



**Física de Partículas**  
**Aula 5**  
**Teoria Quântica dos Campos**  
**e Diagramas de Feynman**

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP

A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

7 Novembro 2013

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$

- O fóton
- A eletrodinâmica quântica (QED)
- Regras de Feynman para QED
- Exemplos
  - ◆ Colisão elástica eletrão-muão
  - ◆ Colisão elástica eletrão-positrão
  - ◆ Efeito de Compton
- O truque de Casimir
- Produção de hadrões em colisões  $e^- + e^+$ 
  - ◆ Hadronização
  - ◆ O processo elementar  $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$
  - ◆ A razão  $R$

- Em teoria quântica a quantidade fundamental é o potencial vetor. A regra é sempre que os 4-vetores contravariantes, isto é aqueles que se transformam como as coordenadas, têm as dimensões e os nomes da parte espacial. Assim definimos (aqui não estamos a fazer  $c = 1$ )

$$A^\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$$

- Podemos facilmente verificar que a condição de gauge de Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

se escreve nesta notação (notar que  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ ),

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

- O outro 4-vetor importante é a corrente  $J^\mu$  definida por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 = \partial_\mu J^\mu$$

e portanto satisfaz a equação da continuidade

- Os campos eletromagnéticos fazem parte do chamado *tensor de Maxwell* definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

que é invariante para transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

- Usando as relações usuais entre os potenciais e os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , obtemos numa conveniente representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

ou ainda

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$$

- [Sumário](#)
- [O fóton](#)
- [QED](#)
- [Regras de Feynman](#)
- [Exemplos](#)
- [O truque de Casimir](#)
- [Secções Eficazes](#)
- [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#)

- As equações de Maxwell não homogéneas (isto é com cargas e correntes) obtém-se a partir da equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

- As equações homogéneas são uma consequência do tensor  $F_{\mu\nu}$  ser antisimétrico. De facto, se definirmos o tensor dual (ver Problemas)

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0$$

que resulta do facto do tensor de Maxwell ser antisimétrico

- Esta equação é equivalente às equações homogéneas,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  e  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ . Este resultado é conhecido por identidade de Bianchi.
- A equação de Maxwell não homogénea na gauge de Lorentz, escreve-se,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu$$

[Sumário](#)[O fóton](#)[QED](#)[Regras de Feynman](#)[Exemplos](#)[O truque de Casimir](#)[Secções Eficazes](#) [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- Contudo esta escolha não eliminou completamente a ambiguidade dos potenciais. De facto podemos ainda usar uma transformação de gauge em que  $\square\Lambda = 0$ , sem modificar a equação de movimento. Esta dificuldade está na base de muitos problemas em quantizar a teoria de Maxwell, que não vamos detalhar aqui.

- No espaço livre a equação é a equação das ondas,

$$\square A^\mu = 0$$

que tem como solução ondas planas

$$A^\mu(x) = N e^{-i p \cdot x} \epsilon^\mu(p)$$

onde  $N$  é uma normalização e  $\epsilon^\mu(p)$  é o vetor polarização que caracteriza o spin do fóton.

- A condição de Lorentz implica que

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0 .$$

- Sabe-se do eletromagnetismo clássico que o fóton tem dois estados de polarização (spin 1 sem massa), mas aqui o vetor polarização tem quatro graus de liberdade (4-vetor). Esta dificuldade está relacionada com a ambiguidade dos potenciais e resolve-se escolhendo uma dada condição de gauge. A condição de Lorentz já retira um grau de liberdade.
- Para fixar completamente os graus de liberdade escolhe-se muitas vezes a gauge de Coulomb, que é uma restrição da classe de gauges de Lorentz onde

$$A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0$$

o que quer dizer que as polarizações são perpendiculares à direção de movimento. Se tomarmos essa direção como o eixo dos  $zz$  então os dois vetores independentes são

$$\epsilon(p, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon(p, 2) = (0, 0, 1, 0)$$

- Estes vetores obedecem às relações gerais

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \epsilon_\mu(p, 1)\epsilon^\mu(p, 2) = 0, \quad \epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda) = -1$$

# A eletrodinâmica quântica (QED)

[Sumário](#)

[O fóton](#)

[QED](#)

[Regras de Feynman](#)

[Exemplos](#)

[O truque de Casimir](#)

[Secções Eficazes](#)

[\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#)

- A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação de elétrons (e positrões) com fótons. Mais à frente discutiremos em detalhe a construção do lagrangeano de QED. Aqui vamos somente discutir a forma da interação.
- Vimos anteriormente que para a equação de Dirac temos uma corrente de probabilidade conservada dada por,

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0$$

Se multiplicarmos pela carga do elétron,  $q_e = -e$ , onde  $e$  é a carga do próton, obtemos a corrente eletromagnética

$$J^\mu = -ej^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

- Esta é a corrente que aparece na equação de Maxwell. Como é que esta corrente interatua com o fóton? Do eletromagnetismo clássico sabemos que o lagrangeano para uma partícula não relativista com carga  $q$  em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v}$$



# A eletrodinâmica quântica (QED)

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

- Em teoria de campo definimos uma densidade lagrangeana por

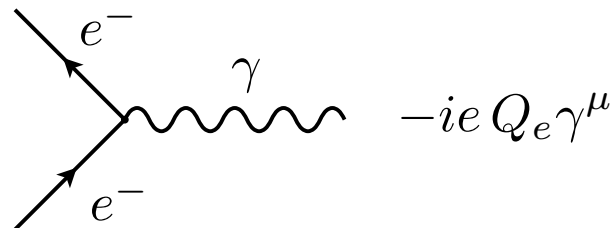
$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L}$$

- Isto dá para a interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -eQ_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

onde definimos  $Q_e = -1$ .

