



Física de Partículas

Aula 4

Equações de Klein-Gordon e Dirac

Jorge C. Romão

Instituto Superior Técnico, Departamento de Física & CFTP
A. Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

29 Outubro 2013

Sumário

Equação KG

Equação de Dirac

Unidades $\hbar = c = 1$

Partícula livre

Covariância

Bilineares

Matrizes de Dirac

Conjugação C

- A equação de Klein-Gordon
- A equação de Dirac
- Soluções para a partícula livre
 - ◆ Soluções da equação de Dirac no referencial próprio
 - ◆ Soluções da equação de Dirac para $p \neq 0$
- Covariância da equação de Dirac
- Bilineares covariantes

[Sumário](#)

[Equação KG](#)

• [Eq. Schrödinger](#)

• [Eq. Klein-Gordon](#)

[Equação de Dirac](#)

[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)

[Partícula livre](#)

[Covariância](#)

[Bilineares](#)

[Mar de Dirac](#)

[Conjugação \$C\$](#)

- Começamos pela partícula livre. Em mecânica quântica não relativista a equação de Schrödinger é obtida da equação fundamental

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

- Usando o Hamiltoniano livre não relativista que é

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

e fazendo a substituição $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$.

- Obtemos então

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

[Sumário](#)

[Equação KG](#)

• [Eq. Schrödinger](#)

• [Eq. Klein-Gordon](#)

[Equação de Dirac](#)

[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)

[Partícula livre](#)

[Covariância](#)

[Bilineares](#)

[Matr. de Dirac](#)

[Conjugação \$C\$](#)

- Em relatividade restrita a energia está relacionada com o momento linear através da relação

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2$$

onde

$$p^\mu \equiv \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

- Temos então

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2$$

ou seja

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \Rightarrow E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

Sumário

Equação KG

• Eq. Schrödinger

• Eq. Klein-Gordon

Equação de Dirac

Unidades $\hbar = c = 1$

Partícula livre

Covariância

Bilineares

Mar de Dirac

Conjugação C

- Classicamente exige-se que as energias sejam positivas por isso deveríamos ter no caso relativista

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

- Somos imediatamente confrontados com o problema de interpretar a raiz quadrada dum operador.
- Para evitar este problema vamos encontrar uma equação para H^2 . Isto obtém-se facilmente iterando a equação e observando que $[i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, H] = 0$.
- Obtém-se então

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi$$

ou ainda

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0, \quad \square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

[Sumário](#)

[Equação KG](#)

• [Eq. Schrödinger](#)

• [Eq. Klein-Gordon](#)

[Equação de Dirac](#)

[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)

[Partícula livre](#)

[Covariância](#)

[Bilineares](#)

[Mar de Dirac](#)

[Conjugação \$C\$](#)

- ❑ Agora não temos dificuldades em interpretar os operadores mas introduzimos no problema as soluções de energia negativa.
- ❑ Como veremos as soluções de energia negativa não podem deixar de existir em mecânica quântica relativista e a sua interpretação está relacionada com as antipartículas.
- ❑ Mas não foi a existência de soluções com energia negativa que levou ao abandono da equação de KG, chamada equação de Klein-Gordon como equação relativista para o eletrão mas antes outro problema relacionado com a *densidade* de probabilidade.
- ❑ Partindo da equação de KG e da equação complexa conjugada obtemos

$$\psi^* \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi - \psi \left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^* = 0$$

ou

$$0 = \psi^* \square \psi - \psi \square \psi^* = \partial_\mu (\psi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \psi) \equiv \partial_\mu (\psi^* \overset{\rightarrow}{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overset{\leftarrow}{\partial}^\mu \psi)$$

Sumário

Equação KG

• Eq. Schrödinger

• Eq. Klein-Gordon

Equação de Dirac

Unidades $\hbar = c = 1$

Partícula livre

Covariância

Bilineares

Mar de Dirac

Conjugação C

- Temos então

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad ; \quad J^\mu = \psi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \psi \equiv \psi^* \overset{\rightarrow}{\partial}^\mu \psi - \psi^* \overset{\leftarrow}{\partial}^\mu \psi$$

