria	Lei de conservação
Translação no tempo	Energia
Translação no espaço	Momento linear
Rotação	Momento angular
Simetria de gauge	Carga

Tabela 3.1: Teorema de Noether: Simetrias e leis de conservação

partículas a versão do teorema de Noether que é importante é a versão de teoria de campo. Nós não iremos aqui fazer essa demonstração (ver o meu texto *Introdução à Física da Interação Eletrofraca* [5]), mas daremos só um exemplo da física clássica.

Consideremos um sistema com n graus de liberdade. A ação é dada por

$$S = \int dt L(\dot{q}_k, q_k, t) \quad (3.2)$$

e conduz às equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

O momento é dado pela expressão,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.4)$$

Consideremos agora um sistema onde o lagrangeano L não depende das coordenadas q_k . Dizemos que o sistema tem uma simetria pois é invariante para translações $q_k \rightarrow q_k + b$. Quais as consequências? Se olharmos para a Eq. (5.2), vemos que $\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$ e portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{dp_k}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

logo o momento é conservado neste sistema. De modo semelhante se poderiam demonstrar os outros casos.

Até agora falámos de simetrias numa maneira intuitiva e não muito precisa. Mais rigorosamente uma simetria é uma operação que deixa um sistema invariante. Vejamos um exemplo, as simetrias do triângulo equilátero da Fig. 3.2. As simetrias

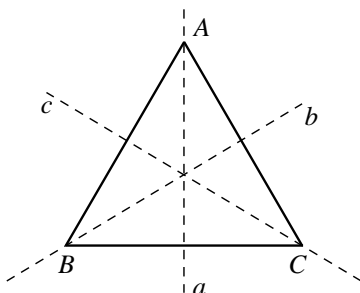


Figura 3.2: Simetrias do triângulo equilátero.

são as reflexões em torno dos eixos a, b e c , e as rotações de 120° no sentido dos ponteiros dos relógios e no sentido contrário. Designamos essas operações por R_a, R_b, R_c, R_+ e R_- , respetivamente. Há ainda a operação de não fazer nada que designamos por identidade I . Estas seis operações são todas as operações de simetria do triângulo equilátero e forma aquilo a que os matemáticos chamam um grupo. Um conjunto de operações forma um grupo se tiver as seguintes propriedades:

1. Se dois elementos R_i e R_j estão no conjunto, então a aplicação sucessiva $R_j R_i$ também pertence ao conjunto. (*Fecho*)
2. Existe um elemento designado por identidade tal que $IR_i = R_i I = R_i$ para todos os elementos do conjunto
3. Para cada elemento do conjunto, R_i , existe um inverso, designado por R_i^{-1} tal que $R_i R_i^{-1} = R_i^{-1} R_i = I$.
4. A propriedade de associatividade é verificada, isto é, $R_i(R_j R_k) = (R_i R_j)R_k$.

Em geral $R_i R_j \neq R_j R_i$. Se $R_i R_j = R_j R_i$ para todos os elementos do grupo o grupo designa-se por abeliano. Caso contrário por não-abeliano. Veremos que ambos são importantes na descrição das simetrias das interações fundamentais. É fácil de ver que o conjunto de simetrias do triângulo equilátero, $I, R_+, R_-, R_a, R_b, R_c$ forma um grupo.

Exemplo 3.1 *Construa a tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, isto é, complete a tabela*

	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
I	I	R_+	R_-	R_a	R_b	R_c
R_+	R_+	R_-	I	R_b	R_c	R_a
R_-	R_-	I	R_+	R_c	R_a	R_b
R_a	R_a	R_c	R_b	I	R_-	R_+
R_b	R_b	R_a	R_c	R_+	I	R_-
R_c	R_c	R_b	R_a	R_-	R_+	I

Notar que se trata dum grupo não abeliano pois, por exemplo,

$$R_a R_b \neq R_b R_a \quad (3.6)$$

Os grupos mais importantes em física são os grupos de matrizes

1. $\mathbf{U}(n)$

Grupo das matrizes unitárias $n \times n$, isto é $\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{U}^T)^* = \mathbf{U}^\dagger$.

2. $\mathbf{SU}(n)$

São os subgrupos dos grupos unitários com $\det \mathbf{U} = 1$. Os exemplos mais importantes são $\mathbf{SU}(2)$ e $\mathbf{SU}(3)$.

3. $\mathbf{O}(n)$

Grupo das matrizes ortogonais $n \times n$, isto é $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$. O grupo de Lorentz, é um grupo de *rotações* num espaço pseudo-euclidiano e designa-se por $\mathbf{O}(3, 1)$ onde o 3, 1 dizem respeito aos sinais da métrica pseudo-euclidiana.

4. $\mathbf{SO}(n)$

Subgrupo de $\mathbf{O}(n)$ com $\det \mathbf{O} = 1$. O exemplo mais importante é o grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$.

Para grupos de simetrias contínuos têm particular importância as transformações infinitesimais. Estas são expressas em termos dos geradores da álgebra do grupo. A álgebra é definida pelas relações de comutação dos geradores. Em mecânica quântica estes geradores correspondem a operadores como por exemplo, o momento angular e o spin, para dar dois exemplos importantes. Assim os geradores da álgebra do grupo das rotações $\mathbf{SO}(3)$, são os operadores do momento angular, com a álgebra,

$$[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.7)$$

que são as relações de comutação do operador momento angular em mecânica quântica. O mesmo se passa para o spin, a que correspondem as matrizes de Pauli, com a álgebra do grupo $\mathbf{SU}(2)$,

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2} \quad (3.8)$$

Vemos assim que as álgebras de $\mathbf{SO}(3)$ e $\mathbf{SU}(2)$ são idênticas e portanto estudando uma estudamos a outra. Em física é usual ser pouco cuidadoso e confundir a álgebra com o grupo e vice-versa.

3.2 Momento angular

Como vimos a conservação de momento angular está relacionada com a simetria para rotações. Assim em problemas com simetria esférica, como o átomo de hidrogénio, o momento angular tem um papel muito importante.

Há uma diferença fundamental entre o momento angular em mecânica clássica e mecânica quântica, embora a definição seja a mesma, isto é,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (3.9)$$

Em física clássica não há qualquer restrição à medição simultânea de todas as componentes de \vec{L} e os valores possíveis são contínuos. Contudo, em mecânica quântica, usando a relação fundamental,

$$[x_i, p_j] = i \hbar \delta_{ij} \quad (3.10)$$

podemos mostrar que

$$[L_i, L_j] = i \epsilon_{ijk} L_k \quad (3.11)$$

e portanto $[L_x, L_y] = i L_z$ o que de acordo com as regras da MQ nos diz que não podemos medir simultaneamente duas das componentes de \vec{L} . Se definirmos o quadrado do momento angular

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad (3.12)$$

podemos mostrar que L^2, L_z , comutam simultaneamente entre si,

$$[L^2, L_z] = 0 \quad (3.13)$$

e portanto podemos medir simultaneamente L^2 e uma das componentes, que tradicionalmente se toma como L_z . A outra diferença para a mecânica clássica é que os valores são discretos. Mais precisamente,

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.14)$$

$$L_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.15)$$

com

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m_l = -l, -l+1, -l+2, \dots, 0, \dots, l-1, l \quad (3.16)$$

3.3 Spin 1/2

Na Natureza o spin 1/2 é o mais importante. De facto todos os quarks e leptões têm spin 1/2, dizemos que são fermiões. Assim é da máxima importância o estudo de spin 1/2.

Uma partícula com $s = 1/2$ pode ter duas projeções de spin, $m_s = \pm 1/2$. Há várias notações para descrever esta situação, por exemplo $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Contudo uma notação mais conveniente é em termos de vetores colunas com duas componentes,

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

A importância destes estados resulta do facto de eles serão os estados próprios de S_z . De facto definindo o spin através da relação usual,

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (3.18)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli, obtemos,

$$S_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Um estado arbitrário de spin pode portanto ser escrito na forma,

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A condição de normalização é $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, e de acordo com as regras básicas da MQ, devemos ter que a probabilidade duma medida de S_z dar $+\hbar/2$ é $|\alpha|^2$ enquanto que a probabilidade de dar $-\hbar/2$ é $|\beta|^2$.

Suponhamos agora que queremos medir S_x no estado dado pela Eq. (3.20). Quais os valores possíveis e com que probabilidade? Como S_x não comuta com S_z não podemos responder diretamente. Abordemos primeiro a questão dos valores possíveis. Como dissemos anteriormente não há nada de especial sobre S_z , é só uma escolha, pelo que os valores possíveis devem ser também $\pm\hbar/2$. De facto na representação usual onde S_z é diagonal, temos

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e facilmente vemos que os valores próprios são $\pm\hbar/2$ a que correspondem os vetores próprios normalizados

$$\chi_{\pm} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad S_x \chi_{\pm} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

De acordo com as regras da mecânica quântica os estados χ_{\pm} formam uma base onde podemos expandir o estado da Eq. (3.20),

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

donde resulta,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) \quad (3.24)$$

Agora podemos dizer que $|a|^2$ e $|b|^2$ representam as probabilidades duma medida de S_x dar $\pm\hbar/2$, respetivamente. Notar que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

3.3.1 Rotação de spinores

Sabemos da física elementar que escalares (spin 0) não se transformam numa rotação e que vetores (spin) se transformam como as coordenadas no espaço a 3 dimensões. A questão que se põe é como se transformam os objetos de spin 1/2, os spinores? A resposta, que não demonstraremos aqui, é

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \mathbf{U}(\vec{\theta}) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde

$$\mathbf{U}(\vec{\theta}) = e^{-\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}} \quad (3.26)$$

O vetor $\vec{\theta}$ aponta na direção do eixo de rotação e o seu módulo é o ângulo de rotação. $\mathbf{U}(\vec{\theta})$ é uma matriz unitária de determinante 1, pelo que o conjunto de todas as rotações forma o grupo $\mathbf{SU}(2)$. Dizemos que os spinores estão na representação a duas dimensões do grupo, enquanto que os escalares na representação uni-dimensional e os vetores na representação a três dimensões. Os diferentes spins correspondem a representações do grupo $\mathbf{SU}(2)$ ou $\mathbf{SO}(3)$ que, como vimos têm a mesma álgebra.

3.4 Adição de momentos angulares

Vimos numa aula anterior que o estado do eletrão pode ser descrito por dois momentos angulares, \vec{L} (momento angular orbital) e \vec{S} (spin). Em muitas aplicações é importante definir o chamado *momento angular total*,

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \vec{S}, \quad [\vec{L}, \vec{S}] = 0. \quad (3.27)$$

Que \vec{J} é um momento angular é fácil de ver pois obedece à álgebra usual

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z, \quad [J_y, J_z] = i\hbar J_x, \quad [J_z, J_x] = i\hbar J_y \quad (3.28)$$

como facilmente se mostra usando as definições anteriores. Quais os valores possíveis para \vec{J} ? Está fora do âmbito deste curso introdutório fazer uma apresentação completa da teoria do momento angular. Os resultados são no entanto simples de apresentar e serão relevantes para a compreensão da estrutura dos átomos e moléculas e de muitas questões em física de partículas. Vamos apresentá-los sob a forma de teoremas, sem demonstração:

Teorema 3.1 *Seja um operador \vec{J} que obedece à álgebra do momento angular. Então os valores próprios de $J^2 = \vec{J} \cdot \vec{J}$ e J_z são*

$$J^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$J_z = m_j \hbar \quad (3.29)$$

em que j é um inteiro ou semi-inteiro e m_j toma os $(2j + 1)$ valores

$$m_j = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j . \quad (3.30)$$

Casos particulares deste teorema, são evidentemente os casos $\vec{J} = \vec{L}$ onde $j = \ell =$ inteiro e $\vec{J} = \vec{S}$ onde $j = s = \frac{1}{2} =$ semi-inteiro.

Teorema 3.2 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ o momento angular correspondente à soma de dois momentos angulares com valores j_1 e j_2 . Então o valor j correspondente a \vec{J} pode tomar os valores*

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 . \quad (3.31)$$

Teorema 3.3 *Seja $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Então o número de valores possíveis de m_j obedece à relação*

$$\sum_{|j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} (2j + 1) = (2j_1 + 1) (2j_2 + 1) . \quad (3.32)$$

3.5 Simetrias internas

Na descrição das partículas elementares e das suas interações desempenham um papel muito importante simetrias que não têm que ver com operações no espaço-tempo. De facto atuam num espaço com graus de liberdade internos e por isso ficaram designadas por simetrias internas.

O melhor exemplo continua a ser o isospin, proposto por Heisenberg depois da descoberta do neutrão. Ao observar que as massas do protão e nucleão eram quase iguais, Heisenberg propôs que eles seriam dois estados duma entidade designada por nucleão e que a diferença de massa seria resultado do facto duma ter carga e a outra não, portanto devida às interações eletromagnéticas. Assim essa simetria, o isospin, seria uma simetria só das interações fortes. Tal como para o spin escrevíamos o nucleão,

$$N = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

com o protão e o neutrão a serem representados por,

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Por analogia com o spin, introduzimos o isospin (não tem dimensões)

$$\vec{I} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad (3.35)$$

e portanto o protão tem isospin $+1/2$ enquanto que o neutrão tem isospin $-1/2$.

Até aqui isto é apenas notação. As consequências resultam de dizer que as interações fortes são invariantes para o grupo $\mathbf{SU}(2)$ do isospin. Pelo teorema de Noether resulta que o isospin é conservado nas interações fortes e isso tem consequências experimentais. Esta simetria foi passada para os quarks, com os quarks u e d a terem as mesmas propriedades do protão e neutrão respetivamente. A descoberta da estranheza e do quark s levou a aumentar o grupo de simetria de $\mathbf{SU}(2)$ para $\mathbf{SU}(3)$ ¹. Na próxima aula verão como estes conceitos foram aplicados na construção do modelo de quarks, o chamado *Eightfold Way*.

3.6 Simetrias discretas

Até aqui vimos simetrias contínuas, tanto do espaço tempo como internas. Estas, pelo teorema de Noether correspondem a leis de conservação. Nesta secção vamos ver outro tipo de simetrias do espaço-tempo que são discretas. Não conduzem a leis de conservação mas têm uma importância fundamental na construção das teorias das interações fundamentais.

3.6.1 Paridade

Até 1957 todos os físicos acreditavam que todas as leis da Natureza eram invariantes para reflexões no espelho, tal como indicado na Fig. 3.3. De facto para formalizar é

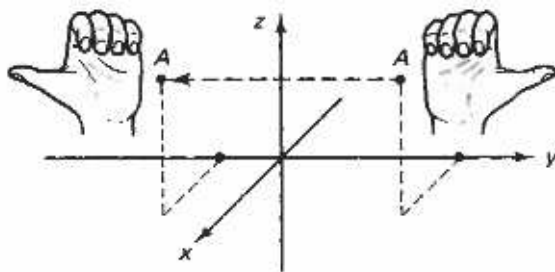
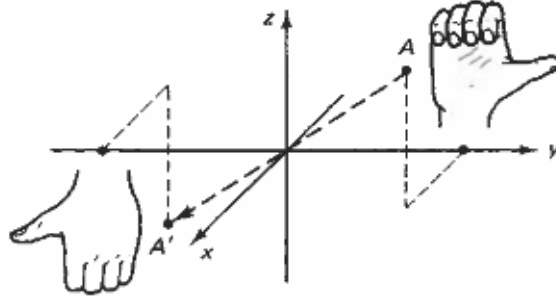


Figura 3.3: Reflexão no plano xz

mais conveniente considerar inversões no espaço, $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ tal como indicado na Fig. 3.4. As duas operações diferem somente por uma rotação (de 180° em torno do eixo dos y neste caso) e se a teoria for invariante para rotações, como usualmente (as rotações são parte do grupo de Lorentz da relatividade restrita), não há diferença entre as duas. Designamos esta operação por Paridade e o respetivo operador por P . Devemos então ter para vetores,

$$P(\vec{r}) = -\vec{r}, \quad P(\vec{p}) = -\vec{p}, \quad P(\vec{E}) = -\vec{E}, \quad P(\vec{A}) = -\vec{A} \quad (3.36)$$

¹Não confundir este $\mathbf{SU}(3)$ com o $\mathbf{SU}(3)_c$ da cor da cromodinâmica quântica. Por vezes designa-se a simetria entre os diferentes tipos de quark como $\mathbf{SU}(3)_f$ de *flavour*, sabor em inglês.

Figura 3.4: Reflexão no plano xz

isto é os vetores mudam de sinal como as coordenadas. No entanto das relações anteriores resulta que

$$P(\vec{L}) = P(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{L}, \quad P(\vec{B}) = P(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{B} \quad (3.37)$$

isto é, apesar do nome usual, o momento angular e o campo magnético não são verdadeiros vetores. São designados por pseudo-vetores. Não podemos somar vetores com pseudo-vetores. Podemos verificar que, por exemplo a força de Lorentz é um verdadeiro vetor pois

$$P(\vec{F}) = P\left(q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\right) = -\vec{F} \quad (3.38)$$

pois \vec{B} é um pseudo-escalar mas o produto externo recupera o caráter vetorial. De igual forma há duas espécies de escalares, os escalares propriamente ditos que não mudam de sinal, como

$$P(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{r} \quad (3.39)$$

e os pseudo-escalares que mudam, como por exemplo

$$P(\vec{E} \cdot \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (3.40)$$

Se aplicarmos P duas vezes voltamos ao início, e portanto

$$P^2 = I \quad (3.41)$$

o que indica que o grupo da paridade tem só dois elementos, I e P . Isto quer dizer que os seus valores próprios são ± 1 . De acordo com as regras de QFT, a paridade dos bósons deve ser igual à das suas antipartículas enquanto que os fermiões têm paridade oposta à dos seus anti-fermiões. Tomamos a paridade dos quarks positiva e a paridade dum sistema composto será o produto das paridades dos constituintes se o momento angular relativo for nulo. Não sendo nulo o momento angular, o resultado geral é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \quad (3.42)$$

o que dá $(-1)^l$ para sistemas de bóson-anti-bóson e $(-1)^{l+1}$ para sistemas de férmion-antiférmion. Para completar esta enumeração o fóton, descrito pelo potencial vetor, deve ter $P(\gamma) = -1$.

As interações fortes e eletromagnéticas eram conhecidas serem invariantes para transformações de paridade, e toda a gente pensava que isso seria uma regra geral, incluindo as interações fracas. Contudo em 1956 havia um puzzle, conhecido pelo puzzle $\tau - \theta$. Dois mesões de spin zero e com a mesma massa tinham os seguintes decaimentos,

$$\begin{aligned}\theta^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0, & P &= (-1)^2 = +1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0, & P &= (-1)^3 = -1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, & P &= (-1)^3 = -1\end{aligned}\tag{3.43}$$

Assim a única diferença entre elas era a paridade assumindo que esta era conservada. Como os tempos de vida média eram muito diferentes, sendo o decaimento em três píons muito mais lento, Lee e Yang propuseram que o primeiro decaimento era devido às interações fortes e conserva a paridade, enquanto que o segundo era devido às interações fracas e não conservava a paridade. Ao buscarem na literatura verificaram que não havia prova que as interações fracas conservam de facto a paridade como era assumido. Propuseram então uma experiência que foi levada a cabo por Wu em 1957. Consistia em observar os eletrões do decaimento

$${}^{60}\text{Co}(J^P = 5^+) \rightarrow {}^{60}\text{Ni}(J^P = 4^+) + e + \bar{\nu}_e\tag{3.44}$$

com o spin dos núcleos de cobalto alinhado, digamos na direção positiva do eixo dos z . A experiência mostrou que os eletrões eram sempre produzidos na direção oposta ao do spin do núcleo. Como a diferença de spin é uma unidade, os spins do eletrão e anti-neutrino devem estar alinhados para somar a unidade que falta. O resultado da experiência quer dizer que o anti-neutrino tem sempre o seu spin alinhado com a direção do movimento (helicidade positiva) e que o eletrão é produzido na direção contrária ao seu spin (helicidade negativa). Como se sabia do eletromagnetismo que o eletrão podia ter as duas helicidades, devia ser o anti-neutrino que só podia ter helicidade positiva devendo a sua antipartícula, o neutrino, ter sempre helicidade negativa. Como os neutrinos só participam da interação fraca, esta devia violar a paridade. Muitas experiências desde essa altura confirmaram ser esse o caso.

3.6.2 Conjugação de carga

A operação de conjugação de carga C transforma os estados de uma partícula na sua antipartícula, deixando as coordenadas e o spin sem alteração. Muda assim o sinal dos números quânticos aditivos, como a carga, número bariónico e número leptónico. Como $C^2 = I$ os seus valores próprios só podem ser ± 1 . Só partículas completamente neutras, para as quais todas as cargas são nulas, podem ser estado próprios do operador C . Estas são o fóton e alguns mesões neutros como o π^0 . Como

o fóton é o quanta do campo eletromagnético deve mudar de sinais se mudarmos todas as cargas que lhe dão origem devemos ter para o fóton $C = -1$. Do facto que o existe o decaimento,

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (3.45)$$

devemos ter $C(\pi^0) = +1$. Pode-se mostrar que para um sistema de partícula-antipartícula ($p\bar{p}$) com spin total s e momento orbital l temos o resultado

$$C(p\bar{p}) = (-1)^{l+s} . \quad (3.46)$$

A conjugação de carga é uma simetria das interações fortes e eletromagnética, mas não das interações fracas, pois quando aplicado a um neutrino esquerdo (helicidade negativa) produz um anti-neutrino esquerdo (a helicidade não é alterada pela operação) e esta partícula não existe na Natureza.

3.6.3 Violação de CP

Embora C , e P não sejam simetrias das interações fracas, verifica-se que o produto CP é quase uma simetria das interações fracas. No exemplo anterior se depois de aplicar C ao anti-neutrino aplicarmos P invertemos a helicidade e temos um neutrino esquerdo como existem na Natureza. No entanto verificou-se experimentalmente em 1964 no sistema $K^0\bar{K}^0$ que isto não era o caso e que havia uma violação pequena de CP. Mas recentemente este resultado foi confirmado noutro sistema, como o $B^0\bar{B}^0$. É portanto um resultado que tem de ser incorporado na teoria das interações fracas. Voltaremos a este assunto no final do semestre.

3.6.4 Inversão no tempo e o teorema TCP

A terceira simetria discreta do espaço-tempo é a chamada inversão no tempo, designada pelo operador T . Classicamente as equações fundamentais do eletromagnetismo e da mecânica são invariante se mudarmos o sinal do tempo. Se virmos o filme ao contrário não damos por isso. Ao nível da física quântica, as interações fortes e eletromagnéticas têm esta simetria, mas as interações fracas poderiam não ter.

As experiências para esclarecer esta questão são muito complicadas, pois não é possível usar colisões. O melhor que podemos fazer é medir quantidades que deveriam ser nulas se a inversão no tempo fosse uma boa simetria da teoria. Os candidatos são por exemplo a medição do momento dipolar elétrico do eletrão e neutrão, para os quais só existem neste momento limites superiores,

$$d_n < 6 \times 10^{-26} \text{ e cm}, \quad d_e < 1.6 \times 10^{-27} \text{ e cm} \quad (3.47)$$

Existe em TQC um teorema que diz que o produto das três operações TCP deve ser conservado. Ainda não foi encontrada qualquer prova que não é verdade. Se o tomarmos como certo, sabendo que o produto CP não é completamente conservado (violação de CP), então T também deverá ter a mesma violação.

Problemas capítulo 3

3.1 Construa a tabela de multiplicação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, dada no exemplo 3.1. Verifique que o grupo é não abeliano.

3.2 O grupo de Poincaré é constituído pelo grupo de Lorentz mais as translações. Se $J_{\mu\nu}$ designarem os geradores do grupo de Lorentz e P_μ os geradores das translações, as relações de comutação são

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i (g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}) \quad (3.48)$$

$$[P_\alpha, J_{\mu\nu}] = i (g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu) \quad (3.49)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

Mostre que

$$[P^2, J_{\mu\nu}] = [P^2, P_\mu] = 0 \quad (3.50)$$

$$[W^2, J_{\mu\nu}] = [W^2, P_\mu] = [W^2, P^2] = 0$$

onde

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$$

é o vetor (operador) de Pauli-Lubanski. Qual a importância deste resultado?

3.3 Um sistema de duas partículas ligadas, no seu referencial próprio com momento angular l e projeção m segundo o eixo dos z pode ser escrito como

$$||\vec{p}|, l, m\rangle = \sum_{\theta, \phi} Y_{lm}^*(\theta, \phi) |\vec{p}, -\vec{p}\rangle \quad (3.51)$$

Use a propriedades das harmónicas esféricas,

$$Y_{lm}^*(\theta - \pi, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (3.52)$$

Para mostrar que a paridade do sistema é,

$$P = P_1 P_2 (-1)^l \tag{3.53}$$

onde P_i são as paridades intrínsecas dos dois constituintes.

Capítulo 4

Equações de Klein-Gordon e Dirac

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.3 do Griffiths [1] e as secções 1.2 a 1.5 de ITC [2].

4.1 A equação de Klein-Gordon.

Começemos pela partícula livre. Em mecânica quântica não relativista a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi \quad (4.1)$$

usando o Hamiltoniano livre não relativista que é

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (4.2)$$

e fazendo a substituição $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$. Obtemos então

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (4.3)$$

A primeira ideia que surgiu para generalizar esta equação para uma partícula relativista foi usar em vez da Eq. (4.2) o Hamiltoniano relativista. Para uma partícula livre o Hamiltoniano é a sua energia e devemos ter

$$H = E \quad (4.4)$$

A energia está relacionada com o momento linear através da relação

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad (4.5)$$

onde

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (4.6)$$

Temos então

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2 \quad (4.7)$$

ou seja

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4.8)$$

Classicamente exige-se que as energias sejam positivas por isso deveríamos ter no caso relativista

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (4.9)$$

Somos imediatamente confrontados com o problema de interpretar a raiz quadrada dum operador. Para evitar este problema vamos encontrar uma equação para H^2 . Isto obtém-se facilmente iterando a Eq. (4.1) e observando que $[i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, H] = 0$. Obtém-se então

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi \quad (4.10)$$

ou ainda

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0 \quad (4.11)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. Agora não temos dificuldades em interpretar os operadores mas introduzimos no problema as soluções de energia negativa que também são soluções da Eq. (4.11). Como veremos as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativista e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas. A observação experimental de antipartículas veio a confirmar esta interpretação.

Mas não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da Eq. (4.11), chamada equação de Klein-Gordon [6–8], como equação relativista para o eletrão mas antes outro problema relacionado com a *densidade* de probabilidade. Partindo da Eq. (4.11) e da equação complexa conjugada obtemos

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0 \quad (4.12)$$

ou

$$0 = \psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = \partial_\mu (\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi) \quad (4.13)$$

onde $\psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overrightarrow{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overleftarrow{\partial}^\mu \psi$. Temos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad ; \quad J^\mu = \psi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \psi \quad (4.14)$$

Na identificação usual $J^\mu = (\rho c, \vec{J})$ pelo que a densidade será

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (4.15)$$

Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida positiva. Finalmente uma terceira razão fez abandonar a equação da Klein-Gordon. De facto ela não conduz aos níveis de energia do átomo de *hidrogénio* (ver Problema 4.3).

Se excetuarmos esta última razão, a Eq. (4.11) foi abandonada pelas razões erradas. De facto pode-se mostrar que ela é a boa equação relativista para partículas de *spin zero*, razão pela qual não pode explicar os níveis do átomo de hidrogénio onde os efeitos do spin são importantes. As soluções de energia negativa serão compreendidas e a densidade ρ será re-interpretada não como uma densidade de *probabilidade* mas antes como uma *densidade de carga*.

4.2 A equação de Dirac

Confrontado com os problemas anteriores Dirac propôs uma outra equação relativista para o eletrão [9, 10]. Como na equação fundamental, Eq. (4.1), a derivada em ordem ao tempo aparece linearmente é natural admitir num contexto relativista que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em ordem às coordenadas e portanto escrevemos

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2 \right) \psi \equiv H \psi \quad (4.16)$$

É fácil de ver que α^i e β não podem ser números pois então a relação entre energia e momento duma partícula relativista não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^* \psi$ é para ser interpretada como a componente temporal dum 4-vetor corrente. Assim Dirac propôs que $\vec{\alpha}$ e β sejam matrizes hermiticas $N \times N$ (para que H seja hermitico) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

A Eq. (4.16) é então interpretada como uma equação matricial. Para que ela faça sentido devemos satisfazer as condições:

- Deve dar a relação correta entre a energia e o momento isto é $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, para uma partícula livre.
- Deve fornecer uma probabilidade definida positiva.
- Deve ser covariante para transformações de Lorentz.

Vejam os dois primeiros requisitos. Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein Gordon. Para isso iteramos a Eq. (4.16)

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (-i\hbar c \alpha^i \nabla_i + \beta m c^2) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \left[-\hbar^2 c^2 \frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \nabla_i \nabla_j - i\hbar m c^2 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \nabla_i + \beta^2 m^2 c^4 \right] \psi \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para que cada componente satisfaça a equação de Klein- Gordon devemos ter

$$\begin{cases} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \end{cases} \quad (4.19)$$

Complemento 4.1

Na Eq. (4.18), que conduziu às relações anteriores, simetrizámos o produto $\alpha^i \alpha^j$. Como este tipo de situação vai aparecer várias vezes, expliquemos um pouco mais. Tomemos como exemplo o espaço euclidiano a 3 dimensões com métrica δ_{ij} , mas os resultados são independentes desta hipótese. Seja T_{ij} um tensor de segunda ordem neste espaço (o que quer dizer que se transforma como as coordenadas em cada um dos seus índices), $A_{ij} = -A_{ji}$ um tensor anti-simétrico e $S_{ij} = S_{ji}$ um tensor simétrico. Então

$$\begin{aligned} A_{ij} S_{ij} &= A_{12} S_{12} + A_{21} S_{21} + \dots \\ &= A_{12} S_{12} - A_{12} S_{12} + \dots \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

pois é sempre possível rearranjar os termos para se cancelarem dois a dois. Dizemos que *a contração dum tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é sempre nula*. Por outro lado, um tensor sem simetria definida, pode ser sempre decomposto nas suas partes simétrica e anti-simétrica, isto é,

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) \\ &= T_{ij}^S + T_{ij}^A \end{aligned} \quad (4.21)$$

Então obtemos facilmente

$$T_{ij} A_{ij} = T_{ij}^A A_{ij} \quad ; \quad T_{ij} S_{ij} = T_{ij}^S S_{ij} \quad (4.22)$$

Temos portanto que construir 4 matrizes que *anticomutem*, sejam *hermíticas* e cujo *quadrado* seja a *identidade*. É desde logo claro que não podem ser 2×2

pois só há 3 matrizes 2×2 que anticomutam, as matrizes de Pauli. Para ver a dimensão mínima em que é possível realizá-las, observemos que sendo hermíticas os seus valores próprios são reais e iguais a ± 1 pois $\alpha^{i2} = \beta^2 = 1$. Das relações de anticomutação pode-se concluir que têm traço nulo. Por exemplo

$$\alpha^i = -\beta\alpha^i\beta \quad (4.23)$$

ou seja

$$\text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta\alpha^i\beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0 \quad (4.24)$$

Isto tem como consequência que N deve ser par para que o número de valores próprios $+1$ e -1 seja igual. Como $N = 2$ está excluído devemos ter $N = 4$ como a dimensão mais baixa onde se realiza a Eq. (4.19). Uma representação explícita, a chamada *representação de Dirac* é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

É um exercício trivial verificar que a Eq. (4.25) satisfaz as condições da Eq. (4.19). Claro que a escolha não é *única*, mas voltaremos a este assunto mais tarde.

Vamos agora ver a questão da corrente de probabilidade. Para isso escrevemos a equação conjugada hermítica da Eq. (4.16). Atendendo a que α^i e β são hermíticas, obtemos

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger (i\hbar c \alpha^i \overleftarrow{\partial}_i + \beta mc^2) \quad (4.27)$$

Multiplicando a Eq. (4.16) à esquerda por ψ^\dagger e a Eq. (4.27) à direita por ψ e subtraindo obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c \nabla_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi) \quad (4.28)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi) = 0 \quad (4.29)$$

o que permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \quad (4.30)$$

$$\vec{j} = \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi \quad (4.31)$$

Integrando a Eq. (4.29) em todo o espaço obtemos

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0 \quad (4.32)$$

o que está de acordo com identificarmos $\psi^\dagger \psi$ como uma densidade de probabilidade definida positiva.