- Na linguagem dos diagramas de Feynman descrevemos a interação da forma seguinte



- Vemos assim que a regra de Feynman corresponde a *tirar* os campos do lagrangeano de interação e multiplicar o resultado por  $i$ .

Vamos agora indicar o conjunto completo de regras de Feynman para QED. Elas seguem o que vimos para o modelo  $ABC$  com as modificações necessárias devido a termos spinores e antipartículas.

1. Para num dado processo desenhar todos os diagramas topologicamente distintos.
2. Para cada eletrão que entra no diagrama um fator  $u(p, s)$ . Se sai do diagrama um fator  $\bar{u}(p, s)$ .
3. Para cada positrão deixando o diagrama um fator  $v(p, s)$ . Entrando o diagrama um fator  $\bar{v}(p, s)$ .
4. Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização  $\varepsilon_\mu(k)$  e no estado final  $\varepsilon_\mu^*(k)$ .
5. Por cada linha fermiónica interna o propagador

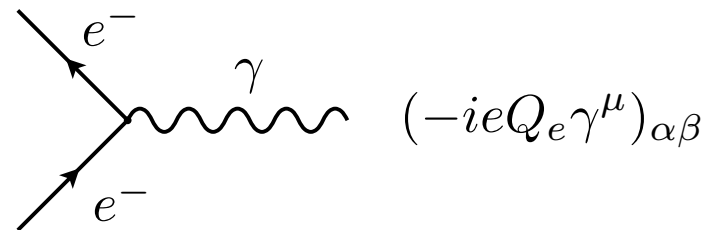
$$\beta \xrightarrow[p]{} \alpha \quad S_{F\alpha\beta}(p) = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)
[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

6. Por cada linha interna do fóton o propagador (na gauge de Feynman)

$$\mu \text{---} \underset{k}{\text{~~~~~}} \text{---} \nu \qquad D_{F\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

7. Por cada vértice o fator



$$(-ieQ_e \gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

onde  $e = |e|$ , é a carga do positrão e claro que para o eletrão  $Q_e = -1$ .

8. Por cada momento interno não fixado por conservação de energia-momento (*loops*) um fator

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$$

[Sumário](#)[O fóton](#)[QED](#)[Regras de Feynman](#)[Exemplos](#)[O truque de Casimir](#)[Secções Eficazes](#) [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

9. Por cada loop de fermiões um sinal  $(-1)$ .
10. Um fator  $-1$  entre diagramas que diferem por permutações ímpares de linhas fermiónicas (estatística de Fermi dos fermiões).
11. O resultado da aplicação das regras anteriores dá  $-i\mathcal{M}$ , por isso para obter  $\mathcal{M}$  multiplique o resultado final por  $i$ .

## Comentários

1. As regras 9) e 10) são um pouco difíceis de explicar sem operadores e teorema de Wick. A este nível aparecem mais como uma receita.
2. Para escrever corretamente as linhas fermiónicas devemos notar que elas no final devem dar um número, isto é uma matriz  $1 \times 1$  no espaço de Dirac. Para obter isso deve-se usar a regra empírica que se começa a escrever cada linha do diagrama pela ponta da seta.
3. Os denominadores dos propagadores têm a mesma forma do que no caso da teoria escalar  $ABC$ . Os numeradores diferem para elétrons e fótons (gauge de Feynman) da maneira indicada.

- Se nos ficarmos por duas partículas no estado final, o número de processos em causa é muito reduzido. Na tabela 1 está feito um resumo.

Processo	Observação
$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	Em QED
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	Difusão Bhabha
$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	Efeito Compton
$e^- + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow e^- + \text{Núcleo}(Z) + \gamma$	Bremsstrahlung
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Aniquilação de pares
$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	Difusão Möller
$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$	Criação de pares
$\gamma + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow \text{Núcleo}(Z) + e^- + e^+$	Criação de pares

Table 1: Processos simples em QED.

- Vamos analisar os três primeiros casos.