- Na identificação usual $J^\mu = (\rho c, \vec{J})$ pelo que a densidade será

$$\rho = \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)$$

- Esta equação mostra que ρ não pode ser interpretado como uma densidade de probabilidade por não ser definida positiva.
- Finalmente uma terceira razão fez abandonar a equação da Klein-Gordon. De facto ela não conduz aos níveis de energia do átomo de *hidrogénio*
- Se excetuarmos esta última razão, a equação de KG foi abandonada pelas razões erradas. De fato a equação de Klein Gordon é uma boa equação para spin 0

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- [Covariância](#)
- [Bilineares](#)
- [Mar de Dirac](#)
- [Conjugação \$C\$](#)

- Confrontado com os problemas anteriores Dirac propôs uma outra equação relativista para o eletrão. Como na equação fundamental, a derivada em ordem ao tempo aparece linearmente é natural admitir num contexto relativista que o Hamiltoniano seja também linear nas derivadas em ordem às coordenadas

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2 \right) \psi \equiv H \psi$$

- É fácil de ver que α^i e β não podem ser números pois então a relação entre energia e momento duma partícula relativista não seria verificada. Também ψ não pode ser um escalar se $\rho = \psi^* \psi$ é para ser interpretada como a componente temporal dum 4-vetor corrente. Assim Dirac propôs que $\vec{\alpha}$ e β sejam matrizes hermíticas $N \times N$ (para que H seja hermítico) e que ψ seja uma matriz coluna com N elementos.

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

Para que ela faça sentido devemos satisfazer as condições:

- ❑ Deve dar a relação correta entre a energia e o momento isto é $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, para uma partícula livre.
- ❑ Deve fornecer uma probabilidade definida positiva.
- ❑ Deve ser covariante para transformações de Lorentz.

Vejamos os dois primeiros requisitos. Para que se obtenha a relação energia-momento correta basta que cada componente satisfaça à equação de Klein Gordon. Para isso iteramos a equação e obtemos

$$\begin{aligned}
 -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= (-i\hbar c \alpha^i \nabla_i + \beta m c^2) i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \\
 &= \left[-\hbar^2 c^2 \frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \nabla_i \nabla_j - i\hbar m c^2 (\alpha^i \beta + \beta \alpha^i) \nabla_i + \beta^2 m^2 c^4 \right] \psi
 \end{aligned}$$

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- [Covariância](#)
- [Bilineares](#)
- [Mar de Dirac](#)
- [Conjugação \$C\$](#)

- Para que cada componente satisfaça a equação de Klein-Gordon devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = 2\delta^{ij} \\ \alpha^i \beta + \beta \alpha^i = 0 \\ (\alpha^i)^2 = \beta^2 = 1 \end{array} \right.$$

- Temos portanto que construir 4 matrizes que *anticomutem*, sejam *hermíticas* e cujo *quadrado* seja a *identidade*. É desde logo claro que não podem ser 2×2 pois só há 3 matrizes 2×2 que anticomutam, as matrizes de Pauli.
- Para ver a dimensão mínima em que é possível realizá-las, observemos que sendo hermíticas os seus valores próprios são reais e iguais a ± 1 pois $\alpha^{i2} = \beta^2 = 1$. Das relações de anticomutação pode-se concluir que têm traço nulo. Por exemplo

$$\alpha^i = -\beta \alpha^i \beta \Rightarrow \text{Tr}(\alpha^i) = \text{Tr}(-\beta \alpha^i \beta) = -\text{Tr}(\alpha^i) = 0$$

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- [Covariância](#)
- [Bilineares](#)
- [Mar de Dirac](#)
- [Conjugação \$C\$](#)

- Isto tem como consequência que N deve ser par para que o número de valores próprios $+1$ e -1 seja igual. Como $N = 2$ está excluído devemos ter $N = 4$ como a dimensão mais baixa possível. Uma representação explícita, a chamada *representação de Dirac* é

$$\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- σ_i são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- É um exercício trivial verificar que as equações acima satisfazem os requisitos (embora a escolha não seja única)

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Mar de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Vamos agora ver a questão da corrente de probabilidade. Para isso escrevemos a equação conjugada hermítica. Obtemos

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = \psi^\dagger (i\hbar c \alpha^i \overleftarrow{\partial}_i + \beta mc^2)$$