A notação das Eq. (4.29) e (4.31) antecipa o facto de \vec{j} ser um 3-vetor. De facto temos de mostrar isso e muito mais. Na secção seguinte demonstraremos que $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ é um 4-vetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é *covariante*, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

Antes de continuar a discutir a equação de Dirac vamos introduzir uma conveniente notação 4-dimensional. Multiplicamos a Eq. (4.16) por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzimos as matrizes

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad ; \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

Então a equação de Dirac escreve-se

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad (4.34)$$

ou ainda

$$(i\hbar\partial - mc)\psi = 0 \quad (4.35)$$

onde se introduziu a notação, devida a Feynman

$$\partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad (4.36)$$

As matrizes γ^μ , na representação de Dirac, são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

É fácil de ver que as relações da Eq. (4.19) se escrevem numa forma compacta em termos das matrizes γ , isto é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} . \quad (4.38)$$

4.3 Soluções para a partícula livre

4.3.1 Sistema de unidades $\hbar = c = 1$

Em física de partículas é usual utilizar um sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$. Isto simplifica muito as expressões e os cálculos numéricos. Vamos rever aqui os conceitos fundamentais.

No sistema de unidades $\hbar = c = 1$, complementado com $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ (notar que $c = 1$ implica $\epsilon_0\mu_0 = 1$), só há uma unidade independente. Qual se escolhe depende da situação, umas vezes a energia, outras o tempo ou ainda a distância. A conversão faz-se usando as relações:

$$1 = c = 2.999792 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ s} = 2.999792 \times 10^8 \text{ m} \quad (4.39)$$

$$1 = \hbar c = 197.327 \text{ MeV.fermi} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ MeV}^{-1} = 197.327 \times 10^{-15} \text{ m} \quad (4.40)$$

$$1 = \hbar = 1.054571 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ J.s} = 9.482529 \times 10^{33} \quad (4.41)$$

Como exemplo, vamos escrever as várias unidades em termos da energia. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 5.067730 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ s} &= 1.520214 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \\ 1 \text{ Kg} &= \frac{1 \text{ J.s}}{1 \text{ m}^2 \times 1 \text{ s}^{-1}} = \frac{1 \text{ J.s} \times 1 \text{ s}}{1 \text{ m}^2} = 5.613088 \times 10^{29} \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (4.42)$$

Particularmente úteis são as relações:

$$\begin{aligned} 1 \text{ s}^{-1} &= 6.578023 \times 10^{-22} \text{ MeV} \\ 1 \text{ barn} &= 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.568189 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ pb} &= 2.568189 \times 10^{-15} \text{ MeV}^{-2} \\ 1 \text{ MeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^{14} \text{ pb} \\ 1 \text{ GeV}^{-2} &= 3.893794 \times 10^8 \text{ pb} \\ 1 \text{ eV}^{-2} &= 1.5202 \times 10^{15} \text{ Hz} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Se quisermos podemos sempre re-introduzir as potencias de \hbar e c , como no exemplo seguinte.

Exemplo 4.1 *Considere que um cálculo da secção eficaz deu o resultado*

$$\sigma = \lambda \frac{1}{s} \quad (4.44)$$

onde λ é um parâmetro sem dimensões e s o quadrado da energia (massa) no CM. Vamos escrever a expressão introduzindo as potências de \hbar e c .

Para isso começamos por escrever

$$\sigma = \lambda \frac{1}{s} \hbar^\alpha c^\beta \quad (4.45)$$

Sabemos que a secção eficaz tem as dimensões duma área e que $[s] = [M]^2$. Por isso devemos ter

$$\begin{aligned} L^2 &= \frac{1}{M^2} (ML^2T^{-1})^\alpha (LT^{-1})^\beta \\ &= M^{\alpha-2} L^{2\alpha+\beta} T^{-\alpha-\beta} \end{aligned} \quad (4.46)$$

que tem como solução $\alpha = 2$, $\beta = -2$. O resultado final será portanto,

$$\sigma = \frac{\lambda \hbar^2}{s c^2} \quad (4.47)$$

o que se pode comparar com a Eq. (2.31).

4.3.2 Soluções da equação de Dirac no referencial próprio

Tomemos a equação de Dirac para a partícula livre ($\hbar = c = 1$ a partir de agora)

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad (4.48)$$

A Eq. (4.48) admite como soluções ondas planas

$$\psi(x) = w(\vec{p}) e^{-i p_\mu x^\mu} \quad (4.49)$$

desde que $p_\mu p^\mu = m^2$. Isto implica que $(p^0)^2 = E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2$, e portanto temos soluções com energia positiva e negativa. Nas nossas convenções fazemos $p^0 = E/c = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} > 0$ sempre, pelo que devemos ter

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p}) e^{-i \varepsilon_r p_\mu x^\mu} \quad (4.50)$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$ para soluções de energia positiva e negativa, respetivamente, e o índice r explicita as diferentes soluções independentes, como veremos de seguida.

Para determinar $w^r(\vec{p})$ vamos considerar primeiro o caso da partícula em repouso. No referencial próprio a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m \right) \psi = 0 \quad (4.51)$$

Usando a representação de Dirac, Eq. (4.37), é fácil de ver que a equação se escreve

$$m (\varepsilon_r \gamma^0 - 1) \psi^r = 0 \quad (4.52)$$

onde

$$\psi^r = w^r(0) e^{-i \varepsilon_r m t} \quad (4.53)$$

com

$$\varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases} \quad (4.54)$$

e

$$w^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^{(2)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

$$w^{(3)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad w^{(4)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Vemos portanto que $r = 1, 2$ são soluções da energia *positiva* e $r = 3, 4$ da energia *negativa*. O factor $\sqrt{2m}$ da normalização foi introduzido por conveniência como será claro mais tarde (esta normalização é a nossa *única* diferença em relação às convenções de Bjorken e Drell). Se usarmos o operador

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

vemos ainda que $w^{(r)}(0)$ são funções próprias de Σ^3 com valores próprios ± 1 . Assim as soluções $r = 1, 2$ descrevem o eletrão de *Schrödinger-Pauli* e as soluções de energia negativa, $r = 3, 4$ serão interpretadas mais tarde. Na re-interpretação de Dirac das soluções de energia negativa como as anti-partículas, a ausência de um eletrão de energia negativa com spin CP corresponde a um positrão com spin down, por isso $w^{(3)}(0)$ corresponderá a spin down enquanto que $w^{(4)}(0)$ a spin up.

4.3.3 Soluções da equação de Dirac para $\vec{p} \neq 0$

Se tivéssemos visto como os spinores se transformam numa transformação de Lorentz, poderíamos aqui fazer simplesmente uma mudança de referencial. Voltaremos a este assunto na secção seguinte, mas sem demonstração, pelo que aqui vamos construir as soluções para $\vec{p} \neq 0$ diretamente seguindo de perto o Griffiths. Queremos soluções da forma

$$\psi(x) = N w(k) e^{-ik \cdot x} \quad (4.58)$$

onde N é uma normalização a determinar no final. Substituindo na Eq. (4.48) obtemos

$$(\gamma \cdot k - m)w(p) = (\not{k} - m)w(k) = 0 \quad (4.59)$$

onde usámos a notação, devida a Feynman,

$$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu \equiv \gamma \cdot k = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} \quad (4.60)$$

Começemos por notar que a Eq. (4.59) é uma equação algébrica matricial. Na representação de Dirac temos

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} k^0 & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

pelo que escrevendo o 4-spinor w em termos de dois bi-spinores,

$$w(p) = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

obtemos

$$(\not{k} - m)w = \begin{bmatrix} k^0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

$$= \begin{bmatrix} (k^0 - m)w_A & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_B \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} w_A & -(k^0 + m)w_B \end{bmatrix} = 0 \quad (4.64)$$

Estas equações conduzem às relações,

$$w_A = \frac{1}{k^0 - m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_B, \quad w_B = \frac{1}{k^0 + m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_A, \quad (4.65)$$

A consistência requer então que

$$w_A = \frac{1}{(k^0)^2 - m^2} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 w_A \quad (4.66)$$

Mas usando $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$, concluímos que deve ser

$$|\vec{k}|^2 = (k^0)^2 - m^2, \quad (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2 \quad (4.67)$$

Exemplo 4.2 Mostremos que $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$. Para isso usamos a propriedade das matrizes de Pauli,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (4.68)$$

para obter

$$(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = |\vec{k}|^2 \quad (4.69)$$

onde no último passo usamos o facto de a contração dum tensor simétrico com um anti-simétrico se anular.

Portanto k^μ deve ser um quadri-vetor relacionado com o 4-momento da partícula por

$$k^\mu = \pm p^\mu \quad (4.70)$$

correspondendo o sinal + às soluções de energia positiva, as partículas e o sinal – às soluções de energia negativa, as anti-partículas.

Podemos agora construir 4 soluções independentes da equação de Dirac. De facto

1. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então ($E = p^0$)

$$w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

2. Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

3. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

4. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

Com a normalização canónica,

$$w^\dagger w = 2E \quad (4.75)$$

obtemos finalmente as quatro soluções independentes,

$$u^{(1)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E + m} \end{bmatrix}, \quad u^{(2)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E + m} \\ -\frac{p_z}{E + m} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

e

$$v^{(1)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ -p_z \\ \frac{E+m}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v^{(2)} = \sqrt{E+m} \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

onde usámos a notação convencional, u para as partículas e v para as anti-partículas. Notar que devido aos sinais na Eq. (4.70), as equações para u e v diferem dum sinal (ver Eq. (4.59))

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (\not{p} + m)v = 0. \quad (4.78)$$

4.4 Covariância da equação de Dirac

4.4.1 Transformações de spinores

Escrevemos a equação de Dirac na forma,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (4.79)$$

sem nunca nos preocuparmos em que referencial estamos. A razão é que estamos implicitamente a usar o facto de que deve ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia, isto é no referencial S' deverá ser

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0 \quad (4.80)$$

Numa transformação geral entre S e S' definida através das transformações,

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (4.81)$$

um escalar fica invariante $\phi'(x') = \phi(x)$, mas um vetor muda como as coordenadas,

$$A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu. \quad (4.82)$$

A questão é saber como se transformam os spinores nas transformações da Eq. (4.81). Não vamos explicar esta questão aqui (ver a Ref. [2]) mas só dar o resultado. Se definirmos

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x) \quad (4.83)$$

então a equação de Dirac é covariante se

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu \quad (4.84)$$

A forma explícita depende do tipo de transformações de Lorentz. Assim

1. Rotações

$$S_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}} \quad (4.85)$$

onde $\vec{\theta}$ é um vetor coma direção da rotação e módulo igual ao ângulo de rotação e

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Notar que em cada bloco diagonal os spinores transforma-se como em mecânica quântica não relativista.

2. Transformações de Lorentz (boosts)

$$S_L = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\alpha}} \quad (4.87)$$

onde $\vec{\alpha}$ são as matrizes de Dirac, e $\vec{\omega}$ é um vetor na direção da velocidade relativa entre S e S' tal que

$$\tanh \omega = \frac{|\vec{V}|}{c} \quad (4.88)$$

3. Inversão no espaço (Paridade)

Neste caso

$$a^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

e portanto a Eq. (4.84), dá

$$S_P = \gamma_0 . \quad (4.90)$$

4.4.2 Adjunto de Dirac

A escolha mais simplista para formar um invariante seria $\psi^\dagger\psi$. Contudo esta quantidade não é um escalar mas sim a componente temporal dum 4-vetor, como vimos na discussão da corrente de probabilidade. Como formar então um escalar? Para isso notemos, que

$$S_L^\dagger = S_L \neq S_L^{-1} \rightarrow \psi'^\dagger\psi' \neq \psi^\dagger\psi \quad (4.91)$$

contudo podemos mostrar que para todas as transformações de Lorentz devemos ter

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0 \quad (4.92)$$

Por isso se definirmos o chamado **adjunto de Dirac**

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0 \quad (4.93)$$

então temos

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1} \quad (4.94)$$

e portanto

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi \quad (4.95)$$

e é portanto um escalar, invariante para **todos** os tipos de transformações de Lorentz.

4.4.3 Covariantes bilineares

Tal como qualquer matriz complexa 2×2 se pode exprimir em termos de 4 matrizes linearmente independentes (por exemplo a matriz identidade mais as matrizes de Pauli) assim qualquer matriz 4×4 se pode exprimir em termos de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes. Para introduzir estas matrizes é conveniente definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (4.96)$$

que na representação de Dirac tem a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.97)$$

Da definição resultam as propriedades importantes

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (4.98)$$

$$(\gamma_5)^2 = 1 \quad (4.99)$$

Estamos agora em posição de definir as 16 matrizes 4×4

$$\Gamma^S = 1 \quad (4.100)$$

$$\Gamma_\mu^V = \gamma_\mu \quad (4.101)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (4.102)$$

$$\Gamma_\mu^A \equiv \gamma_5\gamma_\mu \quad (4.103)$$

$$\Gamma^P = \gamma_5 \quad (4.104)$$

onde os símbolos S , V , T , A e P designam respetivamente: escalar, vector, tensor, pseudo vector e pseudo-escalar e têm a ver com a maneira como os bilineares

$$\bar{\psi} \Gamma^a \psi \quad a = S, V, T, A \text{ e } P \quad (4.105)$$

se transformam para transformações de Lorentz. Por exemplo

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') \Gamma^A \psi'(x') &= \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu S \psi(x) \\ &= \det a \, a^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x) \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde se usou o facto de $[S, \gamma_5] = 0$ para transformações de Lorentz próprias e $\{\mathcal{P}, \gamma_5\} = 0$ para a inversão no espaço. Isto mostra que $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)$ se transforma como um sector axial ou pseudo-sector. De forma semelhante se podiam demonstrar as propriedades de transformação dos outros bilineares.

4.5 Interpretação das soluções de energia negativa

Apesar de todos os sucessos da equação de Dirac descritas anteriormente o problema das soluções com energia negativa continua por resolver. Este problema não é um problema académico, pois é preciso explicar porque é que os electrões nos átomos não efectuem transição para estados de energia negativa. Por exemplo um cálculo simples dá para o electrão, no estado fundamental do hidrogénio, uma taxa de transição de 10^8 s^{-1} para decair no intervalo $[-mc^2, -2mc^2]$

A teoria dos buracos de Dirac

Foi Dirac quem primeiro forneceu um tratamento consistente das soluções de energia negativa. O argumento de Dirac só funciona para fermiões pois faz uso do *Princípio de Exclusão de Pauli*. Assim para Dirac o *vácuo* da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidas. Devido ao princípio de exclusão de Pauli um electrão com energia $E > 0$ não pode então efectuar uma transição para um estado de energia negativa, explicando a estabilidade dos átomos. Claro que o vácuo tem energia e momento infinitos mas fisicamente só medimos diferenças em relação ao vácuo e essas serão finitas.

A principal consequência desta interpretação é a existência de antipartículas, neste caso o positrão. Consideremos que o vácuo tem uma lacuna ou buraco. Isto quer dizer a *ausência* dum electrão de energia $-E$ e carga $-|e|$. Mas isto pode ser igualmente interpretado como *presença* dum partícula de carga $+|e|$ a energia positiva $+E$, isto é, o positrão. Assim a produção dum par electrão-positrão é explicada esquematicamente na Figura4.1

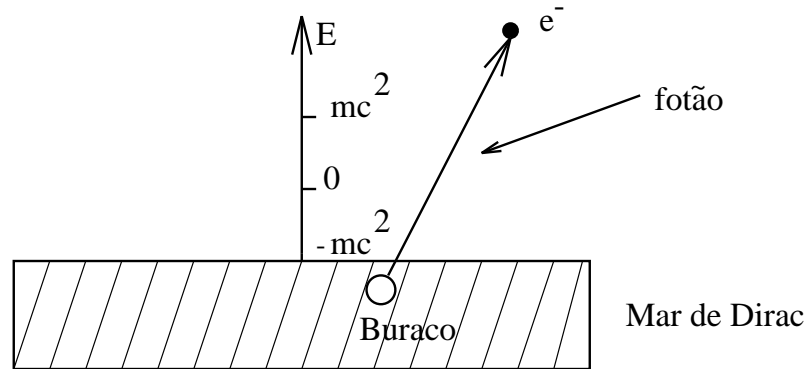


Figura 4.1:

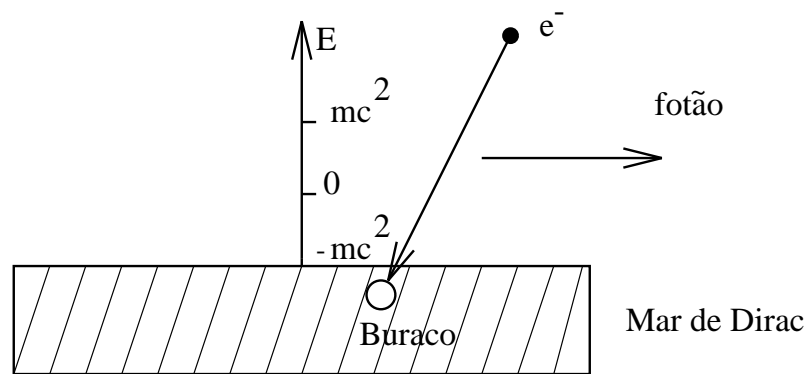


Figura 4.2:

Isto é, um electrão é excitado dum estado de energia negativa deixando atrás de si uma lacuna no mar de Dirac. Como esta lacuna corresponde a um positrão ficou criado um par e^+e^- . Igualmente a aniquilação electrão-positrão pode ser interpretada como um electrão com $E > 0$ que faz uma transição para um estado com $E < 0$ que estava livre (positrão) desaparecendo portanto o electrão e o positrão, conforme indicado na Figura 4.2

Com a teoria dos buracos abandonamos a interpretação em termos de funções de onda de uma partícula para passar a ser uma explicação em termos de muitas partículas. Só o formalismo da segunda quantização, com os seus operadores de criação e destruição permitirá fazer uma descrição consistente desta teoria de muitas partículas. Essa explicação, como veremos, também se aplicará aos bósons, o que a este nível não é possível de explicar por não satisfazerem ao princípio de exclusão de Pauli. Contudo a interpretação de Dirac teve um papel determinante no desenvolvimento da teoria e a descoberta experimental das anti-partículas foi um grande sucesso.

4.6 Conjugação de carga

Da teoria dos buracos emerge assim numa nova simetria de natureza: para cada partícula existe uma anti-partícula. Esta simetria designa-se por *conjugação de carga*. Vejamos como a podemos definir. De acordo com a teoria dos buracos devemos ter uma correspondência unívoca entre as soluções de energia negativa da equação de Dirac para os electrões

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0 \quad (4.107)$$

e as soluções de energia positiva da equação de Dirac para os positrões,

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)\psi_c = 0 \quad (4.108)$$

onde ψ_c é a função de onda para o positrão. Para encontrar a relação observemos que o sinal relativo entre $i\cancel{\partial}$ e $e\cancel{A}$ é o contrário nas duas equações. Isso leva-nos a considerar o complexo conjugado da Eq. (4.107). Obtemos

$$(-i\gamma^{\mu*} \partial_\mu - e\gamma^{\mu*} A_\mu - m)\psi^* = 0 \quad (4.109)$$

Usando agora $\gamma^{0T}\psi^* = \bar{\psi}^T$ e $\gamma^{0T}\gamma^{\mu*}\gamma^{0T} = \gamma^{\mu T}$ obtemos

$$[-\gamma^{\mu T} (+i\partial_\mu + eA_\mu) - m] \bar{\psi}^T = 0 \quad (4.110)$$

Se encontrarmos uma matriz C , não singular, tal que

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (4.111)$$

podemos então identificar (a menos duma fase que tomamos igual a 1)

$$\psi_c \equiv C\bar{\psi}^T \quad (4.112)$$

Que existe uma matriz C verificando a Eq. (4.111) pode ser demonstrado construindo um exemplo específico. Na representação de Dirac é

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^T \quad (4.113)$$

ou mais explicitamente

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

É instrutivo ver como é que a Eq. (4.112) relaciona as soluções de energia negativa com as funções de onda do positrão. Consideremos um electrão de energia negativa em repouso com spin para baixo. Então

$$\psi = N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \quad (4.115)$$

onde N é uma renormalização. Aplicando a Eq. (4.112) obtemos

$$\psi_c = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt} \quad (4.116)$$

isto é, um positrão de energia positiva e spin para cima. Portanto a *ausência* dum electrão de spin \downarrow e energia negativa corresponde à *presença* dum positrão de energia positiva e spin \uparrow . Foi este facto que nos levou a identificar $v(p, \uparrow)$ com $w^4(\vec{p})$ e $v(p, \downarrow)$ com $w^3(\vec{p})$.

A conjugação de carga, forma conjuntamente com a paridade e a inversão no tempo, um conjunto de *simetrias discretas* muito importantes para a caracterização das partículas e suas interacções. Para um estudo mais aprofundado em teoria quântica dos campos ver [11].

Problemas capítulo 4

4.1 Mostre que a construção usual da corrente de probabilidade aplicada à equação de Schrödinger conduz à densidade de probabilidade usual $|\psi|^2$ definida positiva. Compare com a Eq. (4.12) e discuta a origem da diferença entre os dois casos.

4.2 Considere o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. A partir deste tensor define-se o chamado *tensor dual*

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} .$$

a) Mostre que as equações de Maxwell são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

e que estas reproduzem as leis de Gauss e Ampère (incluindo a corrente de deslocamento introduzida por Maxwell).

b) Mostre que se tem

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

Verifique que esta equação contém as chamadas equações de Maxwell homogêneas, isto é, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$. Verifique que aquela relação é equivalente à forma mais usual (identidade de Bianchi)

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0$$

c) Exprima os invariantes $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ em termos dos campos \vec{E} e \vec{B} .

d) Mostre que se \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares num dado referencial, então são perpendiculares em todos os referenciais de inércia.

e) Considere um referencial S onde se tem $\vec{E} \neq 0$ e $\vec{B} = 0$. Será possível encontrar um referencial S' onde $\vec{E} = 0$ e $\vec{B} \neq 0$? Justifique.

4.3 Introduza na equação de Klein-Gordon o acoplamento mínimo

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu$$

e considere as soluções estacionárias do átomo de hidrogénio, isto é ($\hbar = c = 1$)

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt} \quad ; \quad A_0 = -\frac{e}{4\pi r}$$

a) Mostre que a equação de Klein-Gordon se escreve

$$\left[-\nabla^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \right] \phi(\vec{r}) = 0$$

b) Mostre que esta equação se pode resolver exatamente pelos métodos usuais dando as energias

$$E_{n\ell} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(n-\varepsilon_\ell)^2}}} \quad ; \quad \begin{cases} n & = 1, 2, \dots \\ \ell & = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde

$$\varepsilon_\ell = \ell + \frac{1}{2} - \left[\left(\ell + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{1/2}$$

c) Expandindo em potências de α compare com os resultados da teoria de Schrödinger incluindo correções relativistas.

4.4 Utilize as expressões explícitas

$$S_R = \cos \frac{\theta}{2} + i\hat{\theta} \cdot \vec{\Sigma} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$S_L = \cosh \frac{\omega}{2} - \hat{\omega} \cdot \vec{\alpha} \sinh \frac{\omega}{2}$$

para verificar que para transformações finitas também temos

$$S^{-1} \gamma^\mu S = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

4.5 Mostre as relações seguintes:

$$(\Gamma^a)^2 = \pm 1$$

$$\text{Tr}(\Gamma^a) = 0, \forall a \neq s$$

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 ; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu ; \quad \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= g^{\mu\nu} \gamma^\rho - g^{\mu\rho} \gamma^\nu + g^{\nu\rho} \gamma^\mu + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \gamma_\alpha \gamma_5 \end{aligned}$$

4.6 Prove a decomposição de Gordon:

$$\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p_1, s_1) [(p_1 + p_2)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\nu] u(p_2, s_2)$$

Sugestão: Use a identidade

$$\not{a}\not{b} = a^\mu b_\mu - ia^\mu b^\nu \sigma_{\mu\nu}$$

4.7 Considere um elétron incidente da região I com energia E conforme indicado na Figura 4.3. Admita que a partícula incidente tem a função de onda

$$\psi_{\text{inc}} = a e^{ik_1 z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_1}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

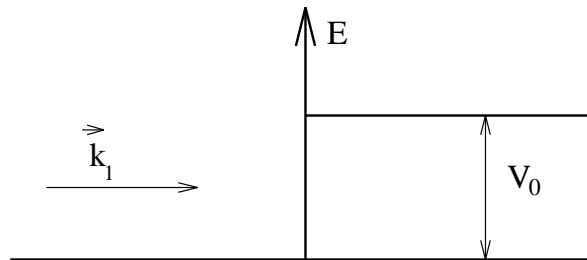


Figura 4.3: Paradoxo de Klein

- Calcule a onda defletida e a onda transmitida.
- Mostre que a corrente defletida e transmitida obedecem a

$$\frac{J_{\text{trans}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{4r}{(1+r)^2} \quad ; \quad \frac{J_{\text{refl}}}{J_{\text{inc}}} = \frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}$$

isto é, aparentemente tudo bem pois

$$J_{\text{inc}} = J_{\text{trans}} + J_{\text{refl}}$$

contudo

$$r = \frac{k_2}{k_1} \frac{E + m}{E - V_0 + m} \quad \text{e se} \quad V_0 > E + m \quad \text{então} \quad r < 0$$

Portanto

$$J_{\text{ref}} > J_{\text{inc}}$$

Comente este resultado.

4.8 Demonstre as relações de Ehrenfest

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{op}} &= i [H, \vec{r}_{\text{op}}] = c\vec{\alpha} \\ \frac{d}{dt} \vec{\pi}_{\text{op}} &= i [H, \vec{\pi}_{\text{op}}] + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\pi}_{\text{op}} = e \left(\vec{E} + \vec{v}_{\text{op}} \times \vec{B} \right) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \vec{\pi}_{\text{op}} = -i\vec{\nabla} - e\vec{A} \\ H = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m - e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + eA^0 \end{cases}$$

4.9

- Construa o Hamiltoniano H da equação de Dirac para partículas livres no espaço dos momentos.
- Calcule o comutador $[H, \vec{L}]$, onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular orbital.
- Calcule o comutador $[H, \vec{S}]$, onde $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ é o momento angular intrínseco ou spin.
- Use os resultados anteriores para calcular $[H, \vec{J}]$, onde $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Comente.

4.10 Considere um elétron descrito pela equação de Dirac.

- Mostre que no caso do elétron livre se tem,

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{p})}{dt} = 0$$

onde

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Qual o significado desta lei de conservação?

- b) Considere agora que o elétron está num campo eletromagnético exterior A^μ , independente do tempo. Calcule agora

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt}$$

onde $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$ é o momento canônico.

- c) Em que condições

$$\frac{d(\vec{\Sigma} \cdot \vec{\pi})}{dt} = 0?$$

Qual o interesse prático deste resultado?

Sugestão: Para um operador \mathcal{O} que não dependa do tempo tem-se

$$\frac{d\mathcal{O}}{dt} = i[H, \mathcal{O}]$$

onde H é o Hamiltoniano do sistema. Não esquecer que H é diferente nas alíneas a) e b).

Capítulo 5

Teoria Quântica dos Campos e Diagramas de Feynman

Seguimos aqui as secções 7.4 a 7.8 e 8.1 e 8.3 do Griffiths. Algumas destas questões estão mais desenvolvidas em ITC [2].

5.1 O fóton

Em teoria quântica a quantidade fundamental é o potencial vetor. A regra é sempre que os 4-vetores contravariantes, isto é aqueles que se transformam como as coordenadas, têm as dimensões e os nomes da parte espacial. Assim definimos (nesta secção não estamos a fazer $c = 1$)

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad (5.1)$$

Podemos facilmente verificar que a condição de gauge de Lorentz [12]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

se escreve nesta notação (notar que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$),

$$\partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (5.3)$$

O outro 4-vetor importante é a corrente J^μ definida por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (5.4)$$

satisfazendo a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 = \partial_\mu J^\mu . \quad (5.5)$$

Os campos eletromagnéticos fazem parte do chamado *tensor de Maxwell* definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.6)$$

que é invariante para transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (5.7)$$

Usando as relações usuais [12] entre os potenciais e os campos \vec{E} e \vec{B} , obtemos numa conveniente representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ou ainda

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (5.9)$$

As equações de Maxwell não homogéneas (isto é com cargas e correntes) obtém-se a partir da equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (5.10)$$

As equações homogéneas são uma consequência do tensor $F_{\mu\nu}$ ser antisimétrico. De facto, se definirmos o tensor dual (ver Problema 4.2)

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.11)$$

então o facto do tensor de Maxwell ser antisimétrico implica que

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.12)$$

e esta equação é equivalente às equações homogéneas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Este resultado é conhecido por identidade de Bianchi.

A equação de Maxwell não homogénea na gauge de Lorentz, Eq. (5.3), escreve-se,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (5.13)$$

Contudo esta escolha não eliminou completamente a ambiguidade dos potenciais. De facto podemos ainda usar uma transformação de gauge em que $\square \Lambda = 0$, sem modificar a Eq. (5.13). Esta dificuldade está na base de muitos problemas em quantizar a teoria de Maxwell, que não vamos detalhar aqui.

No espaço livre a equação é a equação das ondas,

$$\square A^\mu = 0 \quad (5.14)$$

que tem com o solução ondas planas

$$A^\mu(x) = N e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (5.15)$$

onde N é uma normalização e $\epsilon^\mu(p)$ é o vetor polarização que caracteriza ao spin do fóton. A condição de Lorentz implica que

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0. \quad (5.16)$$

Sabe-se do eletromagnetismo clássico que o fóton tem dois estados de polarização (spin 1 sem massa), mas aqui o vetor polarização tem quatro graus de liberdade (4-vetor). Esta dificuldade está relacionada com a ambiguidade dos potenciais e resolve-se escolhendo uma dada condição de gauge. A condição na Eq. (5.16) já retira um grau de liberdade. Para fixar completamente os graus de liberdade escolhe-se muitas vezes a gauge de Coulomb, que é uma restrição da classe de gauges de Lorentz onde

$$A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.17)$$

Nesta gauge

$$\epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0 \quad (5.18)$$

o que quer dizer que as polarizações são perpendiculares à direção de movimento. Se tomarmos essa direção como o eixo dos z então os dois vetores independentes são

$$\epsilon(p, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon(p, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (5.19)$$

Estes vetores obedecem às relações gerais

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \epsilon_\mu(p, 1)\epsilon^\mu(p, 2) = 0, \quad \epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda) = -1 \quad (5.20)$$

5.2 A eletrodinâmica quântica (QED)

A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação de elétrons (e positrões) com fótons. No capítulo 7 discutiremos em detalhe a construção do lagrangeano de QED. Aqui vamos somente discutir a forma da interação. Vimos no capítulo 4 que para a equação de Dirac temos uma corrente de probabilidade conservada dada por,

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.21)$$

Se multiplicarmos pela carga do elétron, $q_e = -e$, onde e é a carga do próton, obtemos a corrente eletromagnética

$$J^\mu = -e j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (5.22)$$

Esta é a corrente que aparece na Eq. (5.13). Como é que esta corrente interatua com o fóton? Do eletromagnetismo clássico sabemos que o lagrangeano para uma partícula não relativista com carga q em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.23)$$

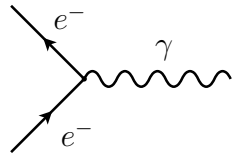
o que com a identificação (ver capítulo 7)

$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L} \quad (5.24)$$

dá

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -eQ_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.25)$$

onde definimos $Q_e = -1$. Na linguagem dos diagramas de Feynman descrevemos a interação da forma seguinte



$$-ie Q_e \gamma^\mu \quad (5.26)$$

Vemos assim que a regra de Feynman corresponde a *tirar* os campos do lagrangeano de interação e multiplicar o resultado por i .

5.3 Regras de Feynman para QED

Vamos agora indicar o conjunto completo de regras de Feynman para QED. Elas seguem o que vimos para o modelo ABC com as modificações necessárias devido a termos spinores e antipartículas.