[Sumário](#)

[O fóton](#)

[QED](#)

[Regras de Feynman](#)

**Exemplos**

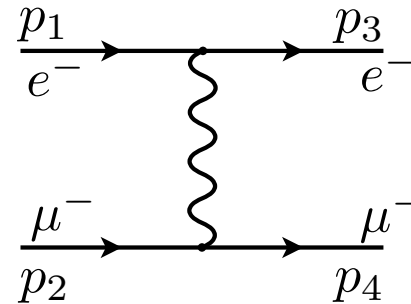
- eletrão-muão
- eletrão-positrão
- Efeito de Compton

[O truque de Casimir](#)

[Secções Eficazes](#)

[\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#)

- Consideremos primeiro a colisão elástica eletrão-muão. Embora este processo não seja em QED no sentido restrito, o muão é em tudo, exceto na massa, igual ao eletrão e tem a vantagem de haver só um diagrama



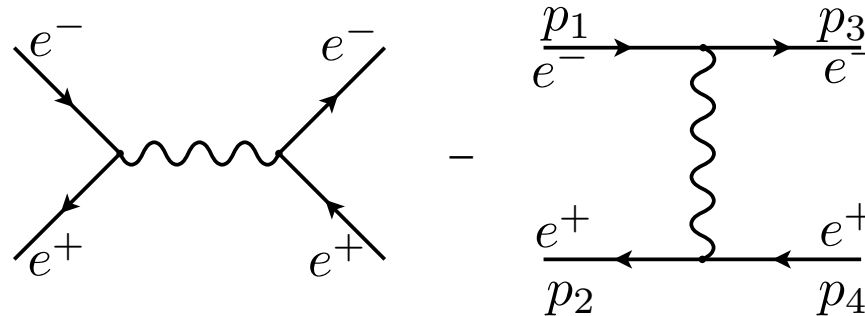
- Com a cinemática da figura obtemos para a amplitude,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\ &= - \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2) \end{aligned}$$

- Para prosseguir e calcular a secção eficaz, temos de calcular  $|\mathcal{M}|^2$ . Antes de fazer isso vamos ver mais dois processos e voltaremos então ao cálculo das secções eficazes.

# Colisão elástica eletrão-positrão

- Neste processo, conhecido por difusão Bhabha, temos dois diagramas



- Existe um sinal menos entre os dois diagramas, (consequência da regra 10)
- A amplitude escreve-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

onde

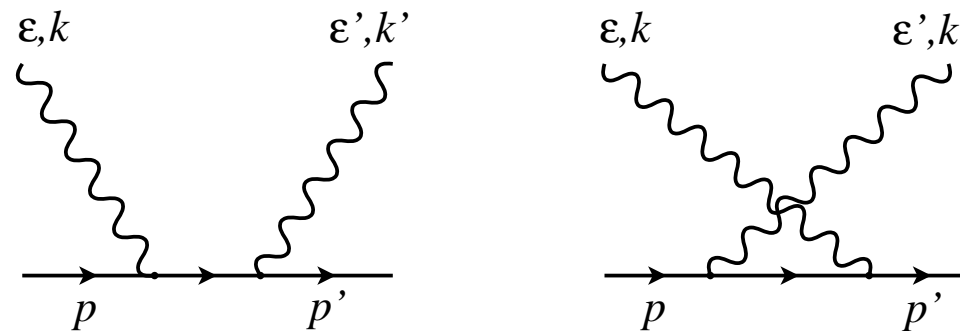
$$\mathcal{M}_1 = -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad \mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4)$$

- As variáveis de Mandelstam,  $s, t$  são, como habitualmente

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2$$

- Sumário
- O fóton
- QED
- Regras de Feynman
- Exemplos
  - eletrão-muão
  - eletrão-positrão
  - Efeito de Compton
- O truque de Casimir
- Secções Eficazes
- $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$

- Consideremos finalmente o efeito de Compton.



- Com a cinemática indicada na figura, obtemos para a amplitude

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p+k)^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k')$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p-k')^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\nu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k') .$$

- Sumário
- O fóton
- QED
- Regras de Feynman
- Exemplos
  - elétron-muão
  - elétron-positrão
  - Efeito de Compton
- O truque de Casimir
- Secções Eficazes
- $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$



[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- **Traços**

- Comentários

- Teoremas

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- Na secção anterior calculámos as amplitudes para três processos em QED. Vamos antes usar as amplitudes para calcular as secções eficazes. Tomemos a difusão Bhabha pois normalmente é calculada no referencial do CM (para anéis de colisão  $e^- e^+$ ) e nós já deduzimos a fórmula para a secção eficaz diferencial para esse caso,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2, \quad (\hbar = c = 1)$$

- Em geral a amplitude depende dos spins do estado inicial e do estado final  $\mathcal{M}(s_i, s_f)$ . Na maior parte das experiências nós não escolhemos o spin dos estados iniciais nem medimos os spins do estado final.
- Devemos por isso, para comparar com os resultados experimentais, somar sobre todos os spins do estado final e tirar a média sobre as combinações de spin possíveis para o estado inicial, isto é, devemos calcular,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{n_{s_i}} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\mathcal{M}|^2$$

onde o  $n_{s_i}$  é o número de polarizações de spin do estado inicial (1/4 para a difusão de Bhabha).