- Multiplicando a equação de Dirac à esquerda por ψ^\dagger e a conjugada à direita por ψ e subtraindo obtemos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c \nabla_i (\psi^\dagger \alpha^i \psi)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) + \vec{\nabla} \cdot (\psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi) = 0$$

- Isto permite identificar uma densidade de probabilidade e uma corrente de probabilidade:

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad \vec{j} = \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi$$

[Sumário](#)[Equação KG](#)[Equação de Dirac](#)[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#) [Partícula livre](#)[Covariância](#)[Bilineares](#)[Matrizes de Dirac](#)[Conjugação \$C\$](#)

- Integrando a equação em todo o espaço obtemos

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger \psi = 0$$

o que está de acordo com identificarmos $\psi^\dagger \psi$ como uma densidade de probabilidade definida positiva.

- A notação anterior antecipa o facto de \vec{j} ser um 3-vetor. De facto temos de mostrar isso e muito mais.
- Na secção seguinte demonstraremos que $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$ é um 4-vetor conservado, $\partial_\mu j^\mu = 0$ e que a equação de Dirac é *covariante*, isto é, que mantém a mesma forma em todos os referenciais de inércia.

[Sumário](#)[Equação KG](#)[Equação de Dirac](#)[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#) [Partícula livre](#)[Covariância](#)[Bilineares](#)[Matrizes de Dirac](#)[Conjugação \$C\$](#)

- Antes de continuar a discutir a equação de Dirac vamos introduzir uma conveniente notação 4-dimensional. Multiplicamos a equação de Dirac por $\frac{1}{c}\beta$ à esquerda e introduzimos as matrizes

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad ; \quad \gamma^i \equiv \beta \alpha^i \quad i = 1, 2, 3$$

- Então a equação de Dirac escreve-se

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$$

ou ainda

$$(i\hbar\rlap{-}\not{\partial} - mc)\psi = 0$$

onde se introduziu a notação, devida a Feynman

$$\rlap{-}\not{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$$

[Sumário](#)[Equação KG](#)[Equação de Dirac](#)[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#) [Partícula livre](#)[Covariância](#)[Bilineares](#)[Mar de Dirac](#)[Conjugação \$C\$](#)

- As matrizes γ^μ , na representação de Dirac, são

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$$

- É fácil de ver que as relações a que α^i e β devem obedecer se escrevem numa forma compacta em termos das matrizes γ , isto é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

onde, como habitualmente

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Mar de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Em física de partículas é usual utilizar um sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$. Isto simplifica muito as expressões e os cálculos numéricos. Vamos rever aqui os conceitos fundamentais.
- No sistema de unidades $\hbar = c = 1$, complementado com $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ (notar que $c = 1$ implica $\epsilon_0 \mu_0 = 1$), só há uma unidade independente. A conversão faz-se usando as relações:

$$\begin{aligned}
 1 = c &= 2.999792 \times 10^8 \text{ ms}^{-1} & \rightarrow & 1 \text{ s} = 2.999792 \times 10^8 \text{ m} \\
 1 = \hbar c &= 197.327 \text{ MeV.fermi} & \rightarrow & 1 \text{ MeV}^{-1} = 197.327 \times 10^{-15} \text{ m} \\
 1 = \hbar &= 1.054571 \times 10^{-34} \text{ Js} & \rightarrow & 1 \text{ J.s} = 9.482529 \times 10^{33}
 \end{aligned}$$

- Como exemplo, vamos escrever as várias unidades em termos da energia. Temos sucessivamente

$$\begin{aligned}
 1 \text{ m} &= 5.067730 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1} \\
 1 \text{ s} &= 1.520214 \times 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \\
 1 \text{ Kg} &= \frac{1 \text{ J.s}}{1 \text{ m}^2 \times 1 \text{ s}^{-1}} = \frac{1 \text{ J.s} \times 1 \text{ s}}{1 \text{ m}^2} = 5.613088 \times 10^{29} \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

[Sumário](#)[Equação KG](#)[Equação de Dirac](#)[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#) [Partícula livre](#)[Covariância](#)[Bilineares](#)[Mar de Dirac](#)[Conjugação \$C\$](#)