1. Para num dado processo desenhar todos os diagramas topologicamente distintos.
2. Para cada eletrão que entra no diagrama um fator $u(p, s)$. Se sai do diagrama um fator $\bar{u}(p, s)$.
3. Para cada positrão deixando o diagrama um fator $v(p, s)$. Entrando o diagrama um fator $\bar{v}(p, s)$.
4. Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização $\varepsilon_\mu(k)$ e no estado final $\varepsilon_\mu^*(k)$.
5. Por cada linha fermiônica interna o propagador

$$\beta \xrightarrow[p]{} \alpha \quad S_{F\alpha\beta}(p) = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.27)$$

6. Por cada linha interna do fóton o propagador (na gauge de Feynman)

$$\mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu \quad D_{F\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (5.28)$$

7. Por cada vértice o fator

$$\begin{array}{c} e^- \\ \nearrow \\ \text{---} \text{wavy line} \text{---} \gamma \\ \searrow \\ e^- \end{array} \quad (-ieQ_e\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (5.29)$$

onde passámos a usar a notação, mais convencional, de introduzir o sinal da carga explicitamente. Portanto, a partir daqui, $e = |e|$, é a carga do positrão ou do próton e claro que para o eletrão $Q_e = -1$.

8. Por cada momento interno não fixado por conservação de energia-momento (*loops*) um fator

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (5.30)$$

9. Por cada loop de fermiões um sinal (-1) .
10. Um fator -1 entre diagramas que diferem por permutações ímpares de linhas fermiônicas (estatística de Fermi dos fermiões).
11. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i\mathcal{M}$, por isso para obter \mathcal{M} multiplique o resultado final por i .

Comentários

1. As regras 9) e 10) são um pouco difíceis de explicar sem operadores e teorema de Wick. A este nível aparecem mais como uma receita.
2. Para escrever corretamente as linhas fermiônicas devemos notar que elas no final devem dar um número, isto é uma matriz 1×1 no espaço de Dirac. Para obter isso deve-se usar a regra empírica que se começa a escrever cada linha do diagrama pela ponta da seta.
3. Os denominadores dos propagadores têm a mesma forma do que no caso da teoria escalar ABC . Os numeradores diferem para eletrões e fótons (gauge de Feynman) da maneira indicada.

5.4 Exemplos

Se nos ficarmos por duas partículas no estado final, o número de processos em causa é muito reduzido. Na tabela 5.1 está feito um resumo.

Processo	Observação
$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	Efeito Compton
$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	Em QED
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	Difusão Bhabha
$e^- + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow e^- + \text{Núcleo}(Z) + \gamma$	Bremsstrahlung
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Aniquilação de pares
$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	Difusão Möller
$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$	Criação de pares
$\gamma + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow \text{Núcleo}(Z) + e^- + e^+$	Criação de pares

Tabela 5.1: Processos simples em QED.

Vamos analisar os três primeiros casos.

5.4.1 Colisão elástica eletrão-muão

Consideremos primeiro a colisão elástica eletrão-muão. Embora este processo não seja em QED no sentido restrito, o muão é em tudo, exceto na massa, igual ao eletrão e tem a vantagem de haver só um diagrama que se mostra na Fig. 5.1. Com

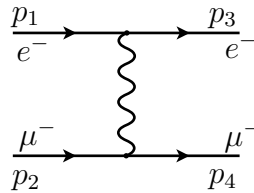


Figura 5.1: Difusão $e^-e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$ em QED.

a cinemática da figura obtemos para a amplitude,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\
 &= - \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Para prosseguir e calcular a secção eficaz, Eq. (2.31), temos de calcular $|\mathcal{M}|^2$. Antes de fazer isso vamos ver mais dois processos e voltaremos então ao cálculo das secções eficazes.

5.4.2 Colisão elástica eletrão-positrão

Neste processo, conhecido por difusão Bhabha, temos dois diagramas conforme indicado na Fig. 5.2. Temos ainda uma situação em que existe um sinal menos entre

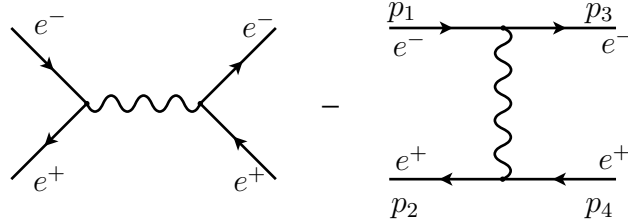


Figura 5.2: Difusão Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

os dois diagramas, uma consequência da regra 10. A amplitude escreve-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.32)$$

onde

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad \mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4) \quad (5.33)$$

onde as variáveis de Mandelstam s, t são

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2. \quad (5.34)$$

5.4.3 Efeito de Compton

Consideremos finalmente o efeito de Compton. Com a cinemática indicada na Fig. 5.3, obtemos para a amplitude

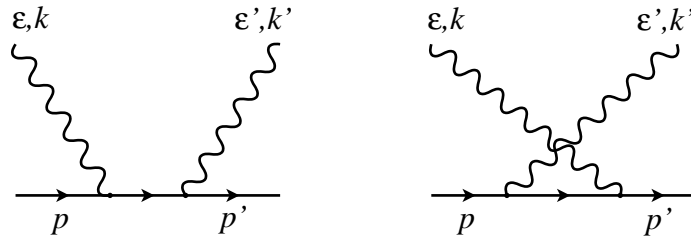


Figura 5.3: Diagramas para o efeito de Compton, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.35)$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p+k)^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon^{\nu*}(k') \quad (5.36)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p-k')^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\nu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon^{\nu*}(k'). \quad (5.37)$$

5.5 O truque de Casimir

Na secção anterior calculámos as amplitudes para três processos em QED. É claro que para quaisquer dos processos na Tabela 5.1 se pode prosseguir de maneira semelhante pelo que não continuaremos por aí. Vamos antes usar as amplitudes para calcular as secções eficazes. Tomemos a difusão Bhabha pois normalmente é calculada no referencial do CM (para anéis de colisão e^-e^+) e nós já deduzimos a fórmula para a secção eficaz diferencial para esse caso, Eq. (2.31),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.38)$$

onde já estamos a usar o sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$.

Em geral a amplitude depende dos spins do estado inicial e do estado final $\mathcal{M}(s_i, s_f)$. Na maior parte das experiências nós não escolhemos o spin dos estados iniciais nem medimos os spins do estado final. Devemos por isso, para comparar com os resultados experimentais, somar sobre todos os spins do estado final e tirar a média sobre as combinações de spin possíveis para o estado inicial, isto é, devemos calcular,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{n_{s_i}} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.39)$$

onde o n_{s_i} é o número de polarizações de spin do estado inicial (1/4 para a difusão de Bhabha). Para evitar para já a complicação de antipartículas, consideremos a amplitude do processo electrão-muão, na Eq. (5.31). Obtemos numa notação óbvia

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)]^* \quad (5.40)$$

Vemos portanto que vamos ter de lidar com expressões do tipo

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* \quad (5.41)$$

Mas calculando o complexo conjugado da matriz 1×1 devemos usar o conjugado hermítico. Assim

$$\begin{aligned} [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= u(b)^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) = \bar{u}(b)\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) \\ &\equiv \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde usámos o facto de que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e definimos

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \quad (5.43)$$

Obtemos portanto

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)\Gamma_1 \left[\sum_{s_b} u(b)\bar{u}(b) \right] \bar{\Gamma}_2 u(a)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_a} \bar{u}(a) \Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} u(a)_\beta \\
&= \sum_{s_a} u(a)_\beta \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} = (\not{p}_a + m_a)_{\beta\alpha} [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} \\
&= \text{Tr} [(\not{p}_a + m_a) \Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2] \tag{5.44}
\end{aligned}$$

onde usámos a relação

$$\sum_s u(a)_\alpha \bar{u}(a)_\beta = (\not{p}_a + m_a)_{\alpha\beta} \tag{5.45}$$

Comentários e generalizações

1. Este método foi utilizado pela primeira vez por Casimir e veio a ser conhecido por truque de Casimir.
2. A matriz Γ é sempre um produto de matrizes γ . Assim para calcular $\bar{\Gamma}$, é conveniente usar o resultado

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \tag{5.46}$$

que pode ser verificada diretamente a partir da definição. Em particular obtemos o resultado importante $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$.

3. Para spinores v (para as antipartículas) devemos usar

$$\sum_s v(a)_\alpha \bar{v}(a)_\beta = (\not{p}_a - m_a)_{\alpha\beta} \tag{5.47}$$

em particular

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{v}(a) \Gamma_1 v(b)] \bar{v}(b) \bar{\Gamma}_2 v(a) = \text{Tr} [(\not{p}_a - m_a) \Gamma_1 (\not{p}_b - m_b) \bar{\Gamma}_2] \tag{5.48}$$

5.5.1 Teoremas de traços de matrizes γ

Para usar o truque de Casimir temos de saber calcular traços de matrizes γ . Vamos aqui dar os resultados sob a forma de Teoremas, deixando a maior parte da demonstração para os exercícios.

Teorema 5.1 *O traço dum número ímpar de matrizes γ é zero.*

Dem:

$$\text{Tr} [\not{\phi}_1 \not{\phi}_2 \cdots \not{\phi}_n] = \text{Tr} [\not{\phi}_1 \cdots \not{\phi}_n \gamma_5 \gamma_5]$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Tr} [\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5] \\
 &= (-1)^n \text{Tr} [\not{a}_1 \cdots \not{a}_n]
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Então para n ímpar o traço é nulo.

Teorema 5.2 *Os traços de 0 e 2 matrizes γ são*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} 1 &= 4 \\
 \text{Tr}[\not{a}\not{b}] &= \text{Tr}[(\not{b}\not{a})] = \frac{1}{2}\text{Tr}[(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a})] = a \cdot b \text{Tr} 1 \\
 &= 4a \cdot b
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Teorema 5.3 *O traço de n matrizes γ obtém-se por recorrência a partir de traços de $n - 2$ matrizes γ .*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\not{a}_1 \cdots \not{a}_n] &= a_1 \cdot a_2 \text{Tr} [\not{a}_3 \cdots \not{a}_n] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} [\not{a}_2 \not{a}_4 \cdots \not{a}_n] \\
 &\quad + \cdots + a_1 \cdot a_n \text{Tr} [\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}]
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Este teorema tem um corolário importante,

Corolário: *Para 4 matrizes γ temos:*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4] &= a_1 \cdot a_2 \text{Tr} [\not{a}_3 \not{a}_4] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} [\not{a}_2 \not{a}_4] + a_1 \cdot a_4 \text{Tr} [\not{a}_2 \not{a}_3] \\
 &= 4 [a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3]
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Teorema 5.4 *Os traços com a matriz γ_5 obtém-se a partir dos seguintes resultados*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\gamma_5] &= 0 \\
 \text{Tr} [\gamma_5 \not{a}\not{b}] &= 0 \\
 \text{Tr} [\gamma_5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= -4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

O teorema seguinte não é sobre traços mas é importante pois permite reduzir o número de matrizes γ em alguns traços:

Teorema 5.5

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \\
\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c} \not{b} \not{a} \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu &= 2 [\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

e finalmente um último resultado muito útil,

Teorema 5.6

$$\text{Tr} [\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}] = \text{Tr} [\not{a}_{2n} \cdots \not{a}_1] \tag{5.55}$$

5.5.2 Difusão Bhabha

Estamos agora em posição de calcular a secção eficaz no referencial do CM. Para simplificar vamos considerar que $\sqrt{s} \gg m_e$ e vamos desprezar as massas do eletrão e positrão. Um cálculo simples dá então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4} \left\{ \frac{1}{t^2} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] - \frac{2}{st} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right\} \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Usando os teoremas sobre os traços podemos obter

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= 8 \frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} \\
\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= 8 \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} \\
\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= -8 \frac{(s+t)^2}{st}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

e portanto

$$\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right] \tag{5.58}$$

para a secção eficaz obtemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right]. \tag{5.59}$$

onde se usou a Eq. (5.38) com $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$ e fizemos ($\hbar = c = 1$)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{5.60}$$

5.5.3 Efeito de Compton

Vamos agora considerar o efeito de Compton. Na experiência usual o elétron é considerado em repouso, pelo que se trata duma colisão no referencial do laboratório. Vamos considerar a cinemática da Fig. 5.3. Não vamos deduzir a expressão para a secção eficaz diferencial desde o início pois já o fizemos para um caso parecido no problema 2.4, Eq. (2.48). Adaptando essa equação à nossa cinemática,

$$\begin{aligned} p_1 = k &= (k, 0, 0, k), \quad p_3 = k' = (k', k' \sin \theta, 0, k' \cos \theta) \\ p_2 = p &= (m_e, 0, 0, 0), \quad p_4 = p' = p + k - k' \end{aligned} \quad (5.61)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 m_e} \frac{k'^2}{k} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{|(k + m_e)k' - kk' \cos \theta|} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_e^2} \frac{k'^2}{k^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde no último passo se usou a cinemática do efeito de Compton,

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m_e}(1 - \cos \theta)}. \quad (5.63)$$

Para prosseguir com a nossa soma sobre as polarizações do estado final e média sobre as polarizações do estado inicial, temos de explicar o que se passa com o fotão. O resultado geral é (ver Problema 5.8),

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \text{termos proporcionais a } p_{\mu} \text{ ou } p_{\nu} \quad (5.64)$$

Como a invariância de gauge do eletromagnetismo assegura que os termos proporcionais a p_{μ} ou p_{ν} não contribuem (ver Problema 5.9), podemos simplesmente usar,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} \quad (5.65)$$

O cálculo agora resume-se ao cálculo dos traços. É algo laborioso mas o resultado final é simples. Obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^{\nu}] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \\ &= 8 [2m^4 + m^2(-p \cdot p' - p' \cdot k + 2p \cdot k) + (p \cdot k)(p' \cdot k)] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Igualmente

$$\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle = 8 [2m^4 + m^2(-p \cdot p' + p' \cdot k' - 2p \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k')] \frac{e^4}{(2p \cdot k')^2} \quad (5.67)$$

e finalmente para os termos cruzados

$$\begin{aligned} \langle [M_1 M_2^\dagger + M_1^\dagger M_2] \rangle &= \frac{8e^4}{4(k \cdot p)(k' \cdot p)} [2(k \cdot p)(p \cdot p') - 2(k \cdot k')(p \cdot p') \\ &- 2(p \cdot p')(p \cdot k') + m^2(-2k \cdot p - k \cdot p' + k \cdot k' - p \cdot p' + 2p \cdot k' + p' \cdot k') - m^4] \quad (5.68) \end{aligned}$$

Pondo tudo junto, e usando a nossa cinemática, obtemos a fórmula de Klein-Nishima,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[\left(\frac{k'}{k} \right) + \left(\frac{k}{k'} \right) - \sin^2 \theta \right]. \quad (5.69)$$

5.6 Produção de hádrões em colisões $e^- + e^+$

5.6.1 Hadronização

Na colisão $e^- + e^+$ podemos produzir um grande número de estados finais: $e^- + e^+$ (Bhabha), $\mu^- + \mu^+$, $\gamma + \gamma$ e em geral qualquer par de fermiões $f\bar{f}$. Podemos portanto ter também a produção de pares quark-antiquark, $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$. Se as energias foram baixas isso ocorre através do diagrama de QED indicado na Fig 5.4 Como os quarks não são estados livres (confinamento), quando estão a distâncias

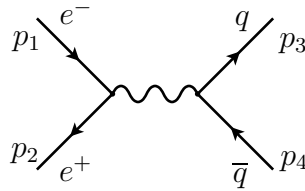


Figura 5.4: Difusão $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$.

da ordem da dimensão dos hádrões ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) a interação forte vai produzir muitos novos pares $q\bar{q}$ e glúões que finalmente se combinam para produzir os hádrões que são medidos no detetor. Este processo chama-se hadronização e está representado na Fig. 5.5 Quando estes acontecimentos são observados nos detetores eles mantêm a memória do acontecimento original e aparecem como dois jatos de partículas que aparecem em sentidos opostos (*back-to-back*) e apontando para as direções dos quarks iniciais que lhes deram origem, como representado no lado esquerdo da Fig. 5.6. Por vezes parecem acontecimentos com três jatos que podem ser interpretados como resultado da hadronização do glúão, um processo de ordem mais elevada, desde que esse glúão leve uma percentagem significativa da energia,

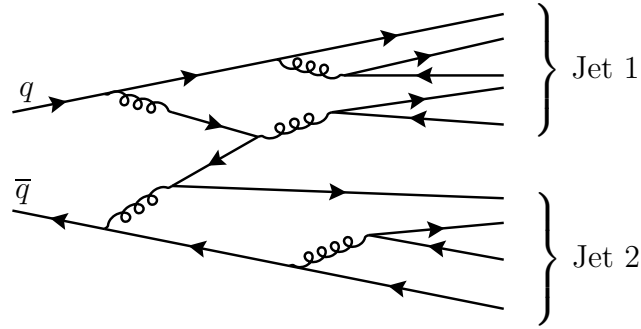


Figura 5.5: Processo de Hadronização

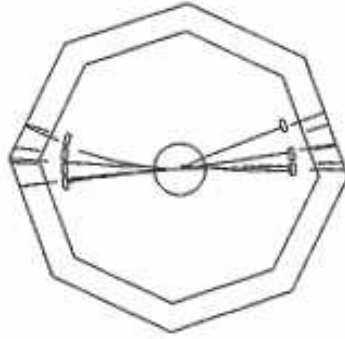


Fig. 8.2 A typical two-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

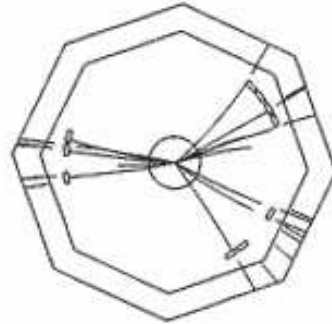


Fig. 8.3 A three-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

Figura 5.6: Acontecimentos com dois e três jets.

como representado na Fig. 5.7. De facto a observação deste acontecimentos são uma prova experimental da existência dos glúons, os portadores da força forte na chamada Cromodinâmica Quântica (QCD).

5.6.2 Processo elementar

Apesar de todas as complicações anteriores o processo elementar que está na base de todas estas considerações é um processo simples em QED (desde que as energias sejam tais que $\sqrt{s} \ll M_Z$),

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \tag{5.70}$$

que corresponde ao diagrama da Fig. 5.4. A amplitude é então

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] \tag{5.71}$$

onde Q_q é a carga do quark em unidades de e , isto é, $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$. Usando o truque de Casimir obtemos para a amplitude não polarizada, isto é, somando todos

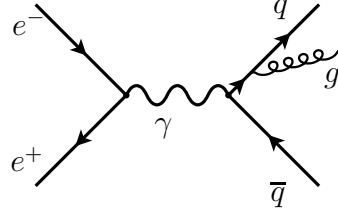


Figura 5.7: Processo elementar com emissão dum glúão

os spins finais e fazendo a média sobre os spins iniciais,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_q)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_q)\gamma_\nu] \quad (5.72)$$

onde $s = (p_1 + p_2)^2$. Usando os teoremas dos traços podemos obter,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + m_e^2(p_3 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_q^2] \\ &= Q_q^2 e^4 \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde usámos a cinemática para obter

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_e), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_e) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_q \sin \theta, 0, \beta_q \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_q \sin \theta, 0, -\beta_q \cos \theta) \\ \beta_e &= \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde β_e, β_q são as velocidades do eletrão e do quark no referencial do CM, respetivamente. Usando a Eq. (2.31) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_q}{\beta_e} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &= \frac{Q_q^2 e^4}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.75)$$

A secção eficaz obtém-se fazendo a integração final nas variáveis angulares com o resultado

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[1 + \frac{2m_q^2}{s} \right] \quad (5.76)$$

Notar nesta equação o limiar de produção. A energia no CM tem de ser maior que duas vezes a massa do quark para a reação ter lugar, isto é, $\sqrt{s} > 2m_q$ assegurando que as raízes quadradas são bem definidas. Quando $\sqrt{s} \gg m_e, m_q$ a expressão simplifica-se enormemente para dar,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s}. \quad (5.77)$$

5.6.3 A razão R

Quando começamos com uma energia do feixe mínima para aparecer o primeiro par de quarks e começamos a aumentar essa energia vamos passando os diferentes limiares de produção para as diferentes espécies de leptões e quarks. Este efeito pode ser descrito numa forma muito conveniente definindo a razão R ,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \quad (5.78)$$

Se usamos a expressão aproximada na Eq. (5.77) devemos obter

$$R(\sqrt{s}) = 3 \sum_i Q_i^2 \quad (5.79)$$

onde a soma é sobre todos os quarks tais que $\sqrt{s} > 2m_q$. O fator 3 vem porque cada quark aparece em 3 cores. Assim se estivermos a uma energia onde só podem ser produzidos os quarks u, d, s temos

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = 2 \quad (5.80)$$

Acima do limiar de produção do quarks c devemos ter

$$R = 2 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33 \quad (5.81)$$

e acima do limiar do b

$$R = \frac{10}{3} + 3 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67 \quad (5.82)$$

Se houve energia suficiente para produzir o quark top tínhamos $R = 5$. Temos assim um efeito de escada em que há medida que a energia aumenta o R vai subindo a escada.

Como compara isto com a experiência? Vemos na Fig. 5.8 o gráfico de R baseado em dados experimentais. Vemos que o andamento em patamares se confirma,

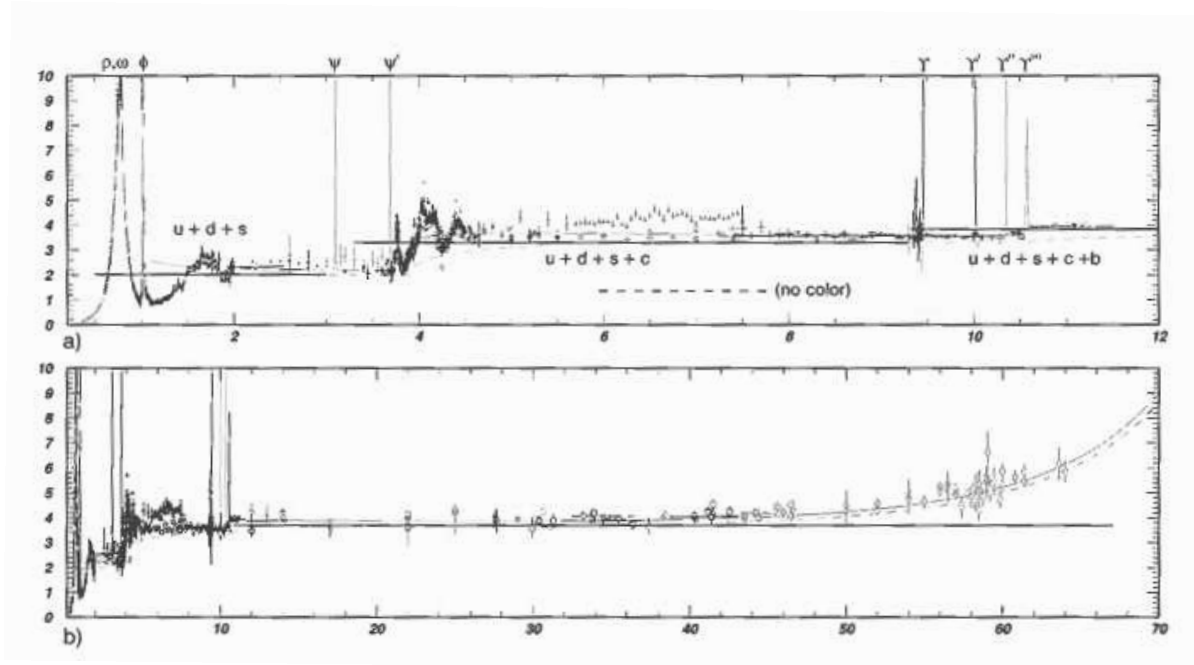


Figura 5.8: Gráfico de R baseado em dados experimentais. Tirado do Griffiths.

incluindo o fator 3 da cor. No entanto há zonas de ressonâncias que não são explicadas pelo argumento acima. Quando a reação tem a energia exata podem ser produzidos estados ligados quark-antiquark que aparecem como ressonâncias na figura: $\rho, \omega, \phi, \psi, \dots$. Mas se excluirmos estas ressonâncias o andamento geral confirma os cálculos e em particular constitui uma demonstração experimental da existência de tripletos de cor, a base para a construção da Cromodinâmica Quântica, a teoria das interações fortes. Voltaremos a esta teoria depois de vermos as teorias de gauge no capítulo 7.

Problemas capítulo 5

5.1 Considere os processos em QED:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma, \quad e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-, \quad \gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$$

- Desenhe os diagramas de Feynman para cada um destes processos.
- Escreva as respectivas amplitudes.

5.2 Utilize as expressões explícitas dos spinores u e v , Eq. (4.76) e Eq. (4.77) para mostrar as seguintes propriedades

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = \bar{v}(p, s)v(p, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (5.83)$$

$$u^\dagger(p, s)u(p, s') = -v^\dagger(p, s)v(p, s') = 2E\delta_{ss'} \quad (5.84)$$

$$\sum_s u(p, s)_\alpha \bar{u}(p, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.85)$$

$$\sum_s v(p, s)_\alpha \bar{v}(p, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.86)$$

5.3 Considere o processo $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$. Defina as variáveis de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (5.87)$$

Mostre que satisfazem a relação

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (5.88)$$

isto é, só duas delas são independentes.

5.4 Considere a definição $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ para qualquer combinação Γ de matrizes de Dirac.

- Para as matrizes da base Γ^A calcule $\bar{\Gamma}^A$.

b) Considere a matriz Γ definida por

$$\Gamma = \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \quad (5.89)$$

onde g_V e g_A são constantes. Mostre que

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \quad (5.90)$$

c) Calcule $\overline{\gamma^\mu P_L}$ e $\overline{\gamma^\mu P_R}$.

5.5 Em relação aos teoremas de traços de matrizes gama:

- a) Demonstre o teorema 5.3
- b) Demonstre o teorema 5.5
- c) Demonstre o teorema 5.6

5.6 Este problema destina-se a aprender a calcular os traços simples que foram usados no texto. Começamos por definir o seguintes traços:

$$T^{\mu\nu} = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu], \quad S^{\mu\nu} = \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu], \quad A^{\mu\nu} = \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_5] \quad (5.91)$$

a) Usando os teoremas dos traços, em particular as Eqs. (5.50), (5.52) e (5.53) mostre que

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= 4 g^{\mu\nu} \\ S^{\mu\nu} &= 4 [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)] \\ A^{\mu\nu} &= -4i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} \end{aligned} \quad (5.92)$$

- b) Verifique que $T^{\mu\nu}$ e $S^{\mu\nu}$ são tensores simétricos, $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ e que $A^{\mu\nu}$, é um tensor anti-simétrico, isto é $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. Verifique que a contração dum tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é sempre nula.
- c) Mostre que se tem

$$\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} = -2 (g^\alpha_\rho g^\beta_\sigma - g^\alpha_\sigma g^\beta_\rho) \quad (5.93)$$

Nota: Nos testes e exames as Eqs. (5.91), (5.92) e (5.93) serão sempre dadas no enunciado, se forem necessárias.

5.7 Calcule os traços da difusão de Bhabha, Eq. (5.57). Use os resultados do Problema 5.6.

5.8 Para entender a Eq. (5.64), veja o Complemento 4.1 de *Introdução à Teoria de Campo* [2].

5.9 Mostre que a amplitude do efeito de Compton se pode escrever na forma

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu(k') \quad (5.94)$$

Use $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ para mostrar que as relações seguintes se verificam

$$k_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} = k'_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 . \quad (5.95)$$

Isto justifica desprezar os termos proporcionais aos momentos dos fótons exteriores na soma sobre as polarizações, Eq. (5.64). **Sugestão:** Se tiver dificuldades veja Complemento 4.2 do livro *Introdução à Teoria de Campo* [2].

5.10 Para o efeito de Compton:

- a) Calcule os traços, Eqs. (5.66)-(5.68).
- b) Mostre que se obtém a fórmula de Klein-Nishima, Eq. (5.69).

Capítulo 6

As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

Seguimos aqui as secções 7.1 a 7.4 do livro do Bettini [13] e as secções 4.1 e 4.5 do meu livro FIE [5].

6.1 A teoria de Fermi

A teoria das interações fracas começou com a teoria de Fermi para o decaimento β .

$$n \rightarrow p + e + \nu \quad (6.1)$$

Na altura eram conhecidos o protão, o neutrão, o eletrão e o neutrino que foi precisamente introduzido para que a conservação da energia fosse satisfeita. Para explicar o decaimento 6.1 Fermi introduziu o seguinte lagrangeano

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma_\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu + \text{h.c.} \quad (6.2)$$

que corresponde ao diagrama de Feynman da Fig. 6.1. Com este lagrangeano pode-se

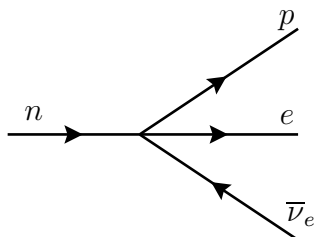


Figura 6.1: Decaimento β do neutrão

calcular a largura do decaimento. Obtemos para a amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1)\gamma^\alpha u(p) \bar{u}(k)\gamma_\alpha v(q_2) \quad (6.3)$$

De facto não podemos descrever os nucleões por ondas planas, mas temos que usar funções de onda nucleares. Isto resulta nalguma complicação em que não vamos aqui entrar [14]. Com algumas aproximações obtemos para o espectro de energia do eletrão emitido

$$N(E) = \frac{d\Gamma}{dE} = \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \quad (6.4)$$

onde E é a energia do eletrão e

$$\Delta = m_n - m_p \quad (6.5)$$

O espectro de energias está representado na Fig. 6.2

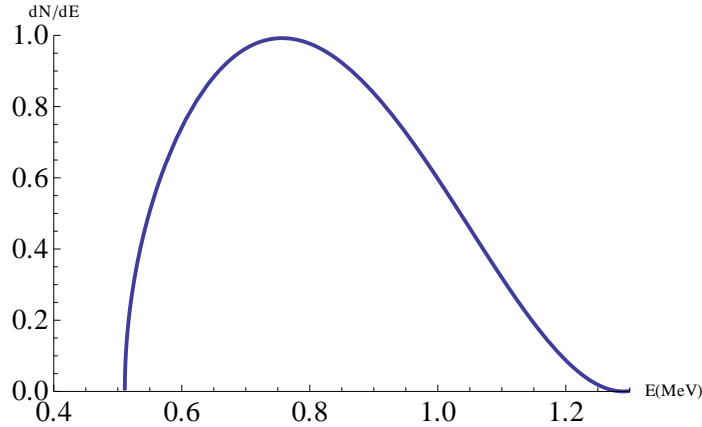


Figura 6.2: Espectro de energias do eletrão no decaimento β . As unidades são arbitárias

Para a largura total vem então

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{2G_\beta^2}{\pi^3} \int_{m_e}^{\Delta} \sqrt{E^2 - m_e^2} E(\Delta - E)^2 \\ &= 3.6 \times 10^{-3} G_\beta^2 \quad \text{todas as grandezas em MeV} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Conhecendo o tempo de vida média do neutrão obtinha-se um valor para G_β

$$G_\beta \simeq 1.4 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2} \quad (6.7)$$

Notar que o valor de G_β é ajustado para se obter o valor de Γ . O sucesso da teoria estava em prever um espectro $N(E)$ em acordo com o que era na altura medido.