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- **Traços**

- Comentários

- Teoremas

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- Para evitar para já a complicação de antipartículas, consideremos a amplitude do processo eletrão-muão. Obtemos numa notação óbvia

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)]^*$$

- Vemos portanto que vamos ter de lidar com expressões do tipo

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*$$

- Mas calculando o complexo conjugado da matriz  $1 \times 1$  devemos usar o conjugado hermítico. Assim

$$\begin{aligned} [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= u(b)^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) = \bar{u}(b)\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) \\ &\equiv \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) \end{aligned}$$

onde usámos o facto de que  $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$  e definimos

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma \gamma^0$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- **Traços**

- Comentários

- Teoremas

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- Obtemos portanto

$$\begin{aligned}
 G &= \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)\Gamma_1 \left[ \sum_{s_b} u(b)\bar{u}(b) \right] \bar{\Gamma}_2 u(a) \\
 &= \sum_{s_a} \bar{u}(a)\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} u(a)_\beta \\
 &= \sum_{s_a} u(a)_\beta \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} = (\not{p}_a + m_a)_{\beta\alpha} [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} \\
 &= \text{Tr} [(\not{p}_a + m_a)\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2]
 \end{aligned}$$

- Como passo importante usámos a relação

$$\sum_s u(a)_\alpha \bar{u}(a)_\beta = (\not{p}_a + m_a)_{\alpha\beta}$$

- Transformámos somas sobre polarizações em traços de matrizes  $\gamma$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- Traços

- **Comentários**

- Teoremas

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

1. Este método foi utilizado pela primeira vez por Casimir e veio a ser conhecido por truque de Casimir.

2. A matriz  $\Gamma$  é sempre um produto de matrizes  $\gamma$ . Assim para calcular  $\bar{\Gamma}$ , é conveniente usar o resultado

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0$$

que pode ser verificada diretamente a partir da definição. Em particular obtemos o resultado importante  $\overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu$ .

3. Para spinores  $v$  (para as antipartículas) devemos usar

$$\sum_s v(a)_\alpha \bar{v}(a)_\beta = (\not{p}_a - m_a)_{\alpha\beta}$$

em particular

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{v}(a)\Gamma_1 v(b)] \bar{v}(b)\bar{\Gamma}_2 v(a) = \text{Tr} [(\not{p}_a - m_a)\Gamma_1(\not{p}_b - m_b)\bar{\Gamma}_2]$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- Traços

- Comentários

- **Teoremas**

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- **Teorema 5.1** *O traço dum número ímpar de matrizes  $\gamma$  é zero.*

**Dem:**

$$Tr[\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n] = Tr[\not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5 \gamma_5]$$

$$Tr[\gamma_5 \not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5]$$

$$(-1)^n Tr[\not{a}_1 \cdots \not{a}_n]$$

*Então para  $n$  ímpar o traço é nulo.*

- **Teorema 5.2** *Os traços de 0 e 2 matrizes  $\gamma$  são*

$$Tr1 = 4$$

$$\begin{aligned} Tr[\not{a}\not{b}] &= Tr[\not{b}\not{a}] = \frac{1}{2} Tr[(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a})] = a \cdot b Tr1 \\ &= 4a \cdot b \end{aligned}$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- Traços

- Comentários

- **Teoremas**

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- **Teorema 5.3** *O traço de  $n$  matrizes  $\gamma$  obtém-se por recorrência a partir de traços de  $n - 2$  matrizes  $\gamma$ .*

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{a}_1 \cdots \not{a}_n] = & a_1 \cdot a_2 \text{Tr}[\not{a}_3 \cdots \not{a}_n] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_4 \cdots \not{a}_n] \\ & + \cdots + a_1 \cdot a_n \text{Tr}[\not{a}_2 \cdots \not{a}_{n-1}] \end{aligned}$$

- Este teorema tem um corolário importante,

**Corolário:** *Para 4 matrizes  $\gamma$  temos:*

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4] = & a_1 \cdot a_2 \text{Tr}[\not{a}_3 \not{a}_4] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_4] + a_1 \cdot a_4 \text{Tr}[\not{a}_2 \not{a}_3] \\ = & 4 [a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3] \end{aligned}$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)

- Traços

- Comentários

- **Teoremas**

[Secções Eficazes](#)
 [\$e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}\$](#) 

- **Teorema 5.4** *Os traços com a matriz  $\gamma_5$  obtém-se a partir dos seguintes resultados*

$$\text{Tr}[\gamma_5] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \not{a} \not{b}] = 0$$

$$\text{Tr}[\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] = -4i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$$

- O teorema seguinte não é sobre traços mas é importante pois permite reduzir o número de matrizes  $\gamma$  em alguns traços:

- **Teorema 5.5**

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a}$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{c} \not{b} \not{a}$$

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu = 2[\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}]$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)
[Secções Eficazes](#)

- **Difusão Bhabha**

- Efeito de Compton

 [\$e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}\$](#) 

- Estamos agora em posição de calcular a secção eficaz no referencial do CM. Para simplificar vamos considerar que  $\sqrt{s} \gg m_e$  e vamos desprezar as massas do eletrão e positrão. Um cálculo simples dá então

$$\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle = \frac{e^4}{4} \left\{ \frac{1}{t^2} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right. \\ \left. + \frac{1}{s^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] - \frac{2}{st} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right\}$$