- Particularmente úteis são as relações:

$$1 \text{ s}^{-1} = 6.578023 \times 10^{-22} \text{ MeV}$$

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.568189 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$$

$$1 \text{ pb} = 2.568189 \times 10^{-15} \text{ MeV}^{-2}$$

$$1 \text{ MeV}^{-2} = 3.893794 \times 10^{14} \text{ pb}$$

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 3.893794 \times 10^8 \text{ pb}$$

$$1 \text{ eV}^{-2} = 1.5202 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

- Se quisermos podemos sempre re-introduzir as potencias de \hbar e c como vamos ver no exemplo seguinte

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Mar de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Considere que um cálculo da secção eficaz deu o resultado

$$\sigma = \lambda \frac{1}{s}$$

onde λ é um parâmetro sem dimensões e s o quadrado da energia (massa) no CM. Vamos escrever a expressão introduzindo as potências de \hbar e c .

- Para isso começamos por escrever

$$\sigma = \lambda \frac{1}{s} \hbar^\alpha c^\beta$$

- Sabemos que a secção eficaz tem as dimensões duma área e que $[s] = [M]^2$. Por isso devemos ter

$$L^2 = \frac{1}{M^2} (ML^2T^{-1})^\alpha (LT^{-1})^\beta = M^{\alpha-2} L^{2\alpha+\beta} T^{-\alpha-\beta}$$

que tem como solução $\alpha = 2$, $\beta = -2$. O resultado final será portanto,

$$\sigma = \frac{\lambda \hbar^2}{s c^2}$$

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- Referencial próprio**
- Referencial Lab
- [Covariância](#)
- [Bilineares](#)
- [Mar de Dirac](#)
- [Conjugação \$C\$](#)

- Tomemos a equação de Dirac para a partícula livre ($\hbar = c = 1$ a partir de agora)

$$(i\partial - m)\psi(x) = 0$$

- Esta equação admite como soluções ondas planas

$$\psi(x) = w(\vec{p})e^{-i p_\mu x^\mu}$$

desde que $p_\mu p^\mu = m^2$. Isto implica que $(p^0)^2 = E^2 = \vec{p} \cdot \vec{p} + m^2$, e portanto temos soluções com energia positiva e negativa.

- Nas nossas convenções fazemos $p^0 = E/c = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} > 0$ sempre, pelo que devemos ter

$$\psi^r(x) = w^r(\vec{p})e^{-i \varepsilon_r p_\mu x^\mu}$$

onde $\varepsilon_r = \pm 1$ para soluções de energia positiva e negativa, respetivamente, e o índice r explicita as diferentes soluções independentes, como veremos de seguida.

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- **Referencial próprio**

- Referencial Lab

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Para determinar $w^r(\vec{p})$ vamos considerar primeiro o caso da partícula em repouso. No referencial próprio a equação de Dirac reduz-se a

$$\left(i \gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m \right) \psi = 0$$

- Usando a representação de Dirac é fácil de ver que a equação se escreve

$$m (\varepsilon_r \gamma^0 - 1) \psi^r = 0$$

onde

$$\psi^r = w^r(0) e^{-i \varepsilon_r m t}, \quad \varepsilon_r = \begin{cases} +1 & r = 1, 2 \\ -1 & r = 3, 4 \end{cases}$$

$$w^{(1)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w^{(2)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w^{(3)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad w^{(4)}(0) = \sqrt{2m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- Referencial próprio**
- Referencial Lab
- [Covariância](#)
- [Bilineares](#)
- [Matrizes de Dirac](#)
- [Conjugação C](#)

- ❑ Vemos portanto que $r = 1, 2$ são soluções da energia *positiva* e $r = 3, 4$ da energia *negativa*.
- ❑ O factor $\sqrt{2m}$ da normalização foi introduzido por conveniência como será claro mais tarde.
- ❑ Se usarmos o operador

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

vemos ainda que $w^{(r)}(0)$ são funções próprias de Σ^3 com valores próprios ± 1 . Assim as soluções $r = 1, 2$ descrevem o eletrão de *Schrödinger-Pauli* e as soluções de energia negativa, $r = 3, 4$ serão interpretadas mais tarde.

- ❑ Na re-interpretação de Dirac das soluções de energia negativa como as anti-partículas, a ausência de um eletrão de energia negativa com spin CP corresponde a um positrão com spin down, por isso $w^3(0)$ corresponderá a spin down enquanto que $w^4(0)$ a spin up.