6.2 A teoria V-A

6.2.1 Introdução

Depois do sucesso da teoria de Fermi, procurou-se estender o método a outros decaimentos radioativos. Para isso foi importante notar que o lagrangeano 6.2 se pode escrever na forma

$$\mathcal{L}_\beta = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} J_p^\alpha J_{e\alpha} + \text{h.c.} \quad (6.8)$$

onde J_e^α e J_p^α são as *correntes* definidas por

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha \psi_\nu, \quad J_p^\alpha = \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \quad (6.9)$$

Estas correntes são semelhantes à corrente eletromagnética em QED. Como vimos no capítulo 4, (ver a Ref. [2] para mais detalhes) estas correntes têm um carácter vetorial, isto é, numa transformação de Lorentz transformam-se como um vetor. O lagrangeano assim construído é portanto um escalar de Lorentz. Mas em 1936 Gamow e Teller [15] mostraram que a Eq. (6.2) não é única e que o lagrangeano escalar mais geral deveria ser uma mistura da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & c_1 \bar{\psi}_p \psi_n \bar{\psi}_e \psi_\nu & S \times S \\ & + c_2 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \psi_\nu & V \times V \\ & + c_3 \bar{\psi}_p \sigma^{\alpha\beta} \psi_n \bar{\psi}_e \sigma_{\alpha\beta} \psi_\nu & T \times T \\ & + c_4 \bar{\psi}_p \gamma^\alpha \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu & A \times A \\ & + c_5 \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu & P \times P \end{aligned}$$

e os coeficientes da combinação linear só podem ser determinados pela experiência. Na Eq. (6.10) estão indicadas as propriedades de transformação para transformações de Lorentz dos diferentes termos. Gamow e Teller mostraram que no limite não relativista se obtém

$$SS, VV \rightarrow \Delta J = 0 \quad (6.10)$$

$$AA, TT \rightarrow \Delta J = 0, \pm 1 \quad (6.11)$$

Portanto, enquanto que a descrição de Fermi ($V \times V$) poderia explicar transições com $\Delta J = 0$, alguma parte de $A \times A$ ou $T \times T$ deverá estar presente para explicar as transições com $|\Delta J| = 1$. Um grande trabalho experimental foi então empreendido para determinar os coeficientes c_i .

6.2.2 Violação de paridade nas interações fracas

Todo o trabalho anterior foi feito tendo como hipótese de base que a Paridade era conservada nas interações fracas, tal como o é no eletromagnetismo. Contudo, como

vimos no capítulo 3, em 1956 Lee e Yang [16] mostraram que esta ideia devia ser abandonada para explicar o chamado $\tau - \theta$ puzzle. Este consistia em compreender porque é que os dois decaimentos

$$\begin{aligned}\theta & : K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0 \\ \tau & : K^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-\end{aligned}\tag{6.12}$$

podiam ocorrer simultaneamente quando as paridades dos dois estados finais eram diferentes, isto é

$$P(\pi^+\pi^0) = +1 \quad ; \quad P(\pi^+\pi^+\pi^-) = -1\tag{6.13}$$

Isto poderia acontecer se a Paridade não fosse conservada nas interações fracas. Eles propuseram então um conjunto de experiências para testar esta ideia, e nos dois anos seguintes foi mostrado que de facto assim é, em particular na experiência de Wu *et al.*, [17]. Assim a construção de Gamow e Teller tem que ser modificada para incluir, por exemplo, termos da forma $V \times A$,

$$\bar{\psi}_p \gamma^\alpha \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\alpha \gamma_5 \psi_\nu\tag{6.14}$$

Era preciso recomeçar do início e comparar com a experiência de novo.

6.2.3 Neutrinos esquerdos e a corrente leptónica

Nesta busca experimental que levou à descoberta da violação da Paridade nas interações fracas uma descoberta importante que foi feita diz respeito aos neutrinos, nomeadamente que eles têm helicidade negativa. Como o projetor da helicidade negativa é

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}\tag{6.15}$$

isto quer dizer que

$$\psi_\nu = P_L \psi_\nu\tag{6.16}$$

Como consequência disto a corrente leptónica para o eletrão deverá ser

$$J_e^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}\tag{6.17}$$

o que também foi confirmado experimentalmente. Convém aqui notar que para uma partícula qualquer com massa, como o eletrão, se pode sempre escrever

$$\psi_e = P_L \psi_e + P_R \psi_e\tag{6.18}$$

Então a estrutura da corrente leptónica mostra que só a componente esquerda do eletrão participa na interação. De facto

$$\bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha P_L^2 \psi_\nu = \bar{\psi}_e P_R \gamma^\alpha P_L \psi_\nu$$

$$= \psi_e^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\alpha P_L \psi_\nu = \overline{(P_L \psi_e)} \gamma^\alpha P_L \psi_\nu \quad (6.19)$$

Se tivermos uma interação geral da forma $V - A$

$$\mathcal{L}_{int} = \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi \quad (6.20)$$

e se introduzirmos

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad (6.21)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R \end{aligned} \quad (6.22)$$

pois os termos cruzados são nulos. Mostremos isso para um deles. Obtemos

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \psi_R &= \psi^\dagger P_L \gamma^0 \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_R \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) P_L P_R \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde se usaram as propriedades de ortogonalidade dos projetores P_L e P_R . Isto quer dizer que uma corrente vetorial ou vetorial axial conserva a helicidade. Por outras palavras quer também dizer que pode ser construída para partículas que tenham só uma helicidade, como é o caso dos neutrinos. O mesmo não se passa para o termo de massa. O termo de massa usual de Dirac é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{massa} &= -m \bar{\psi} \psi \\ &= -m (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) (\psi_L + \psi_R) \\ &= -m \bar{\psi}_L \psi_R - m \bar{\psi}_R \psi_L \end{aligned} \quad (6.24)$$

pois

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \psi_L &= \overline{(P_L \psi)} P_L \psi = \psi^\dagger P_L \gamma^0 P_L \psi = \psi^\dagger \gamma^0 P_R P_L \psi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

e de igual modo para $\bar{\psi}_R \psi_R$. Como conclusão, o neutrino não poderá ter um termo de massa do tipo acima indicado¹.

¹De facto há a possibilidade de ter termos de massa do tipo de Majorana, que não serão discutidos aqui.

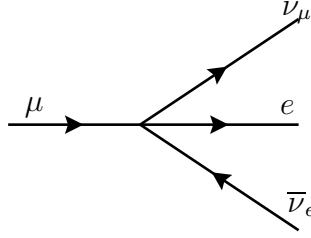


Figura 6.3: Decaimento do muão.

6.2.4 A interação corrente-corrente de Feynman e Gell–Mann

Fazendo a síntese de todo o trabalho iniciado com a teoria de Fermi, em 1958 Feynman e Gell-Mann [18] propuseram que as interações fracas deveriam ser descritas pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^{\mu\dagger} \quad (6.26)$$

onde

$$J^\mu = \ell^\mu + h^\mu \quad (6.27)$$

sendo ℓ^μ e h^μ as partes leptónica e hadrónica dessa corrente. Os resultados experimentais mostraram que a estrutura da corrente leptónica deveria ser do tipo $V - A$, isto é

$$\ell^\alpha = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e} + \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\mu} + \bar{\psi}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_\tau} \quad (6.28)$$

Quando a teoria foi proposta não existia o τ . Mas experimentalmente foi verificado que a estrutura para o τ era a mesma e que a intensidade relativa das três partes da corrente era igual. Este resultado é conhecido por universalidade da corrente fraca leptónica. A constante G_F que aparece em 6.26 é de facto ligeiramente diferente de G_β da teoria de Fermi. O seu valor podia ser determinado calculando o decaimento do muão descrito pelo diagrama da Fig. 6.3 e que não tem as complicações da física hadrónica referidas a propósito do decaimento do neutrão.

A amplitude que resulta de 6.26 é

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p) \bar{u}(k) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (6.29)$$

e um cálculo simples (ver por exemplo a Ref. [2]) dá (desprezando m_e),

$$\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (6.30)$$

donde se conclui que

$$G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (6.31)$$

A parte hadrónica da corrente fraca, h^α , será estudada mais adiante. Vejamos aqui com um pouco mais de detalhe a corrente leptónica. Para isso notemos primeiro que podemos escrever

$$\ell^\alpha = 2\bar{\psi}_L(e)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_e) + 2\bar{\psi}_L(\mu)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\mu) + 2\bar{\psi}_L(\tau)\gamma^\alpha\psi_L(\nu_\tau) \quad (6.32)$$

isto é, a corrente escreve-se completamente em termos das componentes esquerdas dos campos. Definimos agora um *isospin esquerdo* para os leptões, agrupando o leptão carregado e o seu neutrino num dubleto da forma

$$\chi_L(e) \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \chi_L(\tau) \equiv \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \quad (6.33)$$

Então a corrente leptónica escreve-se

$$\ell^\alpha = 2 \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) + \bar{\chi}_L(\mu)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\mu) + \bar{\chi}_L(\tau)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(\tau) \right] \quad (6.34)$$

onde

$$\bar{\chi}_L(e) = \left[\bar{\nu}_e, \bar{e} \right] \quad (6.35)$$

e expressões semelhantes para os outros leptões, e onde definimos

$$\tau^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \quad (6.36)$$

Notar que

$$\tau^-\chi_L(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \quad (6.37)$$

Somos assim tentados a definir uma corrente de isospin esquerdo através de

$$j_L^{i\alpha} = \frac{1}{2} \left[\bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^i\chi_L(e) + \dots \right] \quad (6.38)$$

Então se introduzirmos a notação

$$j_L^{\pm\alpha} \equiv \frac{j_L^{1\alpha} \pm ij_L^{2\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (6.39)$$

vemos que

$$\ell^\alpha = 2\sqrt{2} (j_L^-)^\alpha \quad (6.40)$$

e que

$$\ell^{\alpha\dagger} = 2\sqrt{2} (j_L^+)^\alpha \quad (6.41)$$

Embora estejamos a introduzir um formalismo adaptado a $SU_L(2)$ o lagrangeano na Eq. (6.26) não é invariante para esse grupo pois falta o termo² $j_{L\mu}^{3\dagger} j_L^{3\mu}$. Dito

²De facto considerando só a parte do eletrão e seu neutrino obtemos

$$\mathcal{L}_{lep} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\chi}_L(e)\gamma^\alpha\tau^-\chi_L(e) \bar{\chi}_L(e)\gamma_\alpha\tau^+\chi_L(e) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (j_L^{1\alpha} j_{L\alpha}^1 + j_L^{2\alpha} j_{L\alpha}^2)$$

de outro modo, todos os resultados experimentais conhecidos até à década de sessenta indicavam que a corrente fraca era carregada pois $\Delta Q \neq 0$. Um termo como $j_{L\mu}^{3\dagger} J_L^{3\mu}$ que faria a Eq. (6.26) invariante para transformações de $SU_L(2)$, implicaria a existência de correntes fracas neutras, o que só viria a ser descoberto mais tarde. Vemos assim que a parte leptónica do lagrangeano de Feynman e Gell-Mann sugeria já que o grupo de simetria fosse $SU_L(2)$ e a descoberta das correntes neutras veio confirmá-lo, como discutiremos no capítulo 9.

6.3 As interações fracas dos hadrões

6.3.1 Universalidade e a teoria de Cabibbo

As interações fracas dos hadrões são um pouco mais complicadas. Parte dessa complicação resulta, claro, das próprias interações fortes e da sua propriedade de *confinamento*, que quer dizer que a teoria fundamental é simples de escrever em termos dos quarks mas que estes não são partículas livres, só aparecendo na natureza como estados ligados. Assim todos os cálculos de interações com hadrões são muito difíceis. Nós apresentaremos primeiro os resultados em termos das correntes dos hadrões, mas depois traduziremos esses resultados para o lagrangeano ao nível dos quarks.

Do ponto de vista das interações fracas, há dois tipos principais de correntes hadrónicas. O primeiro é relevante para o decaimento β do neutrão representado na Fig. 6.1. Dizemos que este decaimento corresponde a $\Delta S = 0$, isto é não há variação do número quântico estranheza (é zero para todas as partículas envolvidas). Há no entanto outro tipo de decaimentos em que $\Delta S = \pm 1$, como por exemplo

$$\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e \tag{6.42}$$

representado na Fig. 6.4. A parte da corrente leptónica é igual, mas a parte

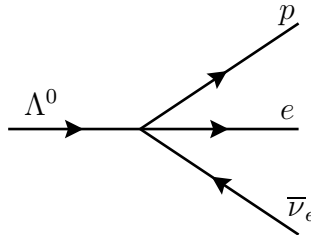


Figura 6.4: O decaimento $\Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$.

hadrónica tem agora $\Delta S = 1$ ($\Lambda^0 = uds$). Além disso, a parte hadrónica também é carregada, tal como para o decaimento do neutrão. Os resultados experimentais podem ser resumidos da forma seguinte

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \tag{6.43}$$

onde tanto a parte $\Delta S = 0$, $h_\mu^{(0)}$, como a parte $\Delta S = 1$, $h_\mu^{(1)}$, têm a forma $V - A$, isto é

$$\begin{aligned} h_\mu^{(0)} &= V_\mu^{(0)} - A_\mu^{(0)} \\ h_\mu^{(1)} &= V_\mu^{(1)} - A_\mu^{(1)} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Considerações de simetria relativas ao grupo $SU(3)$ para as interações fortes dos quarks u , d e s , levaram Cabibbo em 1963 [19] a propor que

$$g_V^2 + g_S^2 = 1 \quad (6.45)$$

o que foi verificado experimentalmente. Em vez de g_V e g_S , é mais normal introduzir um ângulo designado por *ângulo de Cabibbo*, tal que

$$g_V = \cos \theta_c \quad ; \quad g_S = \sin \theta_c \quad (6.46)$$

Experimentalmente verifica-se que

$$\sin \theta_c \simeq 0.22 \quad (6.47)$$

Em resumo o facto essencial é que há uma diferença de intensidade entre a corrente leptónica e as duas partes da corrente hádrónica. Mais concretamente se tomarmos a corrente leptónica como referência temos a situação descrita na Tabela 6.1 o que mostra que a universalidade é menos perfeita no sector hádrónico.

Corrente	Intensidade
ℓ_α	1
$h_\alpha^{(0)}$	$\cos \theta_c$
$h_\alpha^{(1)}$	$\sin \theta_c$

Tabela 6.1: Intensidade relativa das correntes fracas leptónica e hádrónica.

Estes factos permitem-nos descrever agora as correntes hádrónicas ao nível dos quarks. A corrente hádrónica tem então a forma seguinte

$$h^\alpha = \cos \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_d + \sin \theta_c \bar{\psi}_u \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \psi_s . \quad (6.48)$$

A ideia é que a interação que transforma um neutrão

$$n = (udd) \quad ; \quad Q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (6.49)$$

num próton

$$p = (uud) \quad ; \quad Q_p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \quad (6.50)$$

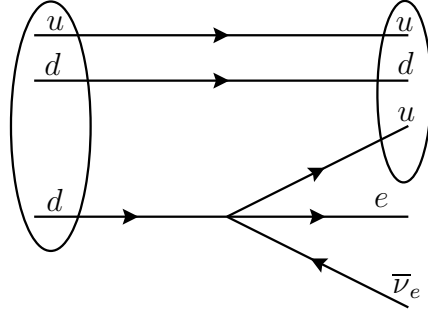


Figura 6.5: Decaimento $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ em termos de quarks.

deve ser aquela que leva um quark $d \rightarrow u$ ($\Delta Q = 1$) e em termos de quarks o decaimento β seria representado nesta aproximação pela Fig. 6.5 Claro que o confinamento torna esta descrição demasiado simplista, mas a hipótese é que a estrutura da teoria ao nível do lagrangeano em termos de quarks está correta. Não nos preocupando mais com as complicações das interações fortes, vejamos melhor a estrutura em termos dos campos dos quarks. Como o u e d diferem numa unidade de carga, as correntes $h_\alpha^{(0)}$ e $h_\alpha^{(1)}$ são correntes carregadas, tal como acontecia para a corrente leptónica. Por outro lado são também correntes esquerdas. Vejamos se é possível dar-lhes uma forma onde apareçam sinais do grupo $SU_L(2)$. Para isso observemos que

$$\begin{aligned} h^\alpha &= \cos \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) s \\ &= \bar{u} \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) (d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) \end{aligned} \quad (6.51)$$

onde passámos a representar os campos pelo seu nome, isto é, por exemplo para o quark u , $u \equiv \psi_u$. Se olharmos para a equação anterior somos levados a introduzir um dubleto de quarks da forma

$$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \quad (6.52)$$

onde

$$d_c \equiv d \cos \theta_c + s \sin \theta_c \quad (6.53)$$

Então a corrente pode ser escrita na forma

$$h^\alpha = 2\bar{Q}_L \tau^+ Q_L \quad (6.54)$$

onde

$$\tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \quad (6.55)$$

Na Eq. (6.52) o índice L quer dizer

$$Q_L = \begin{pmatrix} P_L u \\ P_L d_c \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

Mais uma vez para que o lagrangeano (6.26) tenha invariância para $SU_L(2)$ falta a componente neutra

$$h^{3\alpha} = 2\sqrt{2}\bar{Q}_L\gamma^\alpha\tau^3Q_L \quad (6.57)$$

6.3.2 O mecanismo de GIM e a descoberta do charm

Como vimos a teoria de Cabibbo para as correntes carregadas permite escrever a corrente hadrónica carregada através de

$$h_\alpha^+ = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^+Q_L \quad ; \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_{cL} \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

onde o sinal + em h_α^+ quer dizer que a corrente aumenta a carga por uma unidade, isto é

$$\Delta Q = Q(u) - Q(d) = +1 \quad (6.59)$$

De igual modo podemos introduzir a corrente que diminui a carga por uma unidade,

$$h_\alpha^- = 2\bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^-Q_L \quad (6.60)$$

e portanto o lagrangeano para a parte hadrónica será³

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{had}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha h^{\alpha\dagger} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} h_\alpha^- h^{+\alpha} \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} (h_\alpha^1 h^{1\alpha} + h_\alpha^2 h^{2\alpha}) \end{aligned} \quad (6.61)$$

onde

$$h_\alpha^i = \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^iQ_L \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (6.62)$$

Tal como para o sector leptónico somos levados a pensar se não falta o termo $h_\alpha^3 h^{3\alpha}$ para ter o lagrangeano (6.61) invariante para $SU_L(2)$. Ora a corrente h_α^3 escreve-se

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L\gamma_\alpha\tau^3Q_L \\ &= \bar{u}_L\gamma_\alpha u_L - \bar{d}_{cL}\gamma_\alpha d_{cL} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Esta corrente tem $\Delta Q = 0$ e é portanto uma corrente neutra. A questão é então saber se existem correntes neutras na parte hadrónica das interações fracas. Experimentalmente verificou-se que sim, mas só com $\Delta S = 0$, isto é, não havia, ou eram extremamente suprimidas, as correntes neutras com mudança de estranheza. Isto põe um problema à interpretação acima pois o termo $\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL}$ contém partes com $\Delta S \neq 0$. De facto

$$\bar{d}_{cL}\gamma^\alpha d_{cL} = \cos^2\theta_c \bar{d}_L\gamma^\alpha d_L + \sin^2\theta_c \bar{s}_L\gamma^\alpha s_L$$

³Estamos a considerar neste ponto que há só os quarks u, d, s . Mais à frente veremos como aparecem os outros.

$$+ \sin \theta_c \cos \theta_c (\bar{d}_L \gamma^\alpha s_L + \bar{s}_L \gamma^\alpha d_L) \quad (6.64)$$

e o último termo tem $\Delta S \neq 0$. Portanto se quisermos insistir na simetria $SU_L(2)$ com a conseqüente introdução de h_α^3 , temos que resolver este problema. Em 1970, Glashow, Iliopoulos e Maiani [20] resolveram esta questão numa forma muito elegante. Para isso postularam a existência dum segundo dubleto de $SU_L(2)$ onde apareceria um novo quark de carga $Q = 2/3$, designado por *charm* e a combinação ortogonal a d_c designada agora por s_c ,

$$s_c = -\sin \theta_c + s \cos \theta_c \quad ; \quad Q = -\frac{1}{3} \quad (6.65)$$

Designemos esse dubleto por

$$Q'_L = \begin{pmatrix} c_L \\ s_{cL} \end{pmatrix} \quad (6.66)$$

Então a corrente neutra completa deverá ser

$$\begin{aligned} h_\alpha^3 &= \bar{Q}_L \gamma_\alpha \tau^3 Q_L + \bar{Q}'_L \gamma_\alpha \tau^3 Q'_L \\ &= \bar{d}_L \gamma_\alpha d_L + \bar{s}_L \gamma_\alpha s_L \end{aligned} \quad (6.67)$$

pois os termos cruzados na Eq. (6.64) cancelam agora exatamente. A este mecanismo dá-se o nome de *mecanismo de GIM*. Na altura em que o quark c foi proposto não havia ainda evidência experimental para ele. Este facto foi atribuído por GIM a ele dever ser relativamente pesado. É para crédito de GIM que eles não só propuseram o quark c como também forneceram uma estimativa para a sua massa. O argumento é o seguinte. Tomemos o decaimento

$$K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^- \quad (6.68)$$

É um decaimento com corrente neutra e $\Delta S \neq 0$ pelo que não deveria existir de acordo com o mecanismo de GIM. Na realidade não é assim e experimentalmente verifica-se que existe, embora seja extremamente raro. De facto

$$BR(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-) \equiv \frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K_L^0 \rightarrow \text{tudo})} = (6.3 \pm 1.1) \times 10^{-9} \quad (6.69)$$

Como é que isto se enquadra no que dissemos acima? Muito simplesmente o mecanismo de GIM proíbe interações de corrente neutra com $\Delta S \neq 0$ somente ao nível árvore. Em ordem superior tais processos poderão existir. Assim para este processo podemos temos os dois diagramas da Fig. (6.6). Comparando os acoplamentos nos vértices o diagrama com o quark u tem uma amplitude

$$M_u \propto \sin \theta_c \cos \theta_c \quad (6.70)$$

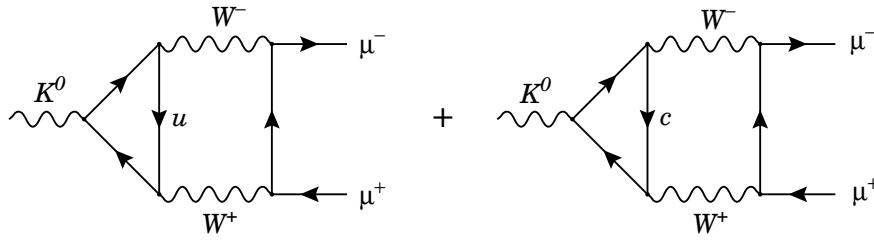


Figura 6.6: Diagramas para $K_L^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

enquanto que o diagrama com o quark c tem a amplitude

$$M_c \propto -\sin \theta_c \cos \theta_c \quad (6.71)$$

Tudo o mais é igual exceto a massa dos quarks. Se $m_u = m_c$ os dois diagramas cancelariam exatamente dando uma contribuição zero em conflito com a Eq. (6.69). Se $m_c \gg m_u$ o segundo diagrama será muito pequeno (não esquecer a massa no denominador do propagador do quark) e GIM calcularam que a contribuição do primeiro diagrama era demasiado grande para comparar com o valor observado experimentalmente. Para satisfazer o valor experimental a massa do quark c deveria estar num intervalo não muito largo. Eles encontraram

$$1 \text{ GeV} < m_c < 3 \text{ GeV} \quad (6.72)$$

em comparação com o valor hoje aceite

$$m_c = 1.4 \text{ GeV} \quad (6.73)$$

Mais uma vez a via da simetria obtinha resultados importantes. Com o mecanismo de GIM é possível promover a simetria da parte hadrónica do lagrangeano fraco ao grupo $SU_L(2)$.

6.4 A hipótese do bóson vetorial intermédio

Como vimos a teoria de Fermi foi motivada pela analogia com QED. Mas essa analogia é imperfeita pois não há o análogo do fóton, o portador da interação eletromagnética. Assim, desde muito cedo apareceu a ideia de que deveria existir o análogo do fóton para as interações fracas. Esse campo, designado por W , deveria ser também vetorial e carregado, pois as correntes consideradas até então eram carregadas. Na linguagem dos diagramas de Feynman, devíamos ter para o decaimento do muão o diagrama da Fig. (6.7) e as interações fracas seriam então mediadas pelo W da mesma maneira que as interações eletromagnéticas são mediadas pelo fóton. Ao W foi dado na altura o nome de *Bosão Vetorial Intermédio* ou IVB atendendo

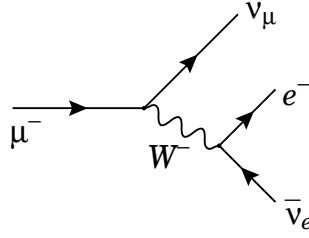


Figura 6.7: Decaimento do múon com bóson vetorial intermédio.

às iniciais em inglês. A ideia seria então que o lagrangeano na Eq. (6.26) seria substituído por um outro do tipo

$$\mathcal{L}_{weak} = g_w J_\mu W^\mu + \text{h.c.} \quad (6.74)$$

onde g_w é agora uma constante de acoplamento sem dimensões. Para tornar a teoria completa precisamos de saber o seu propagador. Para isso necessitamos da equação de onda para partículas de spin 1 com massa. Essa equação, designada por *equação de Proca* e escreve-se

$$(\square + m^2)W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu = J^\mu \quad (6.75)$$

O propagador é então a função de Green solução da equação

$$[(\square + m^2)g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu] G_F^{\nu\rho}(x - x') = ig^{\mu\rho} \delta^4(x - x') \quad (6.76)$$

Passando para o espaço dos momentos obtemos

$$[(-k^2 + m^2)g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu] G_F^{\nu\rho}(k) = ig^{\mu\rho} \quad (6.77)$$

que tem como solução (ver Problema 4.2)

$$G_F^{\nu\rho} = i \frac{-g^{\nu\rho} + \frac{k^\nu k^\rho}{m^2}}{k^2 - m^2} \quad (6.78)$$

Então o elemento de matriz para o decaimento do μ^- será da forma

$$\mathcal{M} = g_w^2 J_\mu G_F^{\mu\nu} J_\nu \quad (6.79)$$

e portanto se $k^2 \ll m^2$ devemos ter

$$G_F \simeq \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (6.80)$$

Se $g \sim e$ então

$$m_W \sim e \sqrt{G_F} \sim 90 \text{ GeV} \quad (6.81)$$

o que justificaria a aproximação acima. Veremos mais à frente, no quadro do Modelo Standard, qual a relação exata entre G_F , g_w e m_W .

6.5 Problemas com a teoria corrente-corrente

6.5.1 Violação da unitariedade na interação de Fermi

Apresentámos nas secções anteriores uma teoria que descreve toda a fenomenologia conhecida das interações fracas em finais da década de sessenta. Contudo a teoria apresenta uma série de dificuldades que passamos a rever brevemente. Começemos pela interação pontual de 4 fermiões de Fermi (modificada por Feynman e Gell-Mann). Consideremos o processo

$$\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \quad (6.82)$$

descrito neste modelo pelo diagrama da Fig. (6.8). Como os problemas que vamos

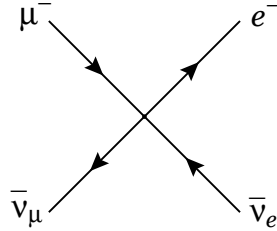


Figura 6.8: Diagrama para $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$.

exibir ocorrem para $\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu$, vamos desprezar essas massas. Então

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}(p_2)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(p_1) \bar{u}(q_1)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)v(q_2) \quad (6.83)$$

o que dá

$$\begin{aligned} \overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= 4G_F^2 s^2 (1 + \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (6.84)$$

e

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s (1 + \cos \theta)^2 \quad (6.85)$$

A secção eficaz total será então

$$\sigma = \frac{g_F^2}{3\pi} s \quad (6.86)$$

Mas por outro lado, a secção eficaz de difusão pode-se escrever na forma geral

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_J (2J + 1) |f_J|^2 \quad (6.87)$$

104 Capítulo 6. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

onde k é o momento no centro de massa e f_J é a onda parcial correspondente ao momento angular J . Pode-se mostrar em geral, usando argumentos de unitariedade ou, o que é o mesmo, de conservação de probabilidade, que

$$f_J = e^{i\delta_J} \sin \delta_J \quad (6.88)$$

e portanto

$$|f_J| \leq 1 \quad (6.89)$$

donde se obtém

$$\sigma_J \leq \frac{4\pi(2J+1)}{k^2} = \frac{16\pi(2J+1)}{s} \quad (6.90)$$

o que mostra que σ_J decresce com s . Mas pode-se mostrar que este processo corresponde a $J = 1$ (ver problema 4.4) e para a secção eficaz não polarizada deveremos ter

$$\sigma \leq \frac{24\pi}{s} \quad (6.91)$$

o que entra em conflito com a Eq. (6.86) para

$$\sqrt{s} \geq 1.5 \times 10^3 \text{ GeV} \quad (6.92)$$

A dificuldade com a teoria pontual pode ser relacionada com o facto da constante G_F ter dimensões. De facto

$$[G_F] = M^{-2} \quad (6.93)$$

mas

$$[\sigma] = L^2 = M^{-2} \quad (6.94)$$

e portanto a energias acima das massas dos leptões um argumento puramente dimensional dá

$$\sigma \sim G_F^2 s \quad (6.95)$$

dado que a secção eficaz deverá ser proporcional a G_F^2 . Isto foi exactamente o que encontramos.

6.5.2 Violação de unitariedade no modelo IVB

O argumento anterior podia levar-nos a pensar que a dificuldade desapareceria no modelo com o bosão vetorial intermédio (IVB). Isto porque aí

$$G_F \sim \frac{g_w^2}{m_W^2} \quad (6.96)$$

e poderia acontecer que a muita alta energia

$$\sigma \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (6.97)$$

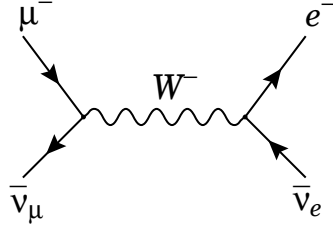


Figura 6.9:

como acontece, por exemplo no processo $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ em QED. Vamos mostrar que embora o comportamento seja melhor no modelo IVB, ainda não resolve todos os problemas. Voltemos ao processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ que agora se representa na Fig. (6.9).

A amplitude é agora

$$\mathcal{M} = g_w^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_W^2}}{k^2 - m_W^2} \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (6.98)$$

Poder-se-ia pensar que os fatores de momento no numerador do propagador do W iriam piorar o comportamento para valores elevados da energia no centro de massa. Tal não é verdade, pois uma vez utilizada a equação de Dirac, esses termos vão ser proporcionais à massa dos leptões que desprezamos no limite das altas energias. Então para $\sqrt{s} \gg m_W$ obtemos

$$\mathcal{M} \simeq \frac{g_w^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(q_2) \quad (6.99)$$

o que comparado com a Eq. (6.83) mostra que

$$G_F \rightarrow \frac{g_w^2}{s} \quad (6.100)$$

Então o cálculo da secção eficaz dá

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-) \sim \frac{g_w^2}{s} \quad (6.101)$$

o que está de acordo com a unitariedade. Como dissemos atrás, embora deixe de haver problema para este processo, outros há em que os problemas persistem. Para vermos isso consideremos o processo

$$e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^- \quad (6.102)$$

no quadro do modelo IVB. Temos então o diagrama da Fig. (6.10). A amplitude é

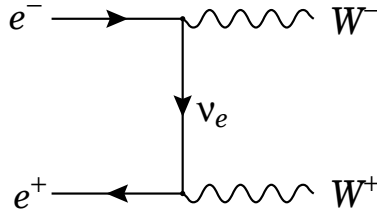


Figura 6.10: Colisão $e^- + e^+ \rightarrow W^+ + W^-$.

proporcional a

$$\mathcal{M} \sim g_w^2 \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) \epsilon_\mu^*(q_2, \lambda_2) \bar{v}(p_2) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \frac{\not{p}_1 - \not{q}_1}{(p_1 - q_1)^2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \quad (6.103)$$

No limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ obtemos (ver Problema 6.7)

$$|\overline{M}|^2 \sim \frac{g_w^4}{m_W^4} s f(\theta) \quad (6.104)$$

o que mostra que temos novamente o mesmo problema que na teoria pontual de Fermi, como se vê comparando com a Eq. (6.84). Um estudo mais detalhado mostra que o problema está na polarização longitudinal dos W 's (ver Problema 6.8). Notar que o processo semelhante

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma \quad (6.105)$$

em QED não tem qualquer problema. Podemos assim suspeitar que a invariância de gauge de QED, relacionada com a massa zero do fóton, e a ausência de polarização longitudinal, deve ser a chave do problema.