- Usando os teoremas sobre os traços podemos obter

$$\text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] = 8 \frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2}$$

$$\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] = 8 \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2}$$

$$\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] = -8 \frac{(s+t)^2}{st}$$



[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)
[Secções Eficazes](#)

- Difusão Bhabha

- Efeito de Compton

 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

- Obtemos portanto

$$\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle = 2e^4 \left[ \frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2\frac{(s+t)^2}{st} \right]$$

- Para a secção eficaz usamos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2$$

com  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$

- Obtemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[ \frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2\frac{(s+t)^2}{st} \right]$$

onde fizemos ( $\hbar = c = 1$ )

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

- Vamos agora considerar o efeito de Compton. Na experiência usual o eletrão é considerado em repouso, pelo que se trata duma colisão no referencial do laboratório.
- Não vamos deduzir a expressão para a secção eficaz diferencial desde o início pois já o fizemos para um caso parecido no problema 2.4. Adaptando essa equação à nossa cinemática,

$$p_1 = k = (k, 0, 0, k), \quad p_3 = k' = (k', k' \sin \theta, 0, k' \cos \theta)$$

$$p_2 = p = (m_e, 0, 0, 0), \quad p_4 = p' = p + k - k'$$

escrevemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 m_e} \frac{k'^2}{k} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{|(k + m_e)k' - kk' \cos \theta|} = \frac{1}{64\pi^2 m_e^2} \frac{k'^2}{k^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$$

- No último passo usámos a cinemática do efeito de Compton,

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m_e}(1 - \cos \theta)} .$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)
[Secções Eficazes](#)

- Difusão Bhabha

- **Efeito de Compton**

 [\$e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}\$](#) 

- Para prosseguir com a nossa soma sobre as polarizações do estado final e média sobre as polarizações do estado inicial, temos de explicar o que se passa com o fóton.

- O resultado geral é (ver problemas),

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \text{termos proporcionais a } p_{\mu} \text{ ou } p_{\nu}$$

- Como a invariância de gauge do eletromagnetismo assegura que os termos proporcionais a  $p_{\mu}$  ou  $p_{\nu}$  não contribuem (ver Problemas), podemos simplesmente usar,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu}$$

- O cálculo agora resume-se ao cálculo dos traços. É algo laborioso mas o resultado final é simples. Obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^{\nu}] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \\ &= 8 [2 m^4 + m^2(-p \cdot p' - p' \cdot k + 2p \cdot k) + (p \cdot k)(p' \cdot k)] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \end{aligned}$$

[Sumário](#)
[O fóton](#)
[QED](#)
[Regras de Feynman](#)
[Exemplos](#)
[O truque de Casimir](#)
[Secções Eficazes](#)

- Difusão Bhabha

- **Efeito de Compton**

 [\$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}\$](#) 

□ Igualmente

$$\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle = 8 [2m^4 + m^2(-p \cdot p' + p' \cdot k' - 2p \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k')] \frac{e^4}{(2p \cdot k')^2}$$

□ Finalmente para os termos cruzados

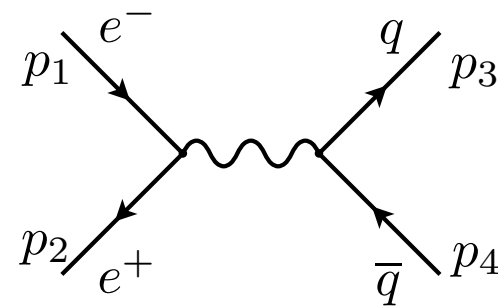
$$\begin{aligned} \langle [M_1 M_2^\dagger + M_1^\dagger M_2] \rangle &= \frac{8e^4}{4(k \cdot p)(k' \cdot p)} [2(k \cdot p)(p \cdot p') - 2(k \cdot k')(p \cdot p') \\ &\quad - 2(p \cdot p')(p \cdot k') + m^2(-2k \cdot p - k \cdot p' + k \cdot k' - p \cdot p' + 2p \cdot k' + p' \cdot k') - m^4] \end{aligned}$$

□ Pondo tudo junto, e usando a nossa cinemática, obtemos a fórmula de Klein-Nishima,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2 m^2} \left( \frac{k'}{k} \right)^2 \left[ \left( \frac{k'}{k} \right) + \left( \frac{k}{k'} \right) - \sin^2 \theta \right]$$

- Sumário
- O fóton
- QED
- Regras de Feynman
- Exemplos
- O truque de Casimir
- Secções Eficazes
- $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- Hadronização**
- $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- A razão  $R$

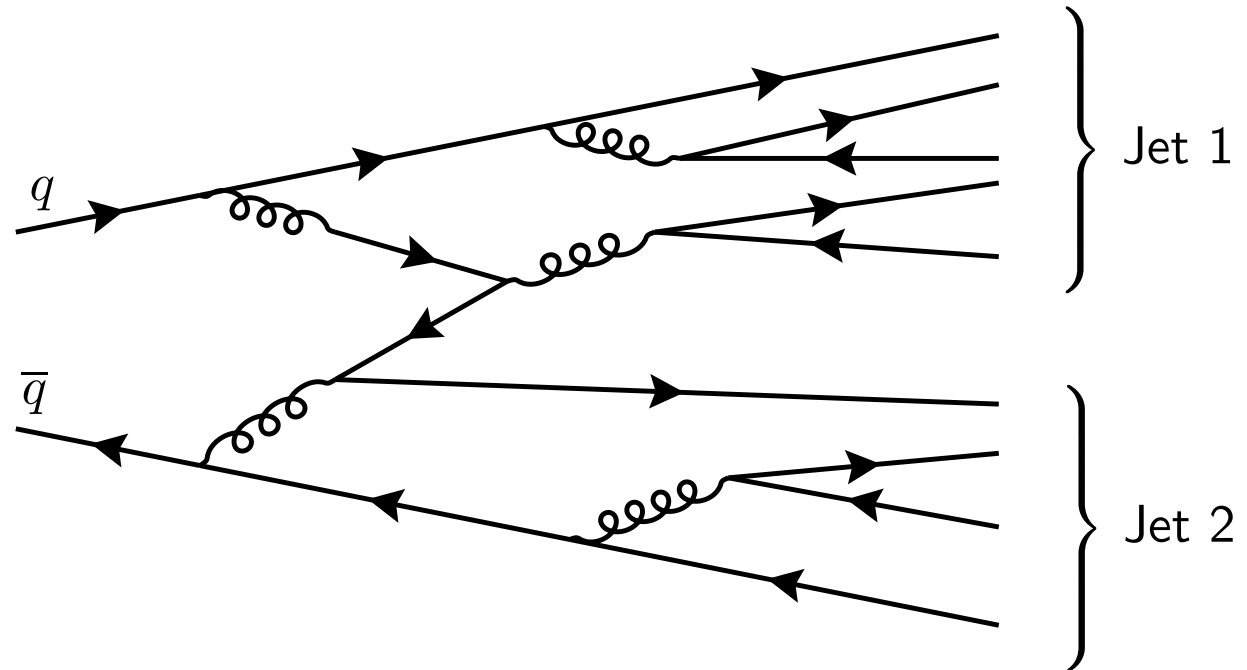
- Na colisão  $e^- + e^+$  podemos produzir um grande número de estados finais:  $e^- + e^+$  (Bhabha),  $\mu^- + \mu^+$ ,  $\gamma + \gamma$  e em geral qualquer par de fermiões  $f\bar{f}$ .
- Podemos portanto ter também a produção de pares quark-antiquark,  $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$ . Se as energias foram baixas isso ocorre através do diagrama de QED indicado na figura



- Como os quarks não são estados livres (confinamento), quando estão a distâncias da ordem da dimensão dos hádrões ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ) a interação forte vai produzir muitos novos pares  $q\bar{q}$  e glúões que finalmente se combinam para produzir os hádrões que são medidos no detetor. Este processo chama-se hadronização

- Sumário
- O fóton
- QED
- Regras de Feynman
- Exemplos
- O truque de Casimir
- Secções Eficazes
- $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- Hadronização**
- $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- A razão  $R$

- A hadronização está representada na figura



- Quando estes acontecimentos são observados nos detetores eles mantêm a memória do acontecimento original e aparecem como dois jatos de partículas que aparecem em sentidos opostos (*back-to-back*) e apontando para as direções dos quarks iniciais que lhes deram origem

□ Acontecimentos com dois e três jatos

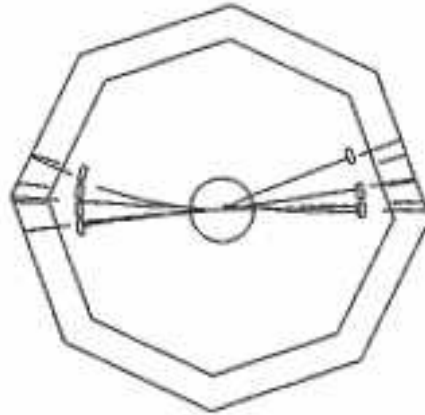


Fig. 8.2 A typical two-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

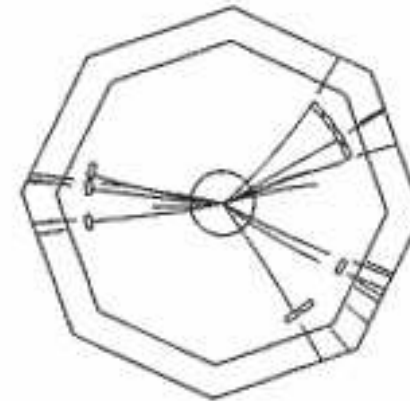


Fig. 8.3 A three-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

- Por vezes parecem acontecimentos com três jatos que podem ser interpretados como resultado da hadronização do glúão, um processo de ordem mais elevada, desde que esse glúão leve uma percentagem significativa da energia