Problemas capítulo 6

6.1 Mostre que da equação de Dirac se obtém para as componentes ψ_L e ψ_R

$$\begin{aligned} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m\psi_R \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (6.106)$$

Comente este resultado.

6.2 Resolva a Eq. (6.77) para encontrar o propagador duma partícula de spin 1 com massa. Para isso faça

$$G_F^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} A(k^2) + k^\mu k^\nu B(k^2) \quad (6.107)$$

e determine as funções invariantes $A(k^2)$ e $B(k^2)$.

6.3 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$. Mostre que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_f^2}{16\pi^2} s(1 + \cos\theta)^2 \quad (6.108)$$

e

$$\sigma = \frac{g_F^2}{3\pi} s \quad (6.109)$$

6.4 Considere o problema 6.3 Mostre que no referencial do centro de massa o momento angular é $J = 1$. Explique então porque é que

$$M \propto (1 + \cos\theta) \quad (6.110)$$

6.5 Considere o processo $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$. Mostre que

a) A secção eficaz diferencial é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi} s \quad (6.111)$$

b) A secção eficaz total é dada por

$$\sigma = \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (6.112)$$

108 Capítulo 6. As Interações Fracas: do Modelo de Fermi à Teoria V-A

c) Mostre que no C.M. temos só $J = 0$. Use esse facto para extrair um limite a partir do qual a unitariedade é violada.

6.6 Considere o processo $\bar{\nu}_\mu + \mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$ na teoria IVB. Calcule a secção eficaz total e mostre que está de acordo com a Eq. (6.101).

6.7 Considere o processo $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ na teoria IVB. Calcule $d\sigma/d\Omega$ e σ e mostre que no limite $\sqrt{s} \gg m_e, m_W$ obtemos

$$\sigma \simeq \tag{6.113}$$

6.8 Mostre que o processo $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ só apresenta problemas no que diz respeito à unitariedade, para a polarização longitudinal do W . Para isso calcule separadamente a contribuição das polarizações transversais e longitudinais.

Capítulo 7

Invariância de Gauge

Aqui seguimos as secções 10.1 a 10.2 do Griffiths [1] e o capítulo 2 do meu texto FIE [5].

7.1 Lagrangeanos em mecânica clássica

Em mecânica clássica a equação fundamental é a lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad (7.1)$$

Se um sistema for conservativo então a força pode ser obtida duma função potencial, $U(\vec{r})$, através da relação 5

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad (7.2)$$

e portanto as equações do movimento escrevem-se

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U . \quad (7.3)$$

A mesma dinâmica pode ser obtida num formalismo alternativo, designado por formalismo lagrangeano. Aí começa-se por definir o lagrangeano (ou função de Lagrange) através da relação

$$L = T - U \quad (7.4)$$

onde T é a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.5)$$

e U a energia potencial. As equações da dinâmica resultam de exigir que a ação definida como o integral do lagrangeano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L \quad (7.6)$$

seja estacionária ($\delta S = 0$) para a trajetória da partícula. Este requisito conduz às chamadas equações de Euler-Lagrange, que se escrevem

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (7.7)$$

para um sistema com n coordenadas q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ e onde se definiu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} . \quad (7.8)$$

Aplicando a um problema a três dimensões obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = mv_i \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\nabla_i U \quad (7.10)$$

e a Eq. (7.7) conduz à mesma Eq. (7.3).

A este nível parece uma complicação desnecessária. No entanto, os lagrangeanos são muito úteis por duas razões. Primeiro porque alguns problemas são mesmo mais fáceis de resolver usando este formalismo (por exemplo pêndulos acoplados), e em segundo lugar porque as simetrias conduzem naturalmente a leis de conservação. De facto já discutimos no capítulo 3 esta relação. Por exemplo, se L não depender das coordenadas, a Eq. (7.7) imediatamente nos diz que o momento linear é conservado.

7.2 Lagrangeanos em teoria de campo

Os lagrangeanos em teoria de campo relativista têm uma importância fundamental. Isto deve-se fundamentalmente à importância que as simetrias têm na descrição das interações fundamentais da Natureza e essas simetrias são implementadas duma maneira muito mais simples nos lagrangeanos. Em mecânica clássica as variáveis dependem do tempo, $x_i(t)$, enquanto que em teoria de campo lidamos com campos que dependem do ponto do espaço tempo $x^\mu = (t, \vec{x})$, por exemplo para um campo escalar, $\phi(x)$.

Não vamos aqui fazer uma dedução da passagem de sistemas com um número finito de graus de liberdade para a situação em teoria do campo onde temos infinitos graus de liberdade. Vamos só dar o resultado sobre a forma de dicionário, conforme indicado na Tabela 7.1. É fácil de verificar que para o campo real de Klein-Gordon a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (7.11)$$

reproduz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (7.12)$$

Sistemas Finitos graus liberdade	Teoria do Campo
t	x^μ
q	$\phi(x)$
\dot{q}	$\partial_\mu \phi(x)$
$S = \int dt L(q, \dot{q})$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

Tabela 7.1: Dicionário para lagrangeanos em teoria de campo.

Para o campo de Dirac temos que tratar o spinor e o seu adjunto como graus de liberdade independentes (tal como acontece no campo escalar complexo, ver problema 7.4). Assim é fácil de ver que a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

conduz à equação de Dirac. De facto As equações de Euler-Lagrange são, para o caso do campo de Dirac,

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \psi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \quad (7.13)$$

Do lagrangeano, Eq. (7.13), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi \quad (7.14)$$

e portanto

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (7.15)$$

como queríamos mostrar. A densidade Lagrangeana de Dirac tem uma propriedade notável. É invariante para as transformações

$$\psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad ; \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi} e^{-i\alpha} \quad (7.16)$$

com α constante. Isto corresponde a redefinir a fase da função de onda, que certamente é arbitrária. Veremos na secção seguinte as implicações que esta observação terá.

Antes de terminar consideremos mais dois exemplos, o caso dum campo de spin 1 com massa e o caso do fóton, spin 1 sem massa.

Exemplo 7.1 Considere o lagrangeano de Proca para uma partícula de spin 1 com massa,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (7.17)$$

Onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.18)$$

Vamos deduzir as equações de Euler-Lagrange. Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (7.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu \quad (7.20)$$

e portanto as equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (7.21)$$

que foi a equação de movimento que usámos no capítulo anterior quando discutimos o bóson vetorial intermédio.

Exemplo 7.2 Considere o lagrangeano de Maxwell com interação com uma corrente exterior,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (7.22)$$

Obtemos facilmente as equações de Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu . \quad (7.23)$$

7.3 Invariância de gauge. O eletromagnetismo

Nas transformações consideradas na secção anterior o parâmetro α era constante. A invariância *global* queria então dizer que a escolha das fases era arbitrária e que se escolhêssemos as fases doutra maneira ao mesmo tempo em todos os pontos do espaço-tempo a teoria seria idêntica. Dissemos no capítulo 3 que a existência destas invariâncias implicava que houvesse quantidades conservadas no tempo.

Posta a questão nestes termos, a pergunta que surge naturalmente é saber se há teorias em que a escolha das convenções das fases pode ser feita localmente, isto é, diferente para cada ponto do espaço-tempo. Em princípio, estas teorias se puderem ser formuladas, deverão ser mais relevantes para a Física pois parece-nos lógico que dois experimentadores em laboratórios diferentes possam fazer escolhas diferentes das convenções e obter os mesmos resultados físicos. Queremos portanto teorias em que o lagrangeano seja invariante debaixo de transformações de simetria interna mas que dependem do ponto do espaço tempo.

Estas teorias existem e são as denominadas teorias com *invariância padrão* ou *teorias de gauge* na designação inglesa. Usaremos esta última designação por ser a mais corrente entre os físicos. Pedir que uma teoria possua invariância local é uma condição muito restritiva. De facto se tivermos uma teoria que tenha uma dada

invariância global, normalmente não será possível torná-la localmente invariante sem adicionar mais qualquer coisa. Essa qualquer coisa é o conceito de força traduzido em teoria quântica dos campos por um campo que é trocado entre as partículas que interagem. Consideremos como exemplo o caso do campo de Dirac. O lagrangeano é dado na Eq. (7.13),

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (7.24)$$

Esta teoria é invariante quando efetuamos transformações de fase constantes como na Eq. (7.16). Vamos ver o que se passa quando as transformações são locais, isto é, a escolha de fase é independente em cada ponto do espaço-tempo, e para simplificar vamos considerar transformações infinitesimais¹,

$$\delta\psi = i\alpha(x)\psi \quad ; \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha(x)\bar{\psi} \quad (7.25)$$

Temos então

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -i\alpha(x)\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + i\alpha(x)\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \\ &= -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (7.26)$$

Portanto o lagrangeano deixa de ser invariante. É fácil de ver que o problema está ligado ao facto de $\partial_\mu\psi$ não se transformar como ψ . Assim introduzimos o conceito de *derivada covariante* D_μ tal que numa transformação de gauge, Eq. (7.25), se transforme como os campos, isto é

$$\delta(D_\mu\psi) = i\alpha(x)D_\mu\psi \quad (7.27)$$

Definimos a derivada covariante pela relação

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (7.28)$$

e vamos ver que transformações deve ter o campo vetorial A_μ para satisfazer a Eq. (7.30). Obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) &= \delta(ieA_\mu)\psi + D_\mu(\delta\psi) \\ &= ie\delta A_\mu\psi + \partial_\mu(i\alpha(x)\psi) + ieA_\mu(i\alpha(x)\psi) \\ &= i\alpha(x)D_\mu\psi + ie\delta A_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)\psi \end{aligned} \quad (7.29)$$

Agora comparando a Eq. (7.29) com a Eq. (7.27), obtemos a lei de transformação do campo vetorial A_μ , dada por

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu\alpha(x) \quad (7.30)$$

¹Para transformações contínuas (grupos de Lie) o que se passa para transformações infinitesimais também é verdade para transformações finitas. Ver problema 7.1

Esta lei de transformação é exatamente uma transformação de gauge do eletromagnetismo se A_μ for interpretado como o campo do fóton. Assim vemos que o campo vetorial A_μ representa a força de que tínhamos falado anteriormente que assegura que podemos escolher a fase de maneira diferente em diferentes pontos do espaço tempo. A introdução do campo A_μ força a introdução de novos termos no lagrangeano, em particular os termos de energia cinética² para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo A_μ que é invariante para a Eq. (7.30) é o tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.31)$$

De facto usando 7.30 em 7.31 obtemos trivialmente

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (7.32)$$

Por outro lado termos de massa da forma $A^\mu A_\mu$ não são invariantes exigindo que o fóton não tenha massa. Portanto o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (7.33)$$

$$\equiv \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interacção}} \quad (7.34)$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \quad (7.35)$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{interacção}} = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \quad (7.36)$$

é invariante para as transformações de fase locais, Eqs. (7.25) e (7.30). Diz-se que é uma teoria com invariância de gauge. O lagrangeano 7.34 descreve a interação dos eletrões com os fótons. É chamada eletrodinâmica quântica (QED). Para aplicação posterior recordemos aqui os passos que nos levaram até ela.

- i) Tínhamos uma teoria que era invariante para transformações globais. Neste caso o grupo de transformações era abeliano, multiplicação por uma fase, $U(1)$.*
- ii) O requisito que a invariância se mantivesse quando as transformações fossem locais levou-nos à introdução dum novo campo, o fóton A_μ , com transformações univocamente dadas por essa condição. Fisicamente é o fóton que assegura que as diversas escolhas de fase são consistentes.*
- iii) Foi necessário introduzir um novo termo no lagrangeano para nos dar a propagação dos fótons livres. Este termo deve possuir invariância de gauge.*

²Isto é os termos quadráticos nos campos.

7.4 Teorias de Yang-Mills

Os mesmos passos que nos levaram a QED podem ser dados quando o grupo de transformações das fases é não abeliano. Neste caso dizemos que temos uma teoria não abeliana com invariância de gauge ou teoria de *Yang-Mills* [21], embora este nome se devesse só aplicar ao caso em que o grupo é $SU(2)$. Como alguns conceitos têm que ser generalizados vamos ver os passos em detalhe.

Começemos pelo lagrangeano para campos fermiônicos generalizando QED. Seja

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\cancel{\partial} - m)\Psi \quad (7.37)$$

onde Ψ é um vetor coluna

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

num espaço vetorial de dimensão n , onde atua uma representação do grupo não abeliano G

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a(x)\Omega^a\Psi, \quad a = 1, 2, \dots, m \quad (7.39)$$

Ω^a são m matrizes hermiticas $n \times n$ que obedecem às relações de comutação de G ,

$$[\Omega^a, \Omega^b] = if^{abc}\Omega^c \quad (7.40)$$

sendo f^{abc} as constantes de estrutura de G . Desta relação resulta que m é a dimensão da representação adjunta de G , pois esse é também o número de geradores do grupo que obedecem a uma relação semelhante à Eq. (7.40).

O lagrangeano 7.37 não é invariante sob a ação das transformações 7.39. Para o tornar invariante introduzimos a derivada covariante, generalizando a Eq. (7.28),

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu^a\Omega^a)\Psi \quad (7.41)$$

onde A_μ^a são m campos vetoriais, que vão desempenhar um papel análogo ao do fóton no eletromagnetismo, e que são designados por *campos de gauge*. As matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação de Ψ de dimensão n . A lei de transformação de A_μ^a é obtida pelo requisito de que $D_\mu\Psi$ se transforme como Ψ . Para a calcular introduzimos a notação compacta

$$\underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon^a\Omega^a \quad (7.42)$$

$$\underline{A}_\mu \equiv A_\mu^a\Omega^a \quad (7.43)$$

onde $\underline{\varepsilon}$ e \underline{A}_μ são matrizes $n \times n$ e funções de (\vec{x}, t) . Então 7.39 escreve-se simplesmente

$$\delta\Psi = i \underline{\varepsilon} \Psi \quad (7.44)$$

Calculemos então a variação de $D_\mu \Psi$. Obtemos

$$\delta(D_\mu \Psi) = \partial_\mu(\delta\Psi) + ig(\delta\underline{A}_\mu) \Psi \quad (7.45)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \underline{\varepsilon} \Psi) - g \underline{A}_\mu \underline{\varepsilon} \Psi + ig(\delta\underline{A}_\mu) \Psi \quad (7.46)$$

Nós queremos que

$$\delta(D_\mu \Psi) = i \underline{\varepsilon} D_\mu \Psi \quad (7.47)$$

$$= i \underline{\varepsilon} \partial_\mu \Psi - g \underline{\varepsilon} \underline{A}_\mu \Psi \quad (7.48)$$

Comparando as Eqs. (7.46) e (7.48) obtemos

$$\delta\underline{A}_\mu = i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \quad (7.49)$$

que é a transformação dos campos de gauge escrita numa forma matricial. Em termos das componentes A_μ a equação 7.49 escreve-se

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (7.50)$$

Notar que no caso do grupo ser abeliano tanto a Eq. (7.49) como a Eq. (7.50) se reduzem à expressão válida numa teoria abeliana como QED, Eq. (7.30) (nesse caso $m = 1$).

A derivada covariante, Eq. (7.41) tem algumas propriedades importantes para o seguimento e que vamos aqui indicar.

i) A derivada covariante pode ser escrita na forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g A_\mu^a \frac{\delta \Phi}{\delta \varepsilon^a} \quad (7.51)$$

para um campo arbitrário Φ , fermiônico ou bosônico. Esta expressão permite-nos escrever a derivada covariante de qualquer campo, ou funções de campos, desde que se saibamos as suas propriedades de transformação.

ii) A derivada dum produto pode ser facilmente calculada a partir de

$$\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi \quad (7.52)$$

Então a Eq. (7.51) implica

$$D_\mu(\phi\psi) = (D_\mu\phi) \psi + \phi D_\mu\psi \quad (7.53)$$

iii) O comutador de duas derivadas covariantes pode ser facilmente calculado. De facto não é zero, nem mesmo para um grupo abeliano. Obtemos

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi = (\partial_\mu + ig \underline{A}_\mu)(\partial_\nu + ig \underline{A}_\nu) \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \quad (7.54)$$

$$= ig (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]) \Psi \quad (7.55)$$

Portanto

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = ig \underline{F}_{\mu\nu} \Psi \quad (7.56)$$

onde $\underline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a \Omega^a$ é definido por

$$\underline{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu] \quad (7.57)$$

Vemos assim que $\underline{F}_{\mu\nu}$ é a generalização para o caso não abeliano do tensor de Maxwell. Podemos verificar que se transforma numa forma covariante (não é invariante) para as transformações dos campos de gauge, Eq. (7.49),

$$\begin{aligned} \delta(\underline{F}_{\mu\nu}) &= \partial_\mu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - \frac{1}{g} \partial_\nu \underline{\varepsilon} \right) - \partial_\nu \left(i [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \right) \\ &\quad - g [[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu], \underline{A}_\nu] - i [\partial_\mu \underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - g [\underline{A}_\mu, [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu]] - i [\underline{A}_\mu, \partial_\nu \underline{\varepsilon}] \\ &= i [\underline{\varepsilon}, \underline{F}_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (7.58)$$

Contrariamente ao caso abeliano, $\underline{F}_{\mu\nu}$ não é invariante. De facto transforma-se como um vetor num espaço de dimensão m (a dimensão do grupo), isto é

$$\delta F_{\mu\nu}^a = -f^{bca} \varepsilon^b F_{\mu\nu}^c \quad (7.59)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{bca} A_\mu^b A_\nu^c \quad (7.60)$$

A lei de transformação, Eq. (7.59), permite mostrar que a generalização do lagrangeano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (7.61)$$

é invariante para as transformações de gauge 7.49. Juntando todas as peças, concluímos que a generalização do lagrangeano 7.37 que possui invariância de gauge local é

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\mathcal{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} . \quad (7.62)$$

Antes de acabarmos esta secção vamos fazer alguns comentários sobre o que acabámos de ver e as suas aplicações. Primeiro que tudo o lagrangeano na Eq. (7.62) descreve a teoria física para uma das interações fundamentais da Natureza, quando o grupo G é $SU(3)$. É a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as

interações fortes. Nessa teoria os campos de matéria são os *quarks* que se encontram na representação fundamental do grupo (tripletos de SU(3)) e os campos de gauge são os *gluões* que se encontram na representação adjunta de SU(3) que é aquela que tem a mesma dimensão que o grupo (8 para SU(3)). Outra observação tem que ver com a massa para os campos de gauge. Um termo de massa para os campos de gauge teria a forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{1}{2} m^2 A_\mu^a A^{a\mu} \quad (7.63)$$

e é fácil de ver que as transformações na Eq. (7.50) não deixam o lagrangeano na Eq. (7.63) invariante. Assim o fóton e os gluões aparecem naturalmente como partículas sem massa. Contudo para as interações fracas este facto levanta problemas pois nós sabemos que devido ao seu curto alcance, os portadores da força fraca devem ter massa. Este problema que persistiu na física de partículas durante várias décadas só foi resolvido com a quebra espontânea da simetria e o mecanismo de Higgs que veremos no capítulo seguinte. Finalmente um comentário sobre o caso do grupo G não ser *simples*, por exemplo

$$G = \text{SU}(2) \times \text{U}(1) \quad (7.64)$$

Neste caso a generalização da Eq. (7.62) obtém-se do modo seguinte. Para os campos de matéria o lagrangeano tem a mesma forma mas a derivada covariante, Eq. (7.41) é agora uma soma sobre todos os campos de gauge com uma constante de acoplamento por cada grupo fator. O lagrangeano para os campos de gauge é simplesmente a soma de lagrangeanos do tipo da Eq. (7.61) para cada grupo fator.

Para dar um exemplo concreto vamos considerar o grupo $G = \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$ que como veremos mais à frente vai ser precisamente o caso do modelo standard das interações eletrofracas. Neste caso o lagrangeano será,

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i\not{D} - m) \Psi_f - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (7.65)$$

onde a soma é sobre todos os fermiões da teoria. Os campos de gauge introduzidos são convencionalmente designados por W_μ^a para SU(2) e B_μ para U(1), com os tensores do campo dados por

$$W_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g f^{bca} W_\mu^b W_\nu^c \quad (7.66)$$

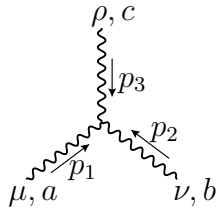
$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (7.67)$$

A derivada covariante tem agora uma contribuição de cada campo de gauge com uma constante de acoplamento diferente. Assim temos,

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + ig' Y B_\mu) \Psi \quad (7.68)$$

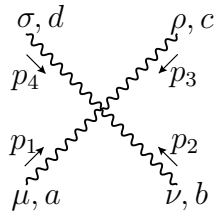
onde $\Omega^a = \frac{\sigma^a}{2}$ para SU(2) e Y , designada por hipercarga, uma matriz proporcional à matriz identidade para o grupo U(1). Voltaremos a este assunto no capítulo 9.

Interações triplas de campos de gauge



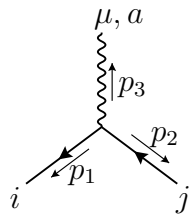
$$-gf^{abc} [g^{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2 - p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3 - p_1)^\nu] \quad (7.72)$$

Interações quárticas de campos de gauge



$$-ig^2 \left[f_{eab}f_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f_{eac}f_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + f_{ead}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \right] \quad (7.73)$$

Interações de fermiões com campos de gauge



$$-i g \gamma^\mu \Omega_{ij}^a \quad (7.74)$$

Problemas capítulo 7

7.1 Mostre que o lagrangeano de QED, Eq. (7.34), é invariante para transformações finitas,

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (7.75)$$

7.2 Mostre que o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (7.76)$$

é invariante para as transformações

$$\delta A_\mu^a = -f^{bca} \varepsilon^b A_\mu^c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon^a \quad (7.77)$$

7.3 Para o grupo das rotações num espaço a n dimensões, $O(n)$, os $\frac{1}{2}n(n-1)$ geradores independentes são dados por

$$(L_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \quad ; \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n \quad (7.78)$$

com $L_{ij} = -L_{ji}$. Considere agora o caso de $O(3)$.

a) Identifique

$$J_1 = L_{23} \quad ; \quad J_2 = L_{31} \quad ; \quad J_3 = L_{12} \quad (7.79)$$

Mostre que os J_i têm as seguintes relações de comutação

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikm} J_m \quad (7.80)$$

b) Um vetor de E_3 transforma-se como

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V \quad (7.81)$$

Para uma transformação infinitesimal encontre a lei de transformação

$$\delta V_i = \dots \quad (7.82)$$

c) Verifique que esta lei para uma rotação em torno do eixo dos zz dá o resultado conhecido

$$\begin{aligned}\delta V_1 &= \theta V_2 \\ \delta V_2 &= -\theta V_1 \\ \delta V_3 &= 0\end{aligned}\tag{7.83}$$

d) Mostre que para transformações infinitesimais se tem

$$\delta(V_i V_i) = 0\tag{7.84}$$

e) Considere agora transformações finitas

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} V\tag{7.85}$$

Mostre que

$$V'^T V' = V^T V\tag{7.86}$$

7.4 Considere o lagrangeano seguinte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

- a) Verifique que as equações de movimento são as equações de Klein-Gordon.
b) Verifique que o lagrangeano é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha} \phi \quad ; \quad \alpha = \text{constante}$$

- c) Considere a acção definida para campos reais, ϕ_i , $i = 1, 2$. Mostre que se a acção

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

é invariante para uma transformação

$$\phi'_i = \phi_i - i\varepsilon \lambda_{ij} \phi_j$$

onde ε é infinitesimal e λ_{ij} são constantes, então existe uma corrente conservada, isto é

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

onde

$$J^\mu = -i\lambda_{ij} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \phi_j$$

Este resultado é conhecido pelo nome de *teorema de Noether* .

d) Aplique este resultado ao lagrangeano dado. Para isso faça

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2 = -i \frac{\phi - \phi^*}{\sqrt{2}} \quad (7.87)$$

e) Mostre que se $\alpha = \alpha(x)$ o lagrangeano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)^* \phi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi - m^2 \phi^* \phi$$

é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha(x)} \phi$$

se A_μ se transformar de forma apropriada. Qual? Comente.

Capítulo 8

Quebra Espontânea de Simetria: Mecanismo de Higgs

Aqui seguimos as secções 10.7 a 10.9 do Griffiths [1] e o capítulo 3 do meu texto FIE [5].

8.1 Introdução

Vamos agora considerar o problema da quebra de simetria. A maior parte das simetrias observadas na Natureza não são exatas. Por exemplo, o *Isospin* não é uma simetria exata da Natureza pois o próton e o neutrão não tem a mesma massa. Uma maneira de estudar em teoria quântica dos campos teorias com quebra de simetria é introduzir no lagrangeano termos com coeficientes *pequenos* que explicitamente realizem a quebra. Nós aqui vamos estar interessados noutro tipo de quebra de simetria, dita espontânea, em que o lagrangeano é simétrico sob a ação dum grupo de transformações mas o estado base (de menor energia) não é.

Para vermos aquilo em que estamos interessados vamos começar pelo exemplo mais simples, uma teoria com um campo escalar complexo com auto-interação e invariante para o grupo U(1). O lagrangeano mais geral invariante de Lorentz e renormalizável¹ é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)\end{aligned}\tag{8.1}$$

O lagrangeano na Eq. (8.1) descreve um campo escalar complexo ou dois campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. Normalmente, o

¹Em termos muito simples pode dizer-se que uma teoria é renormalizável se nenhum dos termos que constituem o lagrangeano tiver dimensão, em termos de massa, superior a quatro. Para esta contagem uma derivada conta como uma massa, um campo escalar também como uma massa e um campo fermiónico com dimensão de $\frac{3}{2}$ em termos de massa. Para mais detalhes ver as Refs. [2, 11].

espectro de massa vê-se analisando os termos quadráticos da teoria. Mas isto contém o pressuposto que o estado base (energia mínima) corresponde à configuração em que os campos são nulos. Para campos escalares, pode suceder que o estado de energia mínima corresponda a uma configuração em que

$$\phi = v = \text{constante} \neq 0 \quad (8.2)$$

Neste caso as partículas são associadas com oscilações de ϕ em torno do valor do mínimo, v . Se escrevermos

$$\phi(x) = v + \chi(x) \quad (8.3)$$

as massas devem ser lidas da parte de lagrangeano quadrático em χ . Vejamos para a teoria descrita na Eq. (8.1) quais são os estados de energia mínima. A densidade hamiltoniana é (ver problema 8.1),

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\vec{\partial}\phi^*) \cdot (\vec{\partial}\phi) + V \quad (8.4)$$

Como os dois primeiros termos são definidos positivos e a energia deve ser limitada por baixo, o parâmetro λ na Eq. (8.1) deve ser positivo. O sinal do parâmetro μ^2 é deixado arbitrário. O mínimo da energia corresponde a um valor constante para ϕ que minimize o potencial V . Este é dado por

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (8.5)$$

e as equações de minimização são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \phi(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \phi^*(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Temos portanto duas possibilidades:

a) $\mu^2 > 0$

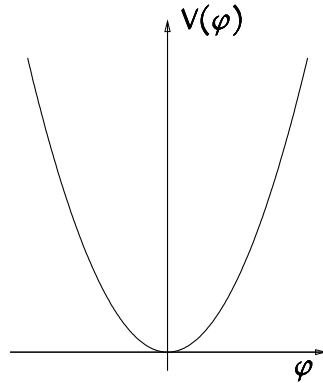
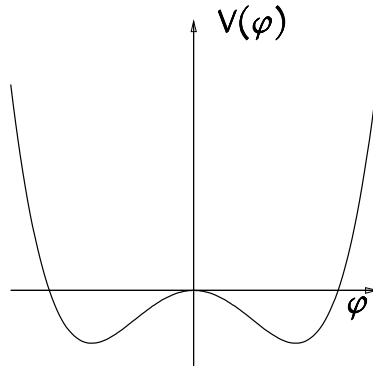
Neste caso o mínimo é para $\phi = 0$. Temos a situação descrita na Fig. 8.1. A teoria descreve um isodoubleto escalar complexo de massa $m = \sqrt{\mu^2}$.

b) $\mu^2 < 0$

Neste caso o potencial tem a forma da Fig. 8.2, e o mínimo corresponde ao valor

$$\phi^* \phi = |\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (8.7)$$

Consideremos o caso *b*). Uma maneira possível de vermos o espectro de massa da teoria seria introduzir a condição de mínimo na Eq. (8.3) e depois fazer a substituição no lagrangeano da Eq. (8.1). Contudo esta não é a forma mais fácil de proceder

Figura 8.1: Potencial clássico para $\mu^2 > 0$.Figura 8.2: Potencial clássico para $\mu^2 < 0$.

neste caso. Como a condição do mínimo é que $|\phi| = v$, é mais conveniente fazer a seguinte redefinição do campo complexo ϕ :

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.8)$$

com ξ e σ campos escalares reais. Esta parametrização corresponde a escrever o campo complexo na forma

$$\phi = e^{i \arg(\phi)} |\phi| \quad (8.9)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= \frac{i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \\ \partial^\mu \phi^* &= \frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \end{aligned} \quad (8.10)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \left(\frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v} \xi(x)} \partial_\mu \sigma \right) \left(\frac{i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v} \xi(x)} \partial^\mu \sigma \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \left(\sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left(v^2 + \sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \lambda \left(v^4 + 2\sqrt{2}v^3\sigma + 3\sqrt{2}v^2\sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma^3 + \frac{\sigma^4}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Usando a condição do mínimo podemos escrever, conservando somente até aos termos quadráticos,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{constante} \\
 &\quad + \text{termos de ordem superior}
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

O lagrangeano da Eq. (8.12) descreve portanto dois campos escalares reais, ξ e σ , um com massa $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ e outro com massa zero, $m_\xi = 0$. Este facto pode ser interpretado facilmente. Em primeiro lugar, notemos que o potencial V é no plano complexo do campo ϕ um potencial tipo *fundo de garrafa de champanhe*. Com a parametrização da Eq. (8.8) o campo σ refere-se às oscilações radiais e ξ às oscilações angulares. Ora enquanto que o potencial tem curvatura na direção radial, na direção angular o potencial é plano. Não custa energia rodar ao longo do *vale* no fundo da garrafa como indicado na Fig. 8.3. Assim as excitações radiais têm massa

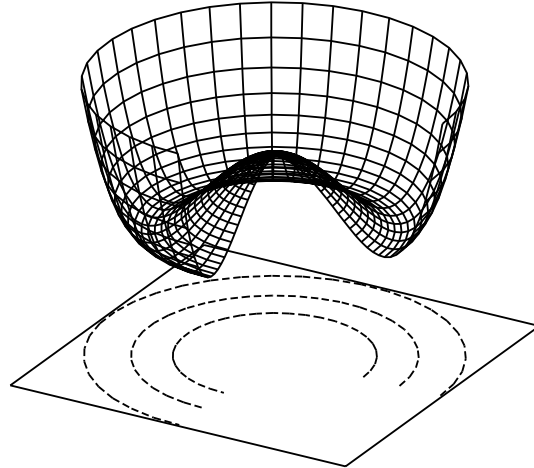


Figura 8.3: Representação do potencial quando $\mu^2 < 0$.

e as angulares não. O aparecimento de partículas sem massa é uma característica

geral destes fenómenos de quebra espontânea de simetria e é designado por teorema de Goldstone. Na secção seguinte faremos uma demonstração geral do teorema. Contudo antes de acabarmos esta secção vamos dar outros exemplos simples.

O segundo exemplo que vamos considerar é de facto o mesmo exemplo noutra linguagem. Se escrevermos o campo ϕ em termos das partes real e imaginária

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho + i\pi) \quad (8.13)$$

obtemos para o lagrangeano na Eq. (8.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\rho^2 + \pi^2) \quad (8.14)$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\rho^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\rho^2 + \pi^2)^2 \quad (8.15)$$

Este lagrangeano continua a ter uma invariância. De facto é invariante para o grupo das rotações no plano, $O(2)$. Este grupo tem a mesma álgebra que $U(1)$. É o grupo abeliano das rotações em torno dum eixo de simetria. As transformações podem escrever-se

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Para analisarmos a quebra de simetria temos de ver onde ocorre o mínimo. As equações são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 &= \rho [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0 &= \pi [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Novamente podemos ter as duas situações das Figs. 8.1 e 8.2. No caso em que $\mu^2 < 0$, o mínimo absoluto ocorre na circunferência

$$\sqrt{\rho^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad (8.18)$$

Para vermos o espectro tomemos os eixos no plano $\rho - \pi$ de tal forma que

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad ; \quad \langle \pi \rangle_0 = 0 \quad (8.19)$$

Então definimos

$$r = \rho - v \quad (8.20)$$

e escrevemos o lagrangeano na Eq. (8.12) em termos de r e π . Obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu r \partial^\mu r + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \mu^2 r^2 - \lambda v r(r^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (r^2 + \pi^2)^2 \quad (8.21)$$

Obtivemos novamente um campo sem massa, π , enquanto que o campo r tem massa $m_r = \sqrt{-2\mu^2}$. Para vermos que não há perda de generalidade na escolha da Eq. (8.19) ver o problema 8.1.