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

● Hadronização

●  $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

● A razão  $R$

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

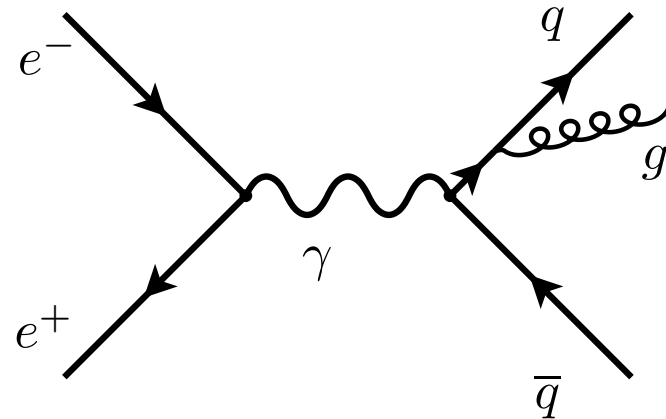
$e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$

● Hadronização

●  $e^- e^+ \rightarrow q \bar{q}$

● A razão  $R$

- Processo elementar com emissão dum glúon



- De facto a observação deste acontecimentos são uma prova experimental da existência dos glúões, os portadores da força forte na chamada Cromodinâmica Quântica (QCD).



Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• Hadronização

•  $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• A razão  $R$

- Apesar de todas as complicações anteriores o processo elementar que está na base de todas estas considerações é um processo simples em QED (desde que as energias sejam tais que  $\sqrt{s} \ll M_Z$ ),

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$$

- A amplitude é então

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)]$$

onde  $Q_q$  é a carga do quark em unidades de  $e$ , isto é,  $Q_u = 2/3$ ,  $Q_d = -1/3$ .

- Usando o truque de Casimir obtemos para a amplitude não polarizada, isto é, somando todos os spins finais e fazendo a média sobre os spins iniciais,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_q) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_q) \gamma_\nu]$$

onde  $s = (p_1 + p_2)^2$ .

- Usando os teoremas dos traços podemos obter,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + m_e^2(p_3 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_q^2] \\ &= Q_q^2 e^4 \left[ 1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned}$$

- Aqui usámos a cinemática para obter

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_e), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_e)$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_q \sin \theta, 0, \beta_q \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_q \sin \theta, 0, -\beta_q \cos \theta)$$

$$\beta_e = \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}}$$

onde  $\beta_e, \beta_q$  são as velocidades do eletrão e do quark no referencial do CM, respetivamente.

- Usando a expressão no CM obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_q}{\beta_e} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$$

$$= \frac{Q_q^2 e^4}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[ 1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right]$$

- A secção eficaz obtém-se fazendo a integração final nas variáveis angulares com o resultado

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[ 1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[ 1 + \frac{2m_q^2}{s} \right]$$

- Notar nesta equação o limiar de produção. A energia no CM tem de ser maior que duas vezes a massa do quark para a reação ter lugar, isto é,  $\sqrt{s} > 2m_q$  assegurando que as raízes quadradas são bem definidas.
- Quando  $\sqrt{s} \gg m_e, m_q$  a expressão simplifica-se enormemente para dar,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s}$$

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• Hadronização

•  $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• A razão  $R$

## A razão $R$

Sumário

O fóton

QED

Regras de Feynman

Exemplos

O truque de Casimir

Secções Eficazes

$e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• Hadronização

•  $e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}$

• A razão  $R$

- Quando começamos com uma energia do feixe mínima para aparecer o primeiro par de quarks e começamos a aumentar essa energia vamos passando os diferentes limiares de produção para as diferentes espécies de leptões e quarks.

- Este efeito pode ser descrito numa forma conveniente definindo a razão  $R$ ,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)}$$

- Se usamos a expressão aproximada anterior devemos obter

$$R(\sqrt{s}) = 3 \sum_i Q_i^2$$

onde a soma é sobre todos os quarks tais que  $\sqrt{s} > 2m_q$ . O fator 3 vem porque cada quark aparece em 3 cores. Assim se estivermos a uma energia onde só podem ser produzidos os quarks  $u, d, s$  temos

$$R = 3 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = 2$$

[Sumário](#)[O fóton](#)[QED](#)[Regras de Feynman](#)[Exemplos](#)[O truque de Casimir](#)[Secções Eficazes](#)[e<sup>-</sup> e<sup>+</sup> → q \$\bar{q}\$](#) 

- Hadronização

- e<sup>-</sup> e<sup>+</sup> → q $\bar{q}$

- A razão  $R$

- Acima do limiar de produção do quarks  $c$  devemos ter

$$R = 2 + 3 \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33$$

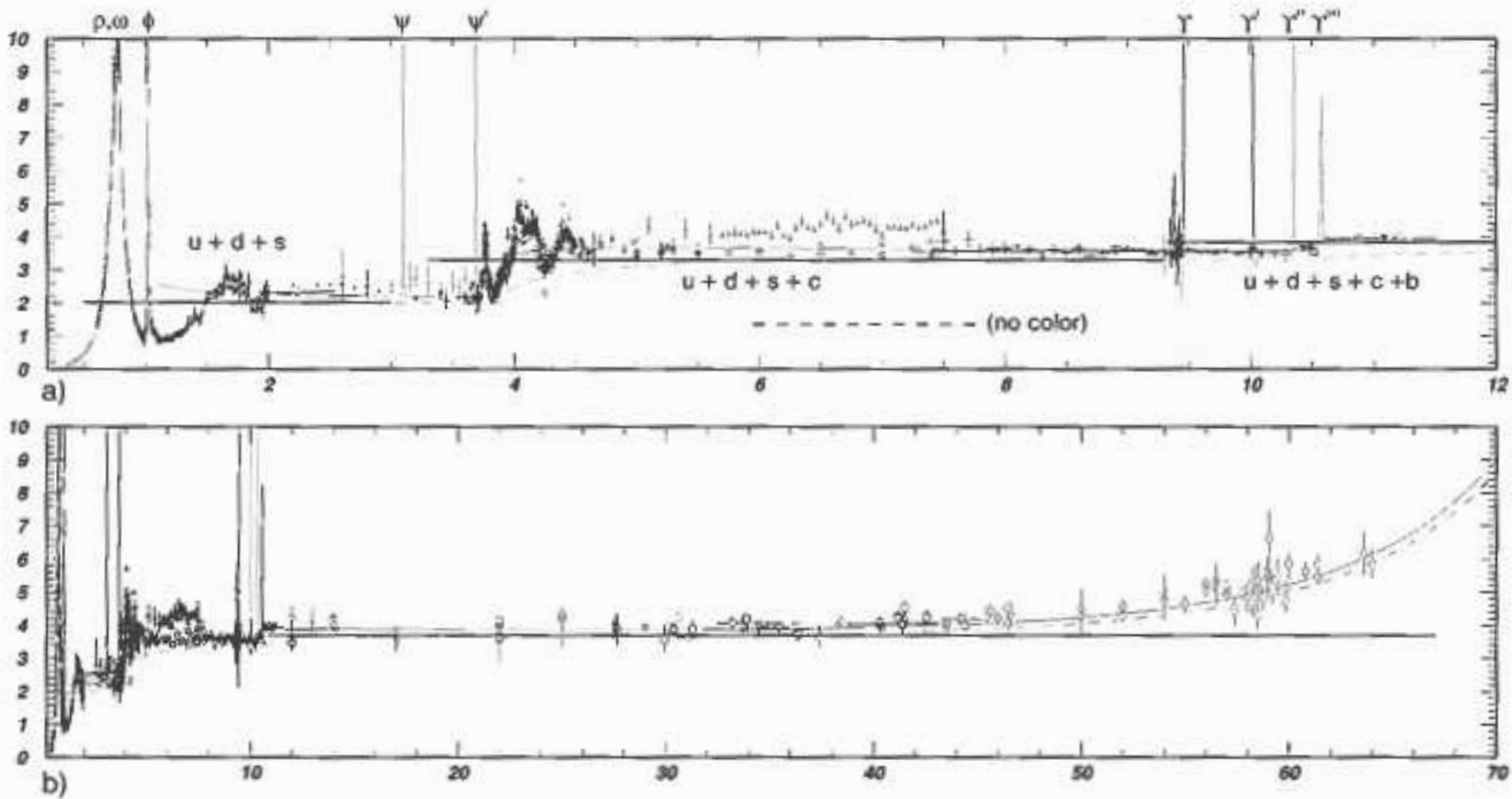
- Acima do limiar do  $b$

$$R = \frac{10}{3} + 3 \left( \frac{-1}{3} \right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67$$

- Se houve energia suficiente para produzir o quark top tínhamos  $R = 5$ . Temos assim um efeito de escada em que há medida que a energia aumenta o  $R$  vai subindo a escada.

# A razão $R$

Como compara isto com a experiência? Vemos na figura,



o gráfico de  $R$  baseado em dados experimentais. Vemos que o andamento em patamares se confirma, incluindo o fator 3 da cor.

- Sumário
- O fóton
- QED
- Regras de Feynman
- Exemplos
- O truque de Casimir
- Secções Eficazes
- $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- Hadronização
- $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$
- A razão  $R$

[Sumário](#)

[O fóton](#)

[QED](#)

[Regras de Feynman](#)

[Exemplos](#)

[O truque de Casimir](#)

[Secções Eficazes](#)

[e<sup>-</sup> e<sup>+</sup> → q \$\bar{q}\$](#)

• Hadronização

• e<sup>-</sup> e<sup>+</sup> → q $\bar{q}$

• A razão  $R$

- ❑ No entanto há zonas de ressonâncias que não são explicadas pelo argumento acima.
- ❑ Quando a reação tem a energia exata podem ser produzidos estados ligados quark-antiquark que aparecem como ressonâncias na figura:  $\rho, \omega, \phi, \psi, \dots$ .
- ❑ Mas se excluirmos estas ressonâncias o andamento geral confirma os cálculos e em particular constitui uma demonstração experimental da existência de tripletos de cor, a base para a construção da Cromodinâmica Quântica, a teoria das interações fortes. Voltaremos a esta teoria depois de vermos as teorias de gauge