Finalmente, como último exemplo, consideremos uma teoria novamente com um campo escalar complexo com auto-interação mas em que a interação é invariante para transformações de isospin descrito pelo grupo $SU(2)$, e o campo encontra-se na representação dubleto desse grupo. O lagrangeano mais geral, invariante de Lorentz, invariante para o transformações do grupo e renormalizável é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)\end{aligned}\tag{8.22}$$

onde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\tag{8.23}$$

O lagrangeano da Eq. (8.22) descreve portanto 4 campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. O estado base vai corresponder ao mínimo do potencial. Estamos interessados na situação em que há quebra espontânea de simetria, isto é o vácuo (estado base) não tem a mesma simetria que o lagrangeano. Isto acontece quando ocorre a situação da Fig. 8.2. Neste caso o potencial é minimizado, para $\mu^2 < 0$, quando

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2\tag{8.24}$$

Podemos sempre escolher um referencial de isospin onde o estado de energia mínima se possa escrever

$$\phi_{\min} = \text{constante} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\tag{8.25}$$

O campo $\phi(x)$ pode portanto escrever-se

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \chi(x)\tag{8.26}$$

Para parametrizar convenientemente as pequenas oscilações $\chi(x)$, notemos que em cada ponto x podemos sempre escolher um referencial de isospin onde $\phi(x)$ tenha a forma

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\tag{8.27}$$

Este referencial será ligado ao referencial definido pela Eq. (8.25) através duma transformação de SU(2), diferente para cada x ,

$$U(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \quad (8.28)$$

Podemos portanto escrever nesse referencial²

$$\phi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

e

$$\chi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

Para pequenas oscilações temos

$$\chi(x) \simeq \begin{bmatrix} v(\theta^2 + i\theta^1) \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - iv\theta^3 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

As pequenas oscilações em torno do estado base são parametrizadas por quatro campos escalares reais, θ^a e σ . O espectro de massa é lido dos termos quadráticos nesses campos. Substituindo a Eq. (8.29) no lagrangeano da Eq. (8.22) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + v^2 \partial_\mu \theta^a \partial^\mu \theta^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\theta}^a \partial^\mu \hat{\theta}^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.32)$$

onde

$$m_\sigma = \sqrt{-2 \mu^2} \quad (8.33)$$

e redefinimos os campos θ^a para que o termo cinético tenha a normalização canónica.

$$\hat{\theta}^a \equiv \sqrt{2} v \theta^a \quad (8.34)$$

Temos portanto três partículas de massa zero e uma com massa $\sqrt{-2 \mu^2}$. O aparecimento de partículas de massa zero, designadas por *bosões de Nambu-Goldstone*, é uma consequência do teorema de Goldstone que veremos na secção seguinte.

²Comparar a forma da Eq. (8.29) com a da Eq. (8.8). A explicação da Eq. (8.8) pode ser feita exactamente da mesma forma, só que agora o grupo seria U(1) e não SU(2).

8.2 O teorema de Goldstone

Começemos então pelo enunciado do teorema.

Teorema 8.1 *Seja uma teoria invariante sob a ação dum grupo de transformações G , com n geradores. Se houver uma quebra espontânea da simetria, de tal forma que o vácuo (estado base) seja invariante somente sob a ação de G' com m geradores ($G' \subset G$), então aparecerão partículas de spin zero sem massa em número igual ao dos geradores de G que não deixam o vácuo invariante, isto é, há $n-m$ bosões de Nambu-Goldstone.*

Vemos portanto que o teorema não só nos diz que há partículas sem massa mas também nos diz o seu número. Nos dois primeiros exemplos anteriores tínhamos os grupos $U(1)$ e $O(2)$ com 1 gerador, e o vácuo ficou sem simetria alguma e portanto o número de bosões de Nambu-Goldstone era igual ao número de geradores daqueles grupos, isto é um gerador. O terceiro exemplo requer um pouco mais de atenção. Isto porque embora tivéssemos só falado do grupo $SU(2)$, de facto a simetria do lagrangeano na Eq. (8.22) é maior do que $SU(2)$ pois também é invariante para transformações de fase das duas componentes do dubleto ao mesmo tempo, isto é

$$\phi' = e^{i\epsilon} \phi \quad (8.35)$$

Este grupo é o grupo $U(1)$, e é claro que as suas transformações comutam com as de $SU(2)$. Isto quer dizer que a invariância total do lagrangeano é $SU(2) \times U(1)$. O número de geradores é então $3+1 = 4$, o que quer dizer, de acordo com o teorema de Goldstone, que o vácuo, Eq. (8.25), ainda deve ser invariante para algum subgrupo abeliano de $SU(2) \times U(1)$. Isto é de facto verdade pois a combinação

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (8.36)$$

deixa invariante o vácuo 8.25. De facto

$$Q\phi_{min} = \frac{1 + \tau_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (8.37)$$

e portanto

$$e^{i\epsilon Q} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

Este modelo será a base do modelo standard das interações eletrofracas, e o gerador que não é quebrado será interpretado como a *carga eléctrica*.

É conveniente, antes de apresentarmos a demonstração geral do teorema, vermos outro caso em que nem toda a simetria é quebrada. Seja uma teoria com um tripleto de campos escalares ϕ^i com $i = 1, 2, 3$. Com estes campos podemos construir um

lagrangeano invariante para rotações no espaço de simetria interna, isto é invariante para $O(3)$. O lagrangeano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4} \lambda (\phi^i \phi^i)^2 \quad (8.39)$$

Com a experiência adquirida até aqui é fácil de ver que se $\mu^2 < 0$ o potencial tem um mínimo se

$$\phi^i \phi^i = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (8.40)$$

Esta condição não define a direção da quebra de simetria. Escolhemos um referencial no qual é a componente 3 que desenvolve um valor de expectação no vácuo (vev). Isto quer que podemos escrever

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

O grupo de simetria original $O(3)$ tem $\frac{1}{2} \times 3 \times (3 - 1) = 3$ geradores. O facto novo que aparece neste exemplo é que o vácuo ainda tem um grupo de simetria não trivial. Este é o subgrupo de $O(3)$ que não mistura a componente 3 com as outras. É claro que é $O(2)$ com $\frac{1}{2} \times 2 \times (2 - 1) = 1$ gerador. De acordo com o teorema de Goldstone devemos ter $3 - 1 = 2$ bosões de Nambu-Goldstone. Vamos ver como isso ocorre. Para isso convém recordar um pouco de teoria de grupos (ver problema 7.3). Sejam $L_{ij} = -L_{ji}$ os 3 geradores de $O(3)$ e l_{ij} os do subgrupo $O(2)$, isto é $l_{ij} = L_{ij}$ para $i, j \neq 3$ (é de facto só um gerador, l_{12}). Sejam $k_i = L_{i3}$, $i = 1, 2$ os restantes geradores de $O(3)$. Em geral podemos escrever

$$(L_{ij})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8.42)$$

e portanto os geradores k_i são

$$(k_i)_{kl} = (L_{i3})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{3l} - \delta_{il} \delta_{3k}) \quad (8.43)$$

Então k_i atuando no vetor coluna $v_i = v \delta_{i3}$ dá

$$(k_i v)_j = v (k_i)_{j3} = v (k_i)_{33} = -i v \delta_{ij} \quad (8.44)$$

Então se definirmos σ e ξ_i , $i = 1, 2$ por

$$\phi = e^{i \xi_i(x) k_i / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

vemos que a ordem mais baixa é equivalente a subtrair o valor de expectação para definir os novos campos. De facto em ordem mais baixa

$$\begin{aligned}\phi &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + i\xi_i(x)k_i/v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \sigma \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{8.46}$$

Em termos destes campos o lagrangeano escreve-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \sigma)^4 \\ &+ \text{termos de ordem superior}\end{aligned}\tag{8.47}$$

Observamos novamente que o campo σ tem massa $-2\mu^2$ e que há dois campos ξ_1 e ξ_2 , com massa nula. Isto é precisamente o que diz o teorema de Goldstone. Este exemplo generaliza-se facilmente ao caso do grupo $O(n)$. Então o número de bosões de Nambu-Goldstone é, para o caso duma quebra de simetria do grupo $O(n)$ para o seu subgrupo $O(n-1)$

$$\begin{aligned}\#\text{Bosões de Goldstone} &= \#\text{Geradores de } O(n) - \#\text{Geradores de } O(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times (n-1) - \frac{1}{2} \times (n-1) \times (n-2) \\ &= n-1\end{aligned}\tag{8.48}$$

o que se reduz ao resultado anterior para o caso de $O(3)$.

Voltemos então ao teorema de Goldstone [22,23] para efetuar a sua demonstração.

Dem.

Comecemos por escrever o lagrangeano em termos de n campos escalares reais ϕ_i , que formam um vetor com n componentes,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}\tag{8.49}$$

Isto é sempre possível, pois uma representação complexa pode sempre ser tornada real à custa de duplicar a dimensão do espaço vetorial. Então o lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)\tag{8.50}$$

onde $V(\phi)$ é um polinómio em ϕ que é invariante sob a ação de algum grupo G . Este tem n geradores Ω^a e os campos ϕ transformam-se de acordo com

$$\delta\phi = i\epsilon^a\Omega^a\phi \quad (8.51)$$

Como a representação é real então, $i\Omega^a$ deve ser uma matriz real, e Ω^a uma matriz imaginária pura. Como os Ω^a são matrizes hermíticas, então também devem ser antissimétricas (comparar com o exemplo de $O(3)$), pois

$$\Omega^a = (\Omega^a)^\dagger = (\Omega^{a*})^T = -\Omega^{aT} \quad (8.52)$$

V é invariante sob a ação de G e portanto devemos ter

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial\phi_i}\delta\phi_i = i\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\epsilon^a\Omega_{ij}^a\phi_j \quad (8.53)$$

Como os parâmetros ϵ^a são arbitrários, obtemos n equações

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\Omega_{ij}^a\phi_j = 0 \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (8.54)$$

Diferenciemos agora a equação anterior. Obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}\Omega_{ij}^a\phi_j + \frac{\partial V}{\partial\phi_i}\Omega_{ik}^a = 0 \quad (8.55)$$

Agora calculemos a Eq. (8.55) no valor $\phi = v$ que minimiza V , isto é

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\right|_{\phi=v} = 0 \quad (8.56)$$

O resultado é então

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}\right|_{\phi=v}\Omega_{ij}^av_j = 0 \quad (8.57)$$

Por outro lado se expandirmos V em redor do mínimo devemos ter

$$V = \frac{1}{2} M_{ij}^2(\phi - v)_i(\phi - v)_j + \text{termos de ordem superior} \quad (8.58)$$

Daqui se conclui que

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\phi=v} = M_{ij}^2 \quad (8.59)$$

onde M_{ij}^2 é a matriz de massa (quadrada). Então

$$M_{ij}^2\Omega_{jk}^av_k = 0 \quad (8.60)$$

Seja agora G' o subgrupo de dimensão m de G que permanece como uma simetria do vácuo. O que isto quer dizer é que se Ω^a for um gerador de G' então

$$\Omega^a v = 0 \quad (8.61)$$

e a Eq. (8.60) não contém qualquer informação sobre a massa. Pelo contrário, para cada um dos $(n-m)$ vetores $\Omega^a v$ que não são zero, então a Eq. (8.60) diz-nos que M^2 tem um valor próprio zero. Se estes vetores $\Omega^a v$ não nulos formarem a base dum espaço vetorial de dimensão $(n-m)$, mostrámos que há $(n-m)$ bosões de Goldstone na teoria. Demonstramos então este último ponto. Para isso definimos

$$A^{ab} \equiv (\Omega^a v, \Omega^b v) = (v, \Omega^a \Omega^b v) \quad (8.62)$$

onde a última igualdade resulta de Ω^a ser hermitico. Então

$$A^{ab} - A^{ba} = (v, [\Omega^a, \Omega^b] v) = if^{abc}(v, \Omega^c v) = 0 \quad (8.63)$$

e a última igualdade resulta do facto das matrizes Ω^a serem antissimétricas. Seja agora \tilde{A} a matriz $(n-m) \times (n-m)$ obtida de A por restrição dos valores de a e b para os quais $\Omega^a v \neq 0$. Então \tilde{A} é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada. Seja O a matriz $(n-m) \times (n-m)$ que diagonaliza \tilde{A} , isto é

$$\tilde{A}'^{ab} = (O \tilde{A} O^T)^{ab} = (O^{ac} \Omega^c v, O^{bd} \Omega^d v) \quad (8.64)$$

Mas $O^{ac} \Omega^c v \neq 0$, e os elementos diagonais de \tilde{A}' são todos positivos e o espaço gerado por $O^{ab} \Omega^b$ e portanto por Ω^b tem dimensão $(n-m)$. Então os Ω^a que não aniquilam o vácuo são independentes, o que completa a demonstração de que M^2 tem $(n-m)$ valores próprios nulos.

8.3 O mecanismo de Higgs

Chegados aqui, podemos perguntar porque é que estivemos a estudar em tanto detalhe teorias com quebra espontânea de simetria, pois á primeira vista o problema de necessitarmos de partículas com massa para descrever as interações fracas não parece ser resolvido com estas teorias, pois a quebra de simetria dá origem a novas partículas sem massa e os bosões de gauge dessas teorias não podem ter termos de massa no lagrangeano, pois não são invariantes de gauge. A razão é que se tivermos uma teoria com invariância de gauge local e o fenómeno de quebra espontânea de simetria, então os bosões de Nambu-Goldstone não aparecem e é possível dar massa aos bosões vetoriais dessa teoria. Este fenómeno é conhecido pelo nome de mecanismo de Higgs, que passamos a explicar.

Não vamos apresentar uma demonstração geral mas sim dar dois exemplos. Vamos começar pelo caso do campo escalar carregado com invariância de gauge local

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (8.65)$$

onde a derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (8.66)$$

Por construção o lagrangeano é invariante para as transformações de gauge locais

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\epsilon(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x) \end{aligned} \quad (8.67)$$

Se $\mu^2 > 0$, a Eq. (8.65) é simplesmente o lagrangeano da eletrodinâmica escalar [2]. Se $\mu^2 < 0$ devemos ter o mecanismo de quebra espontânea de simetria e temos que analisar o espectro com mais cuidado. Em particular temos que encontrar o vácuo da teoria (estado base). Este será dado pelos valores $\langle \phi \rangle$ e $\langle A_\mu \rangle$ que minimizem a energia. A invariância de Lorentz do vácuo requer que

$$\langle A_\mu \rangle = 0 \quad (8.68)$$

mas o campo escalar ϕ deverá ter um valor não nulo

$$\langle \phi \rangle = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} > 0 \quad (8.69)$$

Em vez de fazermos a mudança de variável $\phi(x) \rightarrow v + \chi(x)$, vamos parametrizar ϕ exponencialmente, isto é

$$\phi(x) = e^{i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \left(v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.70)$$

Como vimos o campo $\xi(x)$ está associado com a quebra espontânea da simetria. Na ausência do campo de gauge A_μ , concluímos que ξ não tinha massa. Vamos ver agora que isso não é verdade para uma teoria de gauge. Substituindo a Eq. (8.70) na Eq. (8.65), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & + \sqrt{2} v e A_\mu \partial^\mu \xi + \mu^2 \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.71)$$

Da equação anterior resulta que o campo σ tem massa $-2\mu^2$, mas os campos A_μ e ξ estão misturados ao nível dos termos quadráticos. Assim a leitura do espectro não é imediata. A maneira mais fácil de resolver esta situação é aproveitar a invariância de gauge local do lagrangeano da Eq. (8.65). Se escolhermos para parâmetro da transformação de gauge

$$\epsilon(x) = -\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v} \quad (8.72)$$

então

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \phi(x) = v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi\end{aligned}\quad (8.73)$$

Como o lagrangeano é invariante para estas transformações devemos ter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, A_\mu) &= \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu - ieA'_\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \left[(\partial^\mu + ieA'^\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 (\sqrt{2}v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\sqrt{2}v + \sigma)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (8.74)$$

onde

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (8.75)$$

Agora o novo lagrangeano na Eq. (8.74) pode ser expandido facilmente. Obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \sigma (2\sqrt{2}v + \sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma^2 (6\lambda v^2 + \mu^2) - \sqrt{2} \lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4\end{aligned}\quad (8.76)$$

Nesta gauge não há, para os termos quadráticos, mistura entre os diferentes campos e portanto o espectro pode ser lido diretamente,

$$\begin{aligned}m_\sigma &= \sqrt{6\lambda v^2 + \mu^2} = \sqrt{-2\mu^2} \\ m_A &= \sqrt{2}ev\end{aligned}\quad (8.77)$$

e o campo ξ desapareceu completamente da teoria. Esta gauge, onde o espectro pode ser lido facilmente, é designada por *gauge unitária*³. Para onde foi o campo ξ ? Para percebermos a resposta, façamos primeiro uma contagem de graus de liberdade. No lagrangeano original, Eq. (8.65), temos dois campos escalares reais e um campo vetorial *sem massa*, portanto outros dois graus de liberdade. No total temos quatro graus de liberdade. No lagrangeano redefinido, Eq. (8.76), temos só um campo escalar real, correspondendo a um grau de liberdade, mas temos um campo vetorial *com massa*, correspondendo a três graus de liberdade. A soma é de novo quatro. Portanto a interpretação é que o grau de liberdade associado ao ξ corresponde à polarização longitudinal do campo vetorial. Vemos assim, que contrariamente ao que diz o teorema de Goldstone, não só não há bosões de Nambu-Goldstone, mas além disso campos vetoriais podem adquirir massa no processo. Este fenómeno

³Pode-se mostrar [24] que a gauge unitária, onde é fácil de ler o espectro, existe sempre.

designa-se por *mecanismo de Higgs*. Com a atribuição do prémio Nobel de 2013 a comunidade passou a chamar *mecanismo de Brout-Englert-Higgs* embora na verdade tenha sido descoberto independentemente por várias pessoas [25–27].

O exemplo anterior é bastante simples e mostra o essencial do mecanismo de Higgs mas é demasiado simples para ser útil na física de partículas. Isto porque o campo A_μ não pode ser interpretado como o fóton, pois sabemos que este não tem massa⁴. Para considerarmos um modelo mais realista, (de facto a base do modelo standard das interações eletrofracas), consideremos a teoria de gauge construída sobre o modelo invariante para $SU(2) \times U(1)$ dada pelo lagrangeano da Eq. (8.22). A versão com invariância de gauge local escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (8.78)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (8.79)$$

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a $SU(2)$ e a $U(1)$, respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g\varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (8.80)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (8.81)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (8.82)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli e o fator $\frac{1}{2}$ no terceiro termo da Eq. (8.82) foi introduzido por conveniência (podemos sempre redefinir a constante g'). Note-se que como o grupo é um produto de 2 fatores, há uma constante de acoplamento para cada grupo fator, g e g' . O passo seguinte na análise deste modelo é encontrar o estado base ou vácuo. Devido aos requisitos de invariância de Lorentz só o campo escalar pode ter um valor constante diferente de zero e minimizar a energia. Esta será a situação quando $\mu^2 < 0$.

Vejamus então qual o espectro de massa neste caso. Escolhemos os eixos de isospin tais que

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.83)$$

onde como anteriormente

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (8.84)$$

⁴Este exemplo é útil em supercondutividade onde o efeito de Meissner pode ser interpretado como o fóton adquirindo uma massa. Na verdade as ideias que deram origem ao mecanismo vieram da física da matéria condensada.

Com a experiência do exemplo anterior podemos escolher uma gauge, designada por *gauge unitária*, onde

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.85)$$

Então substituindo a Eq. (8.85) na Eq. (8.78), e conservando só os termos quadráticos, obtemos para os diferentes termos,

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi^\dagger) (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[\frac{1}{4} g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \right] \\ &\quad + \left(v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[\frac{1}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{4} (g v)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{4} v^2 (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ V(\phi^* \phi) &= \text{constante} + \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \\ -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \text{termos de ordem superior} \\ -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (8.86)$$

Vejamos então o espectro da teoria. Na parte dos campos escalares obtemos, como anteriormente, só um campo escalar real com massa

$$m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2} \quad (8.87)$$

Como a Eq. (8.86) tem produtos cruzados de W_μ^3 e B_μ , para determinar o espectro de massa dos bósons de gauge temos que diagonalizar a matriz de massa

$$M^2 = \frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

Os valores próprios de M^2 são 0 e $\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)$. Se designarmos o vetor próprio de massa nula por A_μ e outro por Z_μ , podemos escrever

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \quad (8.89)$$

O ângulo θ_W é determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula, isto é

$$\frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{bmatrix} = 0 \quad (8.90)$$

donde resulta

$$g^2 \sin \theta_W - gg' \cos \theta_W = 0 \quad (8.91)$$

ou seja

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (8.92)$$

A parte livre (quadrática nos campos) do lagrangeano escreve-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\ & - \frac{1}{4} \tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.93)$$

onde definimos as partes quadráticas dos tensores dos campos de gauge,

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^{1,2} = \partial_\mu W_\nu^{1,2} - \partial_\nu W_\mu^{1,2}, \quad \tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad \tilde{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.94)$$

Vemos portanto que na presença de campos de gauge, o fenómeno da quebra espontânea de simetria não conduz a campos escalares sem massa. O espectro de massa é o seguinte. Um campo escalar, σ , com massa $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$ como antes. Dois campos vetoriais com massa $M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2}$, um campo vetorial com massa $M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)}$ e um campo vetorial sem massa. Vemos assim, que 3 dos campos de gauge adquiriram massa devido ao fenómeno de quebra espontânea de simetria. Este fenómeno é designado por mecanismo de Higgs. Repare-se que a contagem do número de graus de liberdade está certa, pois um campo vetorial massivo tem 3 polarizações enquanto que se não tiver massa tem só duas. Assim se explica o *desaparecimento* dos três escalares da teoria. Em linguagem pictórica, diz-se que foram *comidos* pelos campos de gauge que então ficaram com massas. Este mecanismo tornou possível aplicar as teorias com invariância de gauge às interações fracas pois passou a ser possível dar massa aos portadores da força fraca. Note-se ainda que um dos campos de gauge não adquiriu massa tornando-se portanto um candidato

para ser o fóton. Isto deve-se ao facto da simetria não ter sido toda quebrada, há ainda uma simetria residual $U(1)$, isto é

$$SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1) \tag{8.95}$$

que, como veremos no capítulo dedicado ao modelo standard, corresponderá ao eletromagnetismo. O outro facto fundamental sobre o mecanismo de Higgs, é que uma teoria com invariância de gauge local, com quebra espontânea de simetria é renormalizável, enquanto que uma teoria de campos vetoriais com massa o não é. O modelo que temos vindo a descrever corresponde de facto ao modelo de Glashow-Weinberg-Salam para as interações fracas e eletromagnéticas, que descreveremos em maior detalhe no capítulo 9.

Problemas capítulo 8

8.1 Considere o lagrangeano dedinido pela Eq. (8.14) com quebra espontânea de simetria, isto é, $\mu^2 < 0$. Então escolha o vácuo

$$\langle \rho \rangle = v \cos \theta \quad ; \quad \langle \pi \rangle = v \sin \theta \quad (8.96)$$

Faça a redefinição

$$\begin{aligned} \rho &= v \cos \theta + \rho' \\ \pi &= v \sin \theta + \pi' \end{aligned} \quad (8.97)$$

e analize o espectro da teoria.

8.2 Reproduza os passos que levaram à Eq. (8.86).

8.3 Verifique que obtém os termos quadráticos nos campos indicados na Eq. (8.93).

Capítulo 9

O Modelo Standard Eletrofraco: $SU(2)_L \times U_Y(1)$

Aqui seguimos o capítulo 5 do meu texto FIE [5]. A matéria está também coberta no capítulo 9 do Griffiths [1].

9.1 Introdução

Vamos neste capítulo aplicar as ideias das teorias de gauge com quebra espontânea de simetria às interações fracas de quarks e leptões. Consideraremos o modelo específico associado aos nomes de Glashow [28], Weinberg [29] e Salam [30], que devido ao seu sucesso experimental se veio a tornar conhecido como o *modelo standard das interações eletrofracas*. Contudo antes de entrarmos em detalhes, tentemos responder a três questões:

- i)* Porquê uma teoria de gauge com quebra espontânea de simetria?
- ii)* Qual o grupo de simetria relevante?
- iii)* Quais as representações a escolher?

Começemos pela primeira. Há várias razões. Talvez a mais importante resulte do estudo da fenomenologia das interações fracas, onde aparecia claro que estas deviam ser mediadas por uma partícula de spin 1 (campo vetorial) e que esta partícula devia ter massa devido ao curto alcance das interações fracas (ver discussão no capítulo 6). Ora, depois de muito trabalho teórico mostrou-se que as únicas teorias consistentes, isto é, *renormalizáveis e unitárias*, com partículas de spin 1 com massa eram precisamente as teorias de gauge com quebra espontânea de simetria. Uma evidência adicional vem da existência duma universalidade de intensidades entre as interações de leptões e quarks se descontarmos a rotação de Cabibbo, efeito que, como veremos, não provém do sector de gauge da teoria, mas sim do sector das massas. Uma tal universalidade seria precisamente o que seria de esperar duma

teoria de gauge, onde uma constante g_w desempenhasse um papel semelhante à carga eléctrica em QED.

As outras duas questões podem ser respondidas em simultâneo. Vimos que a estrutura das correntes fracas sugeria a ideia dum grupo de isospin fraco $SU_L(2)$ para as componentes esquerdas que participam na corrente carregada. Daí resultava que as componentes esquerdas deviam ser agrupados num dubleto. As componentes direitas dos campos carregados deveriam ser então singletos de $SU_L(2)$ para não participarem na interação fraca das correntes carregadas. Poderia o grupo ser então só $SU_L(2)$? Pensando um pouco logo se conclui que não. A razão prende-se com o facto da estrutura das correntes de $SU_L(2)$ ser $V - A$. Então a componente 3 (neutra) também teria essa estrutura e não poderia ser identificada com a corrente eletromagnética que, como sabemos, tem acoplamento vetorial ao fóton. Portanto o bóson W_μ^3 não pode ser o fóton. Assim surgiu a ideia de alargar o grupo da forma mínima com um produto por um grupo Abelian obtendo-se portanto $SU(2) \times U(1)$. Como vimos no capítulo 8, havia neste caso dois bósons W_μ^3 e B_μ que se misturavam para dar um campo com massa a que chamámos Z_μ e outro, sem massa, designado por A_μ e que, como veremos no seguimento, se identificará com o fóton.

Este modelo prevê portanto, para além da corrente eletromagnética a existência de correntes fracas neutras, o que foi verificado experimentalmente. Os resultados experimentais mostram que a Natureza escolheu a hipótese mais simples. Nas secções seguintes descreveremos os vários aspetos do modelo.

9.2 O sector de gauge

O sector de gauge e de Higgs do modelo standard é aquele que já descrevemos no final da secção 8.3. Vamos aqui apenas resumir os resultados. Consideremos então a teoria de gauge para $SU_L(2) \times U_Y(1)$ com invariância local. O lagrangeano escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (9.1)$$

onde V é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (9.2)$$

e onde introduzimos os campos W_μ^a , ($a = 1, 2, 3$) e B_μ correspondentes a $SU_L(2)$ e a $U_Y(1)$, respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (9.3)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (9.4)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left(\partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (9.5)$$

onde τ^a são as matrizes de Pauli. Depois do mecanismo da quebra espontânea de simetria vimos que a parte livre do lagrangeano se podia escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\
& - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\
& - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{9.6}$$

onde introduzimos os campos A_μ e Z_μ através das relações

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \tag{9.7}$$

O ângulo θ_W foi determinado pelo requerimento que A_μ seja o vetor próprio de massa nula e obtivemos

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \tag{9.8}$$

Do lagrangeano na Eq. (9.6) resulta que temos um campo escalar com massa σ , que passaremos a designar por H . É o bosão de Higgs e a sua massa é dada por

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{9.9}$$

Além disso existem dois campos vectoriais $W_\mu^{1,2}$ com massa

$$M_{W^1, W^2} = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \tag{9.10}$$

e outro campo vectorial Z_μ com massa

$$M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)} \tag{9.11}$$

Em vez dos campos $W_\mu^{1,2}$ é usual introduzir um campo vectorial complexo W_μ^\pm através das relações

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad ; \quad W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \tag{9.12}$$

Então a massa deste campo será

$$M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2} \quad (9.13)$$

Comparando a Eq. (9.13) com a Eq. (9.11) e usando a definição 9.8 obtemos uma relação importante entre as massas do W e do Z

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (9.14)$$

Finalmente o outro campo vetorial A_μ não tem massa

$$M_A = 0 \quad (9.15)$$

Vemos assim que o campo A_μ deve ser identificado com o fóton. Esta identificação permite eliminar uma das constantes g e g' (ou equivalentemente g e θ_W) em termos da carga elétrica que corresponde ao gerador conservado

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (9.16)$$

Para isso escrevemos a derivada covariante em termos dos campos físicos, isto é,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \left(\partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \\ &= \left[\partial_\mu + i \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \tau^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \tau^- \right. \\ &\quad \left. + ig \sin \theta_W Q A_\mu + i \frac{g}{\cos \theta_W} \left(\frac{\tau_3}{2} - \sin^2 \theta_W Q \right) \right] \phi \end{aligned} \quad (9.17)$$

o que permite identificar

$$g \sin \theta_W = e \quad (9.18)$$

Como a carga elétrica é conhecida o único parâmetro a determinar é o ângulo θ_W .

9.3 As interações fracas dos leptões

A beleza das teorias de gauge é que as interações dos campos de matéria com os bósons de gauge ficam completamente determinadas pela invariância de gauge. Vimos isso já para o caso da interação com os campos de Higgs e o mesmo se passa para os fermiões. De facto no final do capítulo 7, já dissemos que forma devia ter o lagrangeano de qualquer fermião para a teoria $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Este era dado pela Eq. (7.65), da qual reproduzimos aqui a parte dos fermiões (os campos de gauge já foram discutidos na secção anterior). Obtemos

$$\mathcal{L} = \sum_f \bar{\Psi}_f (i\mathcal{D} - m) \Psi_f \quad (9.19)$$

onde

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW_\mu^a \Omega^a + ig'Y B_\mu) \Psi \quad (9.20)$$

onde as matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação em que os fermiões se encontrem. Temos portanto, antes de escrever as interações, descobrir quais as representações de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ em que se encontram os diferentes fermiões¹.

9.3.1 As representações e números quânticos

Os leptões conhecidos distribuem-se por 3 famílias com propriedades idênticas só diferindo na sua massa. Esta repetição que se verifica experimentalmente não é explicada pela teoria, mas introduzida para estar de acordo com a fenomenologia conhecida. No seguimento falaremos somente da família do eletrão (o eletrão e o seu neutrino), mas tudo o que dissermos e aplica às famílias do muão e do tau.

Como vimos no capítulo 6, as correntes carregadas que medeiam a interação fraca (troca do W_μ^\pm) são exatamente $V - A$, ou seja, nelas tomam parte somente a componente de helicidade esquerda dos leptões carregados. Para se obter isto é necessário tratar de forma diferente as duas helicidades das partículas carregadas. Assim e tendo em conta que o grupo que emerge da fenomenologia é $SU_L(2) \times U_Y(1)$, distribuímos o eletrão e o seu neutrino pelas seguintes representações de $SU_L(2)$, dito *isospin fraco*

$$E_L \equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad ; \quad e_R \equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} e \quad (9.21)$$

Portanto as componentes de helicidade esquerda do eletrão e do seu neutrino formam um dubleto de $SU_L(2)$, enquanto que a componente de helicidade direita do eletrão é um singlete do isospin fraco. A escolha na Eq. (9.21) determina as transformações de $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta E_L &= i\epsilon^a \frac{\tau^a}{2} E_L \\ \delta e_R &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Falta-nos então determinar as transformações sob a ação do grupo $U_Y(1)$. Estas serão em geral

$$\delta \ell = i\frac{\epsilon}{2} Y_\ell \ell \quad (9.23)$$

onde ℓ é qualquer componente de helicidade dos leptões, isto é $\ell = e_L, e_R, \nu_{eL}$, e Y_ℓ é um número, designado por *hipercarga fraca* diferente, em princípio, para cada

¹Não fizemos uma grande discussão deste ponto para os campos de Higgs, pois admitimos à partida que eles estavam em dubletos como tinha sido sugerido na discussão do mecanismo de Higgs no capítulo 8.

helicidade do leptão. Notar que isto exclui logo termos de massa para os leptões, pois estes são da forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -m (\bar{\ell}_L \ell_R + \bar{\ell}_R \ell_L) \quad (9.24)$$

e portanto não seriam invariantes nem para $SU_L(2)$, pois não é um singlete, nem para $U_Y(1)$ se as hipercargas fracas de ℓ_L e ℓ_R forem diferentes. O valor Y não é arbitrário pois o fóton deve acoplar com a corrente eletromagnética. Assim, usando as Eqs. (9.19) e (9.20), vemos que para uma dada helicidade do leptão ℓ devemos ter a seguinte interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \bar{\ell} \gamma^\mu \left[g W_\mu^3 T^3 + \frac{1}{2} g' B_\mu Y \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left[A_\mu \left(g \sin \theta_W T^3 + \frac{1}{2} g' \cos \theta_W Y \right) + Z_\mu \left(g \cos \theta_W T^3 - \frac{1}{2} g' \sin \theta_W Y \right) \right] \ell \\ &= -\bar{\ell} \gamma^\mu \left\{ A^\mu e \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) + Z^\mu \frac{g}{\cos \theta_W} \left[T^3 - \sin^2 \theta_W \left(T^3 + \frac{1}{2} Y \right) \right] \right\} \ell \quad (9.25) \end{aligned}$$

onde T^3 é o valor numérico do isospin fraco², (ver Tabela 9.1), para o leptão ℓ . Comparando a Eq. (9.25) com o que devíamos ter para a corrente eletromagnética,

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{QED}} = -eQ \bar{\ell} \gamma^\mu \ell A_\mu \quad (9.26)$$

onde $e = |e|$ e portanto Q é o valor da carga da partícula em unidades da carga do próton, obtemos então

$$Q = T^3 + \frac{1}{2} Y \quad (9.27)$$

o que determina Y .

	e_L	e_R	ν_L
T^3	-1/2	0	+1/2
Y	-1	-2	-1
Q	-1	-1	0

Tabela 9.1: Números quânticos para os leptões.

Esta tabela implica a seguinte forma para as derivadas covariantes,

$$D_\mu E_L = \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) E_L$$

²Mais rigorosamente é o valor próprio da matriz $T^3 = \frac{\tau^3}{2}$ no dubleto E_L e zero no singlete e_R .

$$\begin{aligned}
 &= \left[\partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ \tau^+ + W_\mu^- \tau^-) + ieQA_\mu + i\frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{\tau^3}{2} - \sin^2\theta_W Q \right) Z_\mu \right] E_L \\
 D_\mu e_R &= (\partial_\mu - ig'B_\mu)e_R = (\partial_\mu - ieA_\mu + ie \tan\theta_W Z_\mu) e_R
 \end{aligned} \tag{9.28}$$

Das expressões anteriores é fácil obter as interações dos leptões com os campos de gauge, as chamadas correntes fracas carregada e neutra. O lagrangeano dos leptões no limite em que as massas dos leptões são nulas é

$$\mathcal{L}_{\text{leptões}} = i\bar{E}_L \not{D} E_L + i\bar{e}_R \not{D} e_R + \text{termos iguais para o } \mu \text{ e para o } \tau. \tag{9.29}$$

Usando a Eq. (9.28) podemos escrever os termos de interação

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- \\
 &\quad - \frac{g}{4\cos\theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma^\mu (1 - 4\sin^2\theta_W - \gamma_5) e \right] Z_\mu \\
 &\quad - (-e) \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu
 \end{aligned} \tag{9.30}$$

O termo proporcional a A_μ representa a interação eletromagnética como descrita em QED. Daremos alguns exemplos das outras interações mediadas por W_μ^\pm e Z_μ .

9.3.2 As correntes carregadas

Do lagrangeano de interação na Eq. (9.30) concluímos que os vértices relevantes são os indicados na Fig. (9.1).

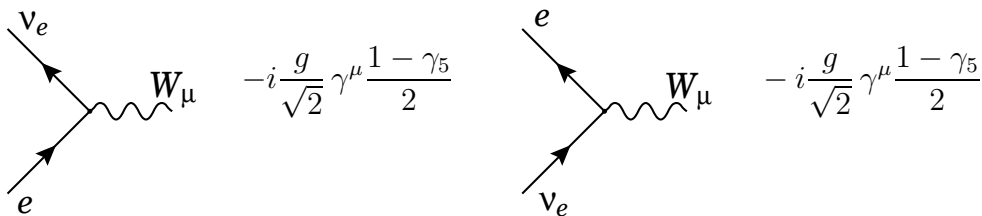


Figura 9.1: Vértices da corrente carregada.

Um exemplo típico é o decaimento do múon

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{9.31}$$

que, como vimos, corresponde ao diagrama da Fig. (9.2). O cálculo deste processo

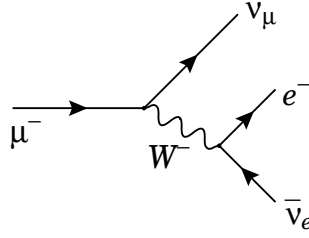


Figura 9.2: Decaimento do muão.

no limite das baixas energias dá uma amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8M_W^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e \right] \quad (9.32)$$

que coincide com a amplitude do modelo fenomenológico das interações fracas de Feynman e Gell-Mann, descrito no capítulo 6, se identificarmos

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad (9.33)$$

onde G_F é a constante de Fermi. Isto permite obter uma estimativa de massa do W . De facto usando a Eq. (9.18) obtemos

$$\begin{aligned} M_W^2 &= \frac{g^2}{4\sqrt{2}G_F} = \frac{e^2}{4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \text{ GeV} \\ &= \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} = \frac{(37.5 \text{ GeV})^2}{\sin^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Para o presente valor $\sin^2 \theta_W \simeq 0.23$ obtemos

$$M_W \simeq 78 \text{ GeV} \quad (9.35)$$

Este valor está um pouco abaixo do valor experimental atualmente aceite

$$M_W = 80.37 \pm 0.17 \text{ GeV} \quad (9.36)$$

A diferença está no facto de que a Eq. (9.34) é somente válida na aproximação de Born (nível árvore). Com a introdução das correções radiativas ela passa-se a escrever

$$M_W^2 = \left(\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \right) \frac{1}{\sin^2 \theta_W} \frac{1}{1 - \Delta r} \quad (9.37)$$

onde Δr encerra as correções de ordem superior. Atualmente o valor para Δr é

$$\Delta r = 0.06 \quad (9.38)$$

o que faz subir M_W para o valor para o indicado na Eq. (9.36). Uma maneira de entender estas correções é dizer que a intensidade da interação eletromagnética à escala da massa do Z é maior que no limite de baixa energia onde α é medida. Mais precisamente

$$\alpha(M_Z) = \frac{\alpha}{(1 - \Delta r)} \simeq \frac{1}{128.8} \quad (9.39)$$

9.3.3 As correntes neutras

É usual escrever a interação do Z^0 , Eq. (9.30), numa forma aplicável a qualquer fermião f . Para isso escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^Z &= -\frac{g}{\cos \theta_W} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma_5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] Z^\mu \\ &+ \text{termos iguais para os outros leptões} \\ &= -\frac{g}{\cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f Z_\mu \end{aligned} \quad (9.40)$$

onde

$$g_V^f = \frac{1}{2} T_3^f - Q^f \sin^2 \theta_W \quad ; \quad g_A^f = \frac{1}{2} T_3^f \quad (9.41)$$

O lagrangeano na Eq. (9.40) dá então origem ao vértice da Fig. (9.3). Um exemplo

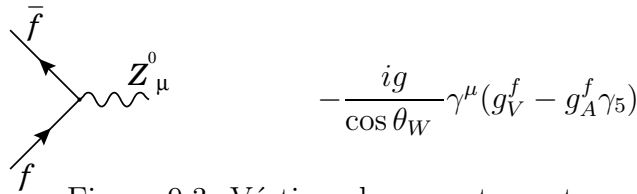


Figura 9.3: Vértices da corrente neutra

típico é a difusão elástica

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e \quad (9.42)$$

a que corresponde o diagrama da Fig. (9.4). A amplitude para baixas energias é

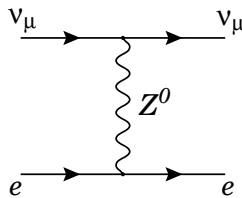


Figura 9.4: Diagrama para o processo $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$.

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W M_Z^2} \left[\bar{\nu}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (9.43)$$

Usando a Eq. (9.14) conclui-se que

$$M_W^2 = M_Z^2 \cos^2 \theta_W \quad (9.44)$$

e portanto as Eqs. (9.34) e (9.44) permitem escrever a Eq. (9.43) na forma

$$\mathcal{M} = \sqrt{2} G_F \left[\bar{\nu}_\mu (1 - \gamma_5) \nu_\mu \right] \left[\bar{e} \gamma_\alpha (g_V^e - g_A^e \gamma_5) e \right] \quad (9.45)$$

Foi a descoberta experimental do processo na Eq. (9.42) e também do processo

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e \quad (9.46)$$

mediados pela corrente neutra que constituíram a primeira validação, antes da experiência do LEP, do modelo de Glashow-Weinberg-Salam.

9.4 A introdução dos quarks

As interações fracas dos hádrões podem ser explicitadas a partir das interações fracas dos quarks que são os seus constituintes. Nós faremos as seguintes hipóteses:

- i) Os quarks aparecem em diferentes sabores. Experimentalmente necessitam-se de 6: $u, d, s, c, b, e t$.*
- ii) Para cada sabor os quarks aparecem em 3 cores distintas, mas os hádrões são singletos de cor.*
- iii) As correntes eletromagnéticas e fracas são singletos de cor e atuam somente no espaço dos sabores.*

Uma vez expostas as nossas hipóteses, que incorporam o que é conhecido experimentalmente, vamos agora especificar as propriedades de transformação dos quarks, de helicidades esquerda e direita, sob a ação do grupo $SU(2) \times U(1)$. Para isso damos os valores de T^3 e Y na Tabela 9.2. Nesta tabela d_c e s_c são as seguintes

	u_L	d_{cL}	c_L	s_{cL}	u_R	d_R	c_R	s_R	t	b
T^3	1/2	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	0	1/2	-1/2
Y	1/3	1/3	1/3	1/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3	4/3	-2/3
Q	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3	-1/3

Tabela 9.2: Números quânticos dos quarks.

misturas de d e s

$$\begin{cases} d_c = \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ s_c = -\sin \theta_c d + \cos \theta_c s \end{cases} \quad (9.47)$$

onde θ_c é o ângulo de Cabibbo, conforme introduzido na secção 6.3.1. De facto estamos aqui a simplificar. Com a introdução dos quarks b e t , a matriz de rotação 2×2 entre d e s deve ser generalizada para uma matriz de rotação 3×3 no espaço d , s e b , a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [19, 31]. Isto será explicado mais à frente quando falarmos das massas dos quarks. Em primeira aproximação é contudo verdade que o efeito dominante é a rotação de Cabibbo, isto é, consideramos só a mistura entre d e s . Dentro desta aproximação as representações de $SU_L(2)$ são

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L ; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L ; u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R \quad (9.48)$$

Usando a Eq. (9.28) como analogia e os valores da Tabela 9.2, é fácil escrever o lagrangeano de interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u W_\mu^- \\ & + \left(\frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e\bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \left(\frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu u_L - \frac{1}{2}\bar{d}_{cL}\gamma^\mu d_{cL} \right) Z_\mu \\ & + \tan\theta_W \left(\frac{2}{3}e\bar{u}\gamma^\mu u - \frac{1}{3}e\bar{d}_c\gamma^\mu d_c \right) Z_\mu \\ & + \begin{pmatrix} u & \rightarrow c \\ d_c & \rightarrow s_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rightarrow t \\ d_c & \rightarrow b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.49)$$

o que se escreve na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}}^{\text{quarks}} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma_5)d_c + \bar{c}\gamma^\mu(1-\gamma_5)s_c + \bar{t}\gamma^\mu(1-\gamma_5)b \right] W_\mu^+ \\ & - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{d}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)u + \bar{s}_c\gamma^\mu(1-\gamma_5)c + \bar{b}\gamma^\mu(1-\gamma_5)t \right] W_\mu^- \\ & + e \left[\frac{2}{3}\bar{u}\gamma^\mu u + \frac{2}{3}\bar{c}\gamma^\mu c + \frac{2}{3}\bar{t}\gamma^\mu t - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma^\mu d - \frac{1}{3}\bar{s}\gamma^\mu s - \frac{1}{3}\bar{b}\gamma^\mu b \right] A_\mu \\ & - \frac{g}{\cos\theta_W} \sum_{f=\text{quarks}} \bar{f}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma_5)f Z_\mu \end{aligned} \quad (9.50)$$

com g_V^f e g_A^f dados pela Eq. (9.41). Notar que a interação mediada pela corrente carregada tem exatamente a forma encontrada fenomenologicamente por Cabibbo para os acoplamentos semi-leptônicos $\Delta S = 0, 1$. Por outro lado a corrente neutra obedece à regra de seleção $\Delta S = 0$, isto é, o mecanismo de GIM está incorporado no modelo.

O lagrangeano da Eq. (9.50) descreve portanto as interações fracas e eletromagnéticas dos quarks, isto é as correspondentes ao grupo de simetria $SU(2) \times U(1)$. As interações fortes são explicadas pela teoria de gauge da cor, isto a Cromodinâmica Quântica (QCD). Esta é a teoria de gauge do grupo $SU(3)_{\text{cor}}$. De acordo com as nossas hipóteses os geradores de $SU(3)_{\text{cor}}$ devem comutar com os de $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Portanto o grupo *fenomenológico* que descreve as interações fracas, eletromagnéticas e fortes é

$$G = SU(3)_{\text{cor}} \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (9.51)$$

9.5 A massa dos Leptões

Como as transformações do grupo $SU(2) \times U(1)$, (ver as Eqs. (9.22) e (9.23)), tratam de forma diferente as duas helicidades, um termo de massa para os leptões não é invariante sob a aceção de $SU(2) \times U(1)$. De facto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} &= -m_e \bar{e} e = \\ &= -m_e (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) \end{aligned} \quad (9.52)$$

e numa transformação de $U(1)$, por exemplo, obtemos

$$\delta_Y \mathcal{L}_{\text{massa electrão}} = -m_e \frac{i}{2} \varepsilon (\bar{e}_R e_L - \bar{e}_L e_R) \neq 0 \quad (9.53)$$

A maneira de resolver esta dificuldade é exigir que antes da quebra espontânea de simetria os leptões não tenham massa e que seja o próprio mecanismo de quebra de simetria que dê origem à massa. Isto é possível mediante novas interações a juntar ao lagrangeano entre os leptões e os escalares, ditos campos de Higgs. Para formarmos termos de massa para os leptões carregados, temos portanto de construir primeiro um termo no lagrangeano que seja invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Façamos isso primeiro para o electrão. Com o dubleto E_L e o dubleto de Higgs ϕ podemos formar um singlete de $SU_L(2)$. Por outro lado

$$\begin{aligned} Y(E_L) &= -1 \\ Y(\phi) &= +1 \end{aligned} \quad (9.54)$$

pelo que um termo de forma $E_L^\dagger \phi$ é singlete de $SU_L(2)$ e tem hipercarga fraca

$$Y(E_L^\dagger \phi) = Y(E_L^\dagger) + Y(\phi) = +2 \quad (9.55)$$

Mas $E_L^\dagger \phi$ não é invariante de Lorentz, pois falta um spinor de helicidade direita. Notando que

$$Y(e_R) = -2 \quad (9.56)$$

concluimos que o lagrangeano invariante de Lorentz e invariante para $SU_L(2) \times U(1)$ é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e \bar{E}_L \phi e_R + \text{h.c.} \quad (9.57)$$

onde f_e é uma constante de acoplamento sem dimensões. Para vermos que este lagrangeano dá massa ao eletrão, notemos que quando se dá o fenómeno de quebra espontânea de simetria temos

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \dots \quad (9.58)$$

pelo que obtemos (tomamos f_e real)

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_e v (\bar{e}_R e_L) + \dots \quad (9.59)$$

donde se conclui que

$$f_e = \frac{m_e}{v} = 2.8 \times 10^{-6} \quad (9.60)$$

A introdução do muão e do tau é agora trivial. Há contudo um detalhe que vale a pena explicar. O lagrangeano mais geral que dá massa aos leptões carregados é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j=1}^3 f_{ij} \bar{E}(i) \phi e_R(j) \quad (9.61)$$

onde usámos a notação

$$e(1) = e ; e(2) = \mu ; e(3) = \tau \quad (9.62)$$

Em geral a matriz f_{ij} não é diagonal. Para encontrarmos os estados físicos teríamos de diagonalizar a matriz de massa e rodar os campos das interações para os campos físicos. Contudo, se os neutrinos não tiverem massa é sempre possível redefinir os campos dos neutrinos e acabar com novos campos que são diagonais tanto na matriz de massa como nos termos de interação. Portanto podemos desde logo escrever 9.61 na forma diagonal

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i=1}^3 f_i \bar{E}_L(i) \phi e_R(i) \quad (9.63)$$

Para este argumento é essencial que os neutrinos não tenham massa. Como veremos no capítulo 10 não é possível utilizar o mesmo argumento para os quarks resultando daí a matriz de Cabibbo (ou mais geralmente a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)). Hoje sabe-se que, embora muito pequena (menor que 1 eV), os neutrinos têm massa. Para explicar a massa dos neutrinos é preciso generalizar o modelo standard. Nessas generalizações aparece então o equivalente à matriz CKM. Nós neste curso introdutório vamos continuar a considerar que os neutrinos não têm massa o que é uma aproximação muito boa para as experiências nos aceleradores.

9.6 Exemplos

9.6.1 Decaimento $Z \rightarrow f\bar{f}$

Depois desta introdução e de conhecidos os propagadores e os vértices relevantes do modelo padrão das interações eletrofracas, estamos em condições de efetuar um primeiro exemplo. Consideremos então o processo

$$Z^0 \rightarrow f \bar{f} \quad (9.64)$$

onde f é qualquer fermião do modelo standard com exclusão do quark t , pois esta partícula descoberta recentemente, tem uma massa [32] $m_t \simeq 172.9$ GeV e portanto $m_t > M_Z$ o que quer dizer que o Z^0 não pode decair em $t\bar{t}$. O diagrama de Feynman é o representado na Figura 9.5, ao qual corresponde a amplitude

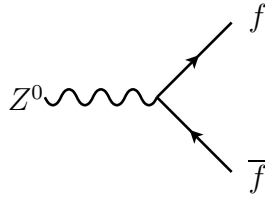


Figura 9.5: Decaimento do Z .

$$\mathcal{M} = \frac{ig}{\cos\theta_W} \epsilon_\mu(k, \lambda) \bar{u}(q_1) \gamma^\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) v(q_2) \quad (9.65)$$

A largura de decaimento é então dada por

$$\Gamma = \int \frac{1}{2M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle (2\pi)^4 \delta^4(k - q_1 - q_2) \prod_{i=1}^2 \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (9.66)$$

Para simplificar as contas, e porque é uma aproximação muito boa ($M_Z \gg m_f$), vamos desprezar as massas dos fermiões nos cálculos. No referencial em que o Z^0 está em repouso obtemos facilmente

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{M_Z} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \quad (9.67)$$

pelo que só nos falta calcular o valor médio do quadrado da amplitude.

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{3} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{g}{\cos\theta_W} \right)^2 \sum_{\lambda} \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^{*\nu}(k, \lambda) \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \left[\not{k}_1 \gamma_\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \not{k}_2 \gamma_\nu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \right] \quad (9.68)$$

Usando agora

$$\sum_\lambda \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^{*\nu}(k, \lambda) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2} \quad (9.69)$$

e calculando o traço das matrizes γ (ver Problema 9.1)

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\not{k}_1 \gamma_\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \not{k}_2 \gamma_\nu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \right] \\ &= 4 \left[\left(g_V^{f2} + g_A^{f2} \right) (q_{1\mu} q_{2\nu} + q_{1\nu} q_{2\mu} - g_{\mu\nu} q_1 \cdot q_2) - 2i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{1\alpha} q_{2\beta} g_V^f g_A^f \right] \end{aligned} \quad (9.70)$$

obtemos finalmente³

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 M_Z^2 \left[g_V^{f2} + g_A^{f2} \right] \quad (9.71)$$

o que dá para a largura (a integração em Ω dá 4π)

$$\Gamma = \frac{M_Z}{12\pi} \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 \left[g_V^{f2} + g_A^{f2} \right] \quad (9.72)$$

Este resultado costuma ser apresentado em termos da constante de Fermi definida por

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} = \left(\frac{g}{\cos \theta_W} \right)^2 \frac{1}{8M_Z^2} \quad (9.73)$$

onde se usou a relação entre as massas do Z^0 e do W^\pm no modelo padrão

$$M_W = M_Z \cos \theta_W \quad (9.74)$$

Daqui resulta

$$\Gamma = \frac{2G_F M_Z^3}{3\sqrt{2}\pi} \left[g_V^{f2} + g_A^{f2} \right] \quad (9.75)$$

o que dá, por exemplo, para os elétrons⁴,

$$\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-) \simeq 83.4 \text{ MeV} \quad (9.76)$$

³O último termo na Eq.(9.70) não contribui pois é um tensor anti-simétrico em ν e μ que está contraído com um tensor simétrico nos mesmos índices, como resulta das Eqs.(9.69) e (9.68). Ver Problema 9.1 para mais detalhes.

⁴Notar que este cálculo é em ordem mais baixa de teoria de perturbações.

que podemos comparar com o valor do PDG [32],

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= \Gamma_Z \times \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) \\ &= (2.4952 \pm 0.0023) \times 10^3 \times (3.363 \pm 0.004) \times 10^{-2} \text{ MeV} \\ &= (83.914 \pm 0.127) \text{ MeV}\end{aligned}\quad (9.77)$$

9.6.2 Colisão $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$

Como segundo exemplo consideremos a colisão $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$. Será instrutivo para ver como o W vem curar os problemas da teoria corrente-corrente. Para simplificar vamos supor que a energia no CM é tal que se podem desprezar todas as massas dos leptões mas não a massa de W nem a sua largura. Em ordem mais baixa de teoria de perturbações temos o diagrama da Fig. 9.6. A amplitude escreve-se

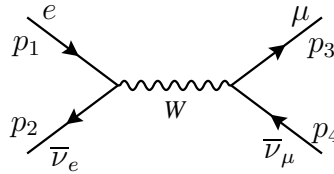


Figura 9.6: Colisão $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$.

$$\mathcal{M} = i \left(\frac{ig}{\sqrt{2}} \right)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2}}{q^2 - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu \frac{1 - \gamma_5}{2} v(p_4) \quad (9.78)$$

onde $q = p_1 + p_2$ e Γ_W é a largura de decaimento do W . Usando o facto de que estamos a desprezar as massas dos leptões, o termo no numerador do propagador do W anula-se por aplicação da equação de Dirac (por exemplo $\not{p}_1 u(p_1) = 0$, etc). Usando ainda $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$, simplificamos a expressão para

$$\mathcal{M} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{M_W^2}{s - M_W^2 + iM_W \Gamma_W} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v(p_4) \quad (9.79)$$

Calculamos agora $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ não esquecendo que o antineutrino tem só uma polarização. Obtemos (ver Problema 9.1)

$$\begin{aligned}\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{G_F^2}{2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \\ &\quad \times \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_4 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \\ &= \frac{G_F^2}{2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} 128 (p_1 \cdot p_4)^2\end{aligned}$$

$$= \frac{G_F^2}{2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} 8s^2 (1 + \cos \theta)^2 \quad (9.80)$$

onde se usou a cinemática,

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1), \quad (9.81)$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, \sin \theta, 0, \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, \sin \theta, 0, -\cos \theta) \quad (9.82)$$

Obtemos então para a secção eficaz diferencial no CM

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &= \frac{G_F^2 s}{16\pi^2} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} (1 + \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (9.83)$$

Finalmente integrando no ângulo sólido obtemos

$$\sigma = \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \frac{M_W^4}{(s - M_W^2)^2 + M_W^2 \Gamma_W^2} \quad (9.84)$$

Vemos que temos dois regimes. Para $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$ a secção eficaz cresce como

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 s}{\pi} \quad (9.85)$$

Depois para valores maiores, o propagador do W começa a ser importante e a unitariedade não é violada. Para $\sqrt{s} \gg M_W$ temos

$$\sigma \simeq \frac{1}{3} \frac{G_F^2 M_W^4}{\pi s} \quad (9.86)$$

Na Fig. 9.7 mostramos este comportamento. No painel do lado esquerdo, para $m_e, m_\mu \ll \sqrt{s} \ll M_W$, a secção eficaz cresce como s e violaria o limite da unitariedade se não fosse pelo propagador do W como se mostra no painel do lado direito. O modelo standard tem o comportamento assintótico correto.

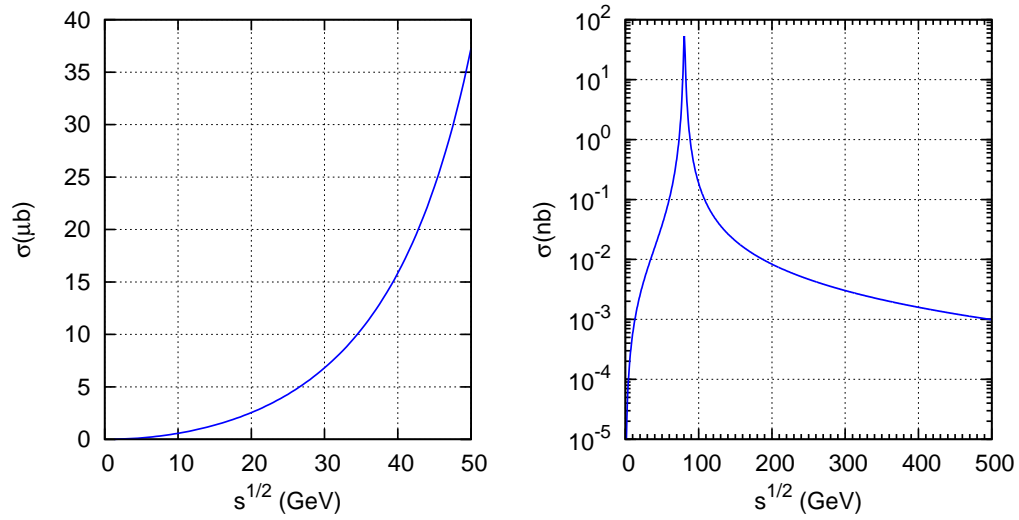


Figura 9.7: $\sigma(e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)$. No lado esquerdo temos o comportamento da Eq. (9.85) e no lado direito a equação exata, que tem o limite correto na Eq. (9.86). Notar as diferentes escalas.

Problemas capítulo 9

9.1 Este problema destina-se a reunir os resultados mais importantes para calcular traços simples.

a) Use os resultados do Problema 5.6 para mostrar a Eq. (9.70), isto é,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[\not{q}_1 \gamma_\mu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \not{q}_2 \gamma_\nu \left(g_V^f - g_A^f \gamma_5 \right) \right] & \quad (9.87) \\ = 4 \left[\left(g_V^f{}^2 + g_A^f{}^2 \right) \left(q_{1\mu} q_{2\nu} + q_{1\nu} q_{2\mu} - g_{\mu\nu} q_1 \cdot q_2 \right) - 2i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{1\alpha} q_{2\beta} g_V^f g_A^f \right] \end{aligned}$$

e) Use os resultados do Problema 5.6 para mostrar a Eq. (9.80), isto é,

$$\text{Tr}[\not{p}_2 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma_5)] \text{Tr}[\not{p}_3 \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \not{p}_4 \gamma_\nu (1 - \gamma_5)] \quad (9.88)$$

$$= 64 \left[p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2) + i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{2\alpha} p_{1\beta} \right] \quad (9.89)$$

$$\left[p_{3\mu} p_{4\nu} + p_{3\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_3 \cdot p_4) + i \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p_3^\rho p_4^\sigma \right] \quad (9.90)$$

$$= 256 (p_1 \cdot p_4) (p_2 \cdot p_3) = 256 (p_1 \cdot p_4)^2 \quad (9.91)$$

onde na última passagem se usou, para o caso sem massa, $(p_2 \cdot p_3) = (p_1 \cdot p_4)$. Da segunda para a terceira linha também se usou a identidade da Eq. (5.93) e o resultado sobre contrações de tensores simétricos com tensores anti-simétricos.

Nota: Nos testes e exames as Eqs. (5.91), (5.92) e (5.93) serão sempre dadas no enunciado, se forem necessárias.

9.2 Considere a difusão elástica

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^+ \quad (9.92)$$

a) Considere apenas o diagrama do W . Mostre que no limite das baixas energias

$$M^{(a)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}') \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(\bar{\nu}) \bar{u}(e') \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(e) \quad (9.93)$$

b) Considere agora o diagrama do Z . Mostre que

$$M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5)u(e) \quad (9.94)$$

e portanto

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = \frac{iG_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \bar{v}(\bar{\mu}')\gamma^\mu(1 - \gamma_5)v(\bar{\nu}) \bar{u}(e')\gamma_\mu(C_V - C_A\gamma_5)u(e) \quad (9.95)$$

com

$$C_V = 2\sin^2\theta_W \frac{1}{2} \quad ; \quad C_A = \frac{1}{2} \quad (9.96)$$

Este processo permite portanto distinguir uma teoria com $V - A$ puro ($C_V = C_A = 1$) do Modelo Standard. O resultado experimental confirma a estrutura do Modelo Standard com as correntes neutras.

9.3 Considere o processo $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$. Este processo ocorre via corrente neutra. Mostre que a amplitude é

$$M = -i\frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}(\nu)\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u(\nu) \bar{u}(e)\gamma_\mu(C'_V - C'_A\gamma_5)u(e) \quad (9.97)$$

com

$$C'_V = \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta_W \quad ; \quad C'_A = \frac{1}{2} \quad (9.98)$$

enquanto que numa teoria sem correntes neutras seria

$$C'_V = C'_A = 0 \quad (9.99)$$

9.4 Considere os dois decaimentos do Z^0

$$Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu} \quad (9.100)$$

$$Z^0 \rightarrow e^-e^+ \quad (9.101)$$

Mostre que

$$\frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow \nu\bar{\nu})}{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^-e^+)} \simeq 2 \quad (9.102)$$

9.5 Desprezando as massas de todos os fermiões mostre que

$$BR(Z^0 \rightarrow e^-e^+) \equiv \frac{\Gamma(Z^0 \rightarrow e^-e^+)}{\Gamma_Z} \simeq 3.4\% \quad (9.103)$$

onde $\Gamma_Z \equiv \Gamma(Z^0 \rightarrow \text{tudo})$.

9.6 Considere o processo $e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$.

- a) Quais os diagramas que contribuem para esse processo ?
- b) Escreva a amplitude correspondente ao diagrama dominante para $\sqrt{s} \simeq M_Z$.
- c) Mostre que para $\sqrt{s} \simeq M_Z$ temos

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)} \simeq 2 \tag{9.104}$$

9.7 Considere o decaimento $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$.

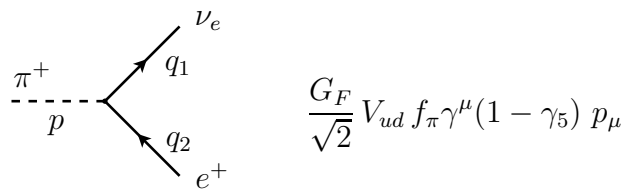
- a) Calcule a velocidade do eletrão no referencial em que o W está em repouso.
- b) Escreva a expressão para a amplitude do processo.
- c) Desprezando a massa do eletrão calcule a largura do decaimento. Compare com o resultado experimental $\Gamma(W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e) = 229 \text{ MeV}$.

9.8 Calcule o *branching ratio* $BR(W^- \rightarrow e^- \nu)$ definido por

$$BR(W^- \rightarrow e^- \nu) \equiv \frac{BR(W^- \rightarrow e^- \nu)}{\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo})} \tag{9.105}$$

onde $\Gamma(W^- \rightarrow \text{tudo}) = \Gamma_W = 2.0 \text{ GeV}$.

9.9 Embora o mesão π (pião) seja uma partícula composta (de quarks) para muitos efeitos é uma boa aproximação tratá-lo como partícula pontual com uma interação efetiva. Assim o vértice responsável pelo processo $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ é



- a) Escreva a amplitude invariante para o processo.
- b) Escreva uma expressão para a razão R dada por

$$R = \frac{\Gamma(\pi^+ \rightarrow e^+\nu_e)}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu)} \tag{9.106}$$

em função de m_e , m_μ e m_π . Compare o valor que obtiver com o valor experimental, $R_{\text{exp}} = 1.23 \times 10^{-4}$.

- c) Sabendo que o tempo de vida média do π^+ é $\tau_\pi = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}$ e que $V_{ud} = 0.974$, determine f_π .

- d) O resultado da alínea b) pode parecer estranho pois a largura de decaimento no canal do eletrão é muito menor do que no canal do muão embora a energia disponível (espaço de fase) seja muito maior. Mostre que $R = 0$ no limite em que $m_e = 0$. Explique este resultado.

9.10 Quando se desprezam as massas dos leptões e se considera que a energia no CM, \sqrt{s} , é muito inferior às massas dos bosões W e Z , as secções eficazes para os processos da tabela seguinte

Processo	λ_i
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$	1
$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	$\frac{1}{3}$
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$	$\sigma = \frac{32}{3} [(g_V^\nu)^2 + (g_A^\nu)^2] (g_V^e)^2 + 2g_V^\nu g_A^\nu g_V^e g_A^e$
$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$	
$\mu^- + e^+ \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e$	
$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$	

podem-se escrever na forma

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\pi} G_F^2 s$$

Mostre que isto é verdade, verificando os valores dados na tabela e preenchendo as entradas que faltam.

9.11 Considere os processos $H \rightarrow f + \bar{f}$, $H \rightarrow W^+W^-$, e $H \rightarrow Z^0Z^0$ no quadro do modelo padrão das interações eletrofracas, onde H é um campo escalar (spin 0) neutro designado por bosão de Higgs, f é qualquer fermião com massa do modelo, W^\pm e Z^0 são os campos de vetoriais (spin 1) com massa do modelo, que juntamente com o fóton γ são os responsáveis pelas interações eletrofracas.

- Escreva as amplitudes para os 3 processos.
- Calcule as larguras parciais $\Gamma(H \rightarrow f\bar{f})$, $\Gamma(H \rightarrow W^+W^-)$ e $\Gamma(H \rightarrow Z^0Z^0)$ em função das massas M_H , m_f , M_W e M_Z .
- Considere que $M_H = 125$ GeV. Calcule a razão de declínio (*Branching Ratio*) para o canal $H \rightarrow b\bar{b}$ definida por

$$BR(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{\Gamma(H \rightarrow b\bar{b})}{\Gamma(H \rightarrow \text{tudo})}$$

Capítulo 10

Violação de CP e a Matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

10.1 A massa dos quarks

No capítulo anterior vimos como obter a massa dos léptons considerando que os neutrinos não têm massa, o que é uma boa aproximação para os processos em que estamos aqui interessados.

Consideremos agora o problema de massa dos quarks. O problema é mais complicado por duas razões. Uma que tem que ver com a impossibilidade de diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa e as interações como foi afirmado atrás e será discutido mais à frente. A outra é mais técnica. Para percebermos o problema consideremos os quarks da primeira família

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} ; \quad u_R, d_R. \quad (10.1)$$

Se considerarmos uma interação da forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d \bar{Q}_L \phi d_R + \text{h.c.} \quad (10.2)$$

depois da quebra espontânea de simetria

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d v (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \dots, \quad (10.4)$$

isto é, um termo de massa para o quark d , mas não para o quark u . É fácil de ver que para o termos envolvendo d_R temos

$$Y(\bar{Q}_L \phi d_R) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0, \quad (10.5)$$

o que assegura a invariância teste termos para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, enquanto que para u_R temos,

$$Y(\bar{Q}_L \phi u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = +2, \quad (10.6)$$

mostrando que o termo $(\bar{Q} \phi u_R)$ não é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$. Como resolver este problema? Felizmente a solução não é muito difícil. Numa transformação de $SU_L(2) \times U_Y(1)$ o dubleto transforma-se da forma seguinte

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi & SU_L(2) \\ \delta\phi &= i\frac{\varepsilon}{2} \phi & U_Y(1). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Consideremos agora o dubleto $\tilde{\phi}$ definido por

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} ; \quad \phi^- \equiv (\phi^+)^*. \quad (10.8)$$

Vejamos agora como se transforma $\tilde{\phi}$. Para $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi^*) = i\tau_2 \left(-i\varepsilon^a \frac{\tau^{a*}}{2} \phi^* \right) \\ &= \varepsilon^a \tau_2 \tau^{a*} \frac{1}{2} \phi^*. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Usando agora a identidade

$$\tau_2 \tau^{a*} \tau_2 = -\tau^a, \quad (10.10)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= -\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tau_2 \phi^* = i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} (i\tau_2 \phi^*) \\ &= i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

isto é, transforma-se exatamente como ϕ . Mas numa transformação de $U_Y(1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi)^* = i\tau_2 \left(+i\frac{\varepsilon}{2} \phi \right)^* \\ &= -i\frac{\varepsilon}{2} (i\tau_2 \phi^*) = -i\frac{\varepsilon}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

o que mostra que $\tilde{\phi}$ tem hipercarga fraca igual a -1 . Então um termo

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_u \bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \text{h.c.}$$

$$= -h_u v (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \dots, \quad (10.13)$$

é invariante para $SU_L(2) \times U_Y(1)$, pois

$$Y \left(\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R \right) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 0, \quad (10.14)$$

e dá massa ao quark u . Precisamos portanto de ϕ para dar massa aos quarks com $T_3 = -1/2$ e de $\tilde{\phi}$ para dar massa aos quarks com $T_3 = +1/2$. Notar que se trata do mesmo dubleto, a construção de $\tilde{\phi}$ destina-se a obter uma hipercarga oposta à do ϕ . Noutras teorias, como em supersimetria ou nos modelos com dois dubletos de Higgs, este problema é resolvido usando mais do que um dubleto com hipercargas diferentes.

O termo mais geral que dá massa aos quarks é portanto

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j} h_{dij} \bar{Q}_L(i) \phi d_R(j) - \sum_{i,j} h_{uij} \bar{Q}_L(i) \tilde{\phi} u_R(j), \quad (10.15)$$

numa notação óbvia. Vemos assim que há uma matriz de massa para os quarks de baixo, e outra para os quarks de cima. É possível diagonalizar estas matrizes e passar o efeito para os termos de interação. Os termos de corrente neutra continuarão diagonais, mas nos termos de corrente carregada tal não acontecerá. De facto a corrente neutra liga os quarks de cima com os quarks de cima e os de baixo com os baixo, e portanto teremos sempre termos diagonais se usarmos a unitariedade das matrizes. Isso não acontece para as correntes carregadas pois elas misturam os quarks de cima com os de baixo que são diagonalizados de maneira diferente. O resultado é uma matriz de mistura, que convencionalmente se coloca nos quarks de baixo, a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19, 31]. Como há três famílias de quarks trata-se duma matriz 3×3 unitária. Para vermos o mecanismo, consideremos primeiro o modelo só com duas famílias de quarks deixando para uma secção seguinte o estudo do caso geral. Então o lagrangeano de massa dos quarks pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = & -h_{u1} v \bar{u} u - h_{u2} v \bar{c} c - h_{d1} v \bar{d}_c d_c - h_{d2} v \bar{s}_c s_c \\ & - h_{d12} v (\bar{d}_c s_c + \bar{s}_c d_c), \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde se usou a liberdade referida atrás para escrever os quarks u e c diretamente na forma diagonal. Olhemos para a matriz dos quarks de baixo. Escrevemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d}_c \quad \bar{s}_c) \begin{pmatrix} h_{d1} v & h_{d12} v \\ h_{d12} v & h_{d2} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Agora o ângulo de Cabibbo pode ser facilmente compreendido. De facto do ponto de vista das interações fortes, a matriz de massa deve ser diagonal nos quarks d e s .

Então se introduzirmos

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

na Eq. (10.17) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.19)$$

onde

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{12} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{21} &= + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c) \\ m_{22} &= \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Como queremos que a matriz seja diagonal,

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \quad \bar{s}) \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

devemos impor as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ e $m_{11} = m_d, m_{22} = m_s$. A condição $m_{12} = m_{21} = 0$ tem como solução

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2h_{d12}}{h_{d2} - h_{d1}}, \quad (10.22)$$

isto é relaciona os parâmetros do lagrangeano com o ângulo de Cabibbo. É usual em vez de usar os parâmetros h_{uij} e h_{dij} , usar os valores experimentais das massas dos quarks e os elementos da matriz de rotação. Esta para o caso de três famílias de quarks é a matriz CKM que vamos escrever com mais detalhe numa secção seguinte.

10.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

10.2.1 A simetria CP

Como vimos as interações fracas não são invariantes para a transformação de paridade P. Por exemplo no decaimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad (10.23)$$

os múons têm sempre a helicidade esquerda. Também não são invariantes para a operação de conjugação de carga (transforma partícula em antipartícula), porque então a reação

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (10.24)$$

viria sempre com múons esquerdos e de facto eles têm helicidade direita. No entanto o produto das duas transformações, CP, parece ser uma boa simetria pois transforma o antimúon esquerdo num múon direito que parece ser o que observamos.

Gell-Mann e Pais mostraram que a invariância de CP tinha implicações estranhas para os kaões neutros. Eles observaram que o K^0 com estranheza +1 pode-se transformar na sua antipartícula \bar{K}^0 com estranheza -1 através dos diagramas de segunda ordem representados na Fig. 10.1.

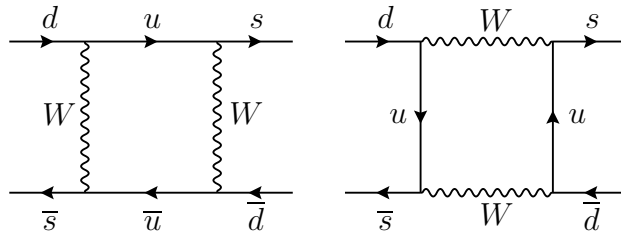


Figura 10.1: Diagramas para a oscilação $K^0 - \bar{K}^0$. Há ainda os diagramas com u trocado com c e t através da mistura na matriz CKM.

Como resultado, as partículas que observamos no laboratório não são o K^0 , \bar{K}^0 mas alguma linear combinação dos dois. Podemos formar estados próprios de CP da forma seguinte. Como os kaões são pseudo-escalares devemos ter

$$P |K^0\rangle = - |K^0\rangle, \quad P |\bar{K}^0\rangle = - |\bar{K}^0\rangle. \quad (10.25)$$

Por outro lado sob a ação da conjugação de carga temos,

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \quad (10.26)$$

e obtemos portanto

$$CP |K^0\rangle = - |\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = - |K^0\rangle. \quad (10.27)$$

Podemos portanto formar estados próprios de CP, corretamente normalizados, através de

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad (10.28)$$

com os valores próprios de CP

$$CP |K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP |K_2\rangle = - |K_2\rangle. \quad (10.29)$$

Se admitirmos que CP é conservado nas interações fracas, então K_1 só pode decair num estado com $CP = +1$ e K_2 num estado com $CP = -1$. Os kaões decaem em dois ou três piões. O estado de dois piões tem $P = +1$ e $C = +1$ enquanto o estado fundamental de três piões tem $P = -1$ mas também $C = +1$. Em conclusão, devemos ter

$$K_1 \rightarrow 2\pi, \quad K_2 \rightarrow 3\pi. \quad (10.30)$$

O decaimento em dois piões é mais rápido pois o espaço de fase é maior. Portanto, se começarmos com um feixe de K^0

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle + |K_2\rangle), \quad (10.31)$$

a componente K_1 decairá rapidamente e ficará somente um feixe quase puro de K_2 . Esta previsão foi confirmada experimentalmente, com

$$\tau_1 = 0.895 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (10.32)$$

Notar que K_1 e K_2 não são antipartículas um do outro mas antes as suas próprias antipartículas com $C = -1$ para K_1 e $C = +1$ para K_2 . Têm mesmo uma diferença de massa,

$$m_2 - m_1 = 3.48 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (10.33)$$

Em resumo, os kaões são produzidos nas interações fortes em estados próprios da estranheza, K_0 e \bar{K}^0 mas decaem através das interações fracas em estado próprios de CP, K_1 e K_2 .

10.2.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Os kaões neutros são um laboratório perfeito para testarmos se as interações fracas são de facto invariantes para o produto CP . Usando um feixe suficientemente longo sabemos que temos só kaões do tipo que têm um tempo de vida longa. Se observarmos que estes decaem em 2π sabemos que CP é violada. Esta experiência, descrita na Fig. 10.2, foi feita por Christenson, Cronin, Fitch e Turlay [33], em 1964 e eles descobriram uma fração de 1 em 500 que decaíam em 2π . O produto CP não é conservado nas interações fracas e o kaão que tem um tempo de vida longo não é um estado perfeito de CP, deve ter uma pequena mistura de K_1 . Designamos esse estado por K_L

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (\epsilon |K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (10.34)$$

De igual modo podemos definir o estado ortogonal que é predominantemente K_1 e decai rapidamente por

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1\rangle + \epsilon |K_2\rangle). \quad (10.35)$$

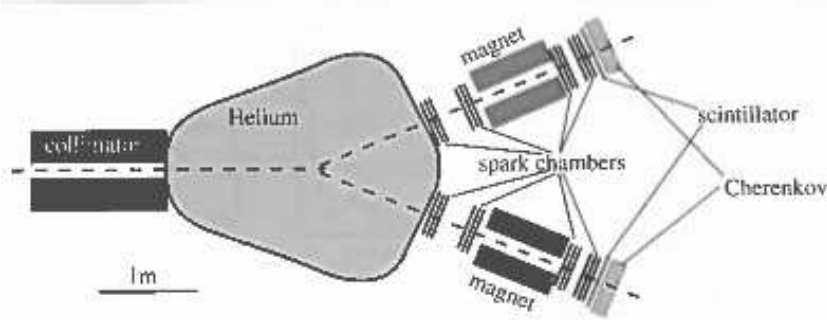


Figura 10.2: Experiência de Cronin e Fitch

O parâmetro ϵ mede o desvio do estado K_L em relação ao estado de CP, isto é, mede a violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$. Para a determinação experimental, é usual definir a razão das amplitudes

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi^{+-}} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.36)$$

Obtemos então

$$|\epsilon|^2 \equiv |\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.37)$$

O valor experimental atual é $\epsilon = 2.24 \times 10^{-3}$.

A experiência de Cronin-Fitch, como veio a ser conhecida depois da atribuição do prémio Nobel a estes dois físicos em 1980, destruiu a última esperança para uma simetria exata que envolvesse a Paridade¹. Mas as coisas ficaram ainda piores quando se olhou para os decaimentos semi-leptónicos do K_L . De facto, cerca de 41% das vezes o K_L decai semileptonicamente nos canais,

$$a) K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e; \quad b) K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \quad (10.38)$$

Agora notemos que a operação de CP leva o estado final em a) para o estado final em b) e vice-versa. Então se K_L fosse um estado próprio de CP, os dois decaimentos deviam ocorrer exatamente com as mesmas probabilidades. Experimentalmente verificou-se que isso não acontecia, e que o decaimento do K_L em positrão (ou leptão carregado positivamente) ocorria mais frequentemente, com uma diferença fracional, δ_L , definida por

$$\delta_L = \frac{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) - N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) + N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \simeq 3.3 \times 10^{-3}, \quad (10.39)$$

onde $l = e, \mu$. Há assim uma distinção absoluta entre matéria e anti-matéria. Podemos dizer que o positrão é o leptão que ocorre mais frequentemente no decaimento do K_L . De facto esta distinção entre matéria e anti-matéria é mais profunda e permite pensar em compreender porque somos feitos de matéria e não de anti-matéria.

¹Isto não é rigorosamente verdade, pois acredita-se que o teorema TCP seja válido e que o produto das três transformações seja uma invariância da teoria quântica.

10.2.3 Violação de CP noutros sistemas

Embora o sistema dos mesões K^0 tenha sido, durante mais de 30 anos, o único sistema a evidenciar a violação de CP, tal não era de esperar do ponto de vista teórico, como será explicado na secção seguinte. No ano 2000 a situação mudou drasticamente pois foi observada pelas colaborações BaBar no SLAC (Stanford, Estados Unidos) e Belle no KEK (Japão), pela primeira vez a violação de CP no sistema dos mesões B^0 ($d\bar{b}$). Essa violação de CP foi observada, medindo a assimetria

$$A = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)}{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)} = 0.679 \pm 0.020 \quad (10.40)$$

que seria zero se CP fosse conservada. O resultado de $\sim 70\%$ para esta assimetria mostra que a violação de CP é intrinsecamente grande. Perceberemos na secção seguinte por que razão em muitos casos os resultados experimentais são pequenos. Estes resultados são muito importantes pois ajudam a determinar os parâmetros da mistura dos quarks, descritos pela matriz CKM como veremos na secção seguinte. A importância destas medidas justifica que no LHC, presentemente em operação no CERN, haja uma experiência dedicada à física dos mesões B , a colaboração LHCb, que tem produzido resultados notáveis que ajudam a nossa compreensão da física da mistura dos quarks.

Finalmente, é de esperar também resultados para os mesões D^0 ($c\bar{u}$). Contudo as previsões teóricas do modelo standard são pequenas para este sistema. Os resultados experimentais de LHCb indicam um resultado positivo para a observação de violação de CP nos mesões D^0 , mas de momento só ao nível de 3σ , inferior aos 5σ necessários para ser considerado uma descoberta. Certamente que este assunto ficará resolvido com mais dados na nova fase do LHC.

10.3 Violação de CP e a matriz CKM

10.3.1 A matriz CKM

A generalização da matriz de Cabibbo para o caso de três gerações de quarks é a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19, 31] que passamos a explicar. Começemos por recordar as partes do lagrangeano do modelo standard em que aparecem os quarks. Escrevemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}}, \quad (10.41)$$

onde os diferentes lagrangeanos, corrente carregada, corrente neutra e de Yukawa, são,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{u}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d'_i \right] W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{d}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u'_i \right] W_\mu^- \quad (10.42)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} = e \left[\frac{2}{3} \bar{u}'_i \gamma^\mu u'_i - \frac{1}{3} \bar{d}'_i \gamma^\mu d'_i \right] A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{q}'_i \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) q'_i Z_\mu \quad (10.43)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}} = -h_{ij}^d \bar{Q}_{Li} \Phi d'_{Rj} - h_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{\Phi} u'_{Rj} + \text{h.c.}, \quad (10.44)$$

onde os índices $i, j = 1, 2, 3$ são de família (ou geração), isto é, por exemplo, $d'_i = (d', s', b')$ e $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$ como anteriormente. A notação u'_i, d'_i quer dizer que estes estados não são os estados de massas mas aqueles que resultam da escrita das derivadas covariantes. Para simplificar escrevemos ainda $q'_i = (u'_i, d'_i)$.

Quando se dá a quebra espontânea de simetria, substituímos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

e obtemos a partir do lagrangeano de Yukawa o lagrangeano de massa para os quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{massa}} = -\bar{d}'_L M^d d'_R - \bar{u}'_L M^u u'_R + \text{h.c.} \quad (10.46)$$

onde $M_{ij}^{d,u} = h_{ij}^{d,u} v$ e passámos a usar uma notação matricial no espaço das famílias. Em geral as matrizes $M^{d,u}$ são matrizes arbitrárias complexas. Não sendo estas matrizes diagonais, os quarks u'_i, d'_i não são os estados próprios de massa. Para os obter temos de diagonalizar as matrizes de massa, o que é sempre possível. Na verdade uma matriz arbitrária complexa é diagonalizada através de duas matrizes unitárias diferentes à esquerda e direita. Isto quer dizer que devemos ter,

$$U_L^u M^u U_R^{u\dagger} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad U_L^d M^d U_R^{d\dagger} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b). \quad (10.47)$$

Isto é equivalente a rodar os estados de acordo com

$$d_L = U_L^d d'_L, \quad d_R = U_R^d d'_R, \quad u_L = U_L^u d'_L, \quad u_R = U_R^u u'_R. \quad (10.48)$$

Depois de diagonalizar as matrizes de massa, temos de aplicar a rotação inversa nos lagrangeanos de interação, isto é

$$d'_L = U_L^{d\dagger} d_L, \quad d'_R = U_R^{d\dagger} d_R, \quad u'_L = U_L^{u\dagger} u_L, \quad u'_R = U_R^{u\dagger} u_R. \quad (10.49)$$

Olhemos primeiro para a corrente neutra. Um termo genérico é da forma, tomando os quarks down como exemplo,

$$\bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L + \bar{d}'_R \gamma^\mu d'_R = \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R, \quad (10.50)$$

onde usámos $U_L^d U_L^{d\dagger} = U_R^d U_R^{d\dagger} = 1$ devido à unitariedade das matrizes. Para os quarks u obtemos resultados semelhantes. Assim vemos que para as correntes neutras o resultado final em termos dos estados de massa é o mesmo que na Eq. (10.43), basta fazer $q' \rightarrow q$. No entanto para as correntes carregadas tal não vai ser possível pois elas misturam quarks do tipo u com quarks do tipo d . Talvez a maneira mais simples de ver isto é pensar no dubleto

$$Q'_L = \begin{bmatrix} u'_L \\ d'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L^{u\dagger} u_L \\ U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix} = U_L^{u\dagger} \begin{bmatrix} u_L \\ U_L^u U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

o que mostra o não alinhamento entre a diagonalização das matrizes de massa e as interações. Para ver a consequência escrevemos os termos relevantes do lagrangeano das correntes carregadas, Eq. (10.42). Obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu u'_L W_\mu^-) \quad (10.52)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^\dagger u_L W_\mu^- \right), \quad (10.53)$$

onde se definiu

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (10.54)$$

Como as matrizes de diagonalização são diferentes, a $V_{\text{CKM}} \neq 1$.

10.3.2 Contagem de parâmetros na matriz CKM

Como vimos, a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19,31] liga os estados próprios de sabor com os estados próprios de massa. Tradicionalmente esta mistura é descrita nos quarks do tipo *down*, isto é com $T^3 = -1/2$ e que se costuma escrever na forma,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Esta matriz é uma matriz 3×3 e unitária pela maneira como foi construída. Em geral uma matriz complexa $N \times N$ terá $2N^2$ parâmetros reais. Contudo as condições de unitariedade $VV^\dagger = 1$ impõem N^2 condições reduzindo o número de parâmetros independentes a N^2 . No entanto podemos ainda absorver $2N - 1$ fases nos campos dos $2N$ quarks deixando uma fase global arbitrária. Isto reduz o número de parâmetros para

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2. \quad (10.56)$$

Destes, $N(N - 1)/2$ correspondem a ângulos, (para $N = 2$ temos só um ângulo o ângulo de Cabibbo) e portanto os outros parâmetros devem ser fases num número dado por

$$\# \text{ fases} = (N - 1)^2 - \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2}. \quad (10.57)$$

Vemos assim que para ter uma fase complexa, necessária para explicar a violação de CP, precisamos de $N = 3$. Este argumento foi apresentado antes da descoberta da terceira família. Obtemos portanto para $N = 3$, três ângulos e uma fase independentes, e portanto 4 parâmetros físicos.

10.3.3 Parametrizações da matriz CKM

Há várias parametrizações da matriz CKM. As duas mais utilizadas são a do PDG e de Wolfenstein. A parametrização do PDG usa rotações em três planos, escrevendo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{CKM}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}, \quad (10.58)
 \end{aligned}$$

onde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e δ é uma fase responsável pela violação de CP no modelo standard. Como $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ é conveniente definir esta hierarquia numa forma explícita, ainda que aproximada. É o que faz a parametrização de Wolfenstein, onde

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (10.59)$$

A correspondência entre as duas parametrizações é

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta). \quad (10.60)$$

Os valores experimentais atuais são aproximadamente,

$$\lambda \simeq 0.223, \quad A \simeq 0.811, \quad \rho \simeq 0.131, \quad \eta \simeq 0.345 \quad (10.61)$$

$$s_{12} = \lambda \simeq 0.223, \quad s_{23} \simeq 0.041, \quad s_{13} \simeq 0.003, \quad \delta \simeq 1.2079 = 69.2^\circ. \quad (10.62)$$

Notar que os efeitos de CP são pequenos, não por a fase ser pequena, mas por vir multiplicada por s_{13} que é um número muito pequeno. Uma ideia melhor da hierarquia na matriz CKM, pode ser obtida se considerarmos os módulos dos elementos (tomamos o valor central, sem considerar os erros, ver PDG [32] para resultados mais precisos)

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} 0.97427 & 0.22534 & 0.00351 \\ 0.22520 & 0.97344 & 0.0412 \\ 0.00867 & 0.0404 & 0.999146 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Vemos que os elementos são cada vez mais pequenos à medida que nos afastamos da diagonal e também da esquerda para a direita. Esta observação está na base da parametrização de Wolfenstein.

10.3.4 Confrontado a experiência com a matriz CKM

Neste momento todos os resultados experimentais conhecidos podem ser explicados com a matriz CKM, definida na secção anterior. Em particular os processos com violação de CP, tanto no setor dos mesões $K^0 = (d\bar{s})$ mas também nos mesões $D^0 = (c\bar{u})$ e $B^0 = (d\bar{b})$, são descritos corretamente pela matriz CKM. Neste curso elementar não prosseguiremos com os detalhes desta verificação. Na Fig. 10.3 mostramos o resumo dos resultados recentes nos vários processos. Vemos que há um acordo completo entre todos os dados experimentais e os parâmetros da matriz CKM que são assim obtidos duma maneira consistente. Notar em particular o vértice do triângulo que mostra esse acordo. Nos eixos estão os parâmetros de Wolfenstein ρ e η modificados ligeiramente. Ver PDG para uma discussão mais detalhada do porquê desta modificação bem como do significado dos ângulos α, β e γ .

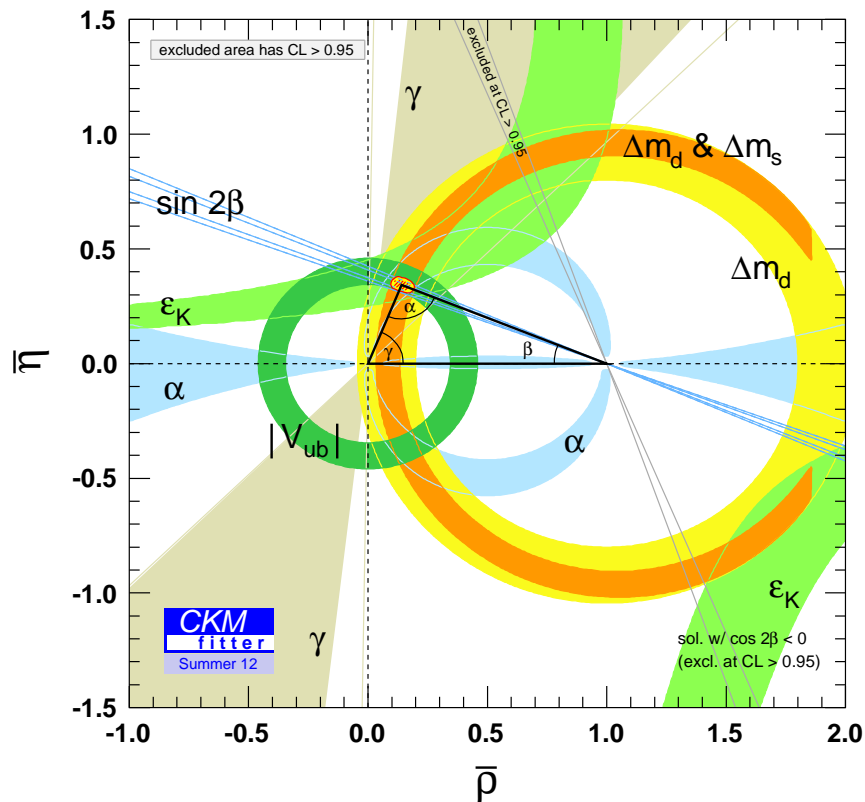


Figura 10.3: Resultados experimentais em confronto com a matriz CKM. Tirado da página da colaboração CKM-fitter.

Problemas capítulo 10

10.1 Verifique que obtém a Eq. (10.20) e que as condições $m_{12} = m_{21} = 0$ conduzem à Eq. (10.22).

10.2 Mostrar que se obtém a matriz da parametrização do PDG, multiplicando as três matrizes na Eq. (10.58).

10.3 Mostrar que a matriz CKM na representação do PDG, Eq. (10.58), é unitária.

10.4 Mostrar que a matriz CKM na representação de Wolfenstein Eq. (10.59), é unitária até à ordem indicada.

Bibliografia

- [1] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (Weinheim, Germany: Wiley-VCH., 2008).
- [2] J. C. Romão, *Introdução à Teoria do Campo* (IST, 2012), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/itc.pdf>.
- [3] D. J. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics* (Prentice Hall, New York, 1994).
- [4] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics* (Wiley, New York, 2003).
- [5] J. C. Romão, *O Modelo Standard das Interações Electrofracas* (IST, 2010), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/fie.pdf>.
- [6] E. Schrodinger, Ann. Physik **81**, 109 (1926).
- [7] O. Klein, Z. Phys. **41**, 407 (1927).
- [8] W. Gordon, Z. Phys. **40**, 117 (1926).
- [9] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A117**, 610 (1928).
- [10] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lond. **A118**, 351 (1928).
- [11] J. C. Romão, *Advanced Quantum Field Theory* (IST, 2012), Available online at <http://porthos.ist.utl.pt/ftp/textos/tca.pdf>.
- [12] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, Lisboa, 2006).
- [13] A. Bettini, *Elementary Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2008).
- [14] E. Commins and P. Bucksbaum, *Weak Interactions of Leptons and Quarks* (Cambridge University Press, 1983).
- [15] G. Gamow and E. Teller, Phys.Rev. **49**, 895 (1936).
- [16] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev. **104**, 254 (1956).

-
- [17] C. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes and R. Hudson, Phys.Rev. **105**, 1413 (1957).
- [18] R. Feynman and M. Gell-Mann, Phys.Rev. **109**, 193 (1958).
- [19] N. Cabibbo, Phys.Rev.Lett. **10**, 531 (1963).
- [20] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).
- [21] C.-N. Yang and R. L. Mills, Phys.Rev. **96**, 191 (1954).
- [22] Y. Nambu, Phys.Rev. **117**, 648 (1960).
- [23] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [24] E. Abers and B. Lee, Phys.Rept. **9**, 1 (1973).
- [25] P. W. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [26] F. Englert and R. Brout, Phys.Rev.Lett. **13**, 321 (1964).
- [27] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [28] S. Glashow, Nucl.Phys. **22**, 579 (1961).
- [29] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [30] A. Salam, Conf.Proc. **C680519**, 367 (1968), Originally printed in Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings of the Nobel Symposium held 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm.
- [31] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [32] Particle Data Group, J. Beringer *et al.*, Phys.Rev. **D86**, 010001 (2012).
- [33] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, Phys. Rev. Lett. **13**, 138 (1964).