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- Referencial próprio

- Referencial Lab

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Se tivéssemos visto como os spinors se transformam numa transformação de Lorentz, poderíamos aqui fazer simplesmente uma mudança de referencial.
- Voltaremos a este assunto na secção seguinte, mas sem demonstração, pelo que aqui vamos construir as soluções para $\vec{p} \neq 0$ directamente seguindo de perto o Griffiths. Queremos soluções da forma

$$\psi(x) = N w(k) e^{-i k \cdot x}$$

onde N é uma normalização a determinar no final.

- Substituindo obtemos

$$(\gamma \cdot k - m)w(p) = (\not{k} - m)w(k) = 0$$

onde usámos a notação, devida a Feynman,

$$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu \equiv \gamma \cdot k = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k}$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- Referencial próprio

- Referencial Lab

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação C](#)

- Começamos por notar que a equação acima é uma equação algébrica matricial. Na representação de Dirac temos

$$\not{k} = \gamma^0 k^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} k^0 & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \end{bmatrix}$$

- Escrevendo o 4-spinor w em termos de dois bi-spinores,

$$w(p) = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} (\not{k} - m)w &= \begin{bmatrix} k^0 - m & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (k^0 - m)w_A & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma}w_B \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma}w_A & -(k^0 + m)w_B \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- Referencial próprio

- Referencial Lab

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Estas equações conduzem às relações,

$$w_A = \frac{1}{k^0 - m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_B, \quad w_B = \frac{1}{k^0 + m} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma}) w_A,$$

- A consistência requer então que

$$w_A = \frac{1}{(k^0)^2 - m^2} (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 w_A$$

- Mas usando $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$, concluímos que deve ser

$$|\vec{k}|^2 = (k^0)^2 - m^2, \quad (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = m^2$$

- Mostremos que $(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{k}|^2$. Para isso usamos a propriedade das matrizes de Pauli,

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad \Rightarrow (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 = k_i k_j \sigma_i \sigma_j = |\vec{k}|^2$$

- Portanto k^μ deve ser um quadri-vetor relacionado com o 4-momento da partícula por

$$k^\mu = \pm p^\mu$$

correspondendo o sinal + às soluções de energia positiva, as partículas e o sinal – às soluções de energia negativa, as anti-partículas.

- Podemos agora construir 4 soluções independentes da equação de Dirac:

- Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então ($E = p^0$)

$$w_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Escolher $w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_B = \frac{c \vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- Referencial próprio

- Referencial Lab

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação C](#)

3. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Escolher $w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Então

$$w_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_A = \frac{c\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□ Com a normalização canónica,

$$w^\dagger w = 2E$$

obtemos finalmente as quatro soluções independentes,

$$u^{(1)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E + m} \end{bmatrix}, \quad u^{(2)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E + m} \\ \frac{-p_z}{E + m} \end{bmatrix}$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)

- Referencial próprio

- **Referencial Lab**

[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

$$v^{(1)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E + m} \\ \frac{-p_z}{E + m} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v^{(2)} = \sqrt{E + m} \begin{bmatrix} \frac{p_z}{E + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E + m} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Onde usámos a notação convencional, u para as partículas e v para as anti-partículas. Notar que devido aos sinais $k^\mu = \pm p^\mu$, as equações para u e v diferem dum sinal,

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (\not{p} + m)v = 0 .$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)

- **Spinors**

- Adjunto

[Bilineares](#)
[Matr. de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Escrevemos a equação de Dirac na forma,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

sem nunca nos preocuparmos em que referencial estamos.

- A razão é que estamos implicitamente a usar o facto de que deve ter a mesma forma em todos os referenciais de inércia, isto é no referencial S' deverá ser

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') = 0$$

- Numa transformação geral entre S e S' definida através das transformações,

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

um escalar fica invariante $\phi'(x') = \phi(x)$, mas um vetor muda como as coordenadas,

$$A'^\mu = a^\mu{}_\nu A^\nu.$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)

- **Spinors**

- Adjunto

[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- A questão é saber como se transformam os spinores nas transformações de Lorentz. Vamos aqui só dar o resultado. Se definirmos

$$\psi'(x') = S(a)\psi(x)$$

então a equação de Dirac é covariante se

$$S(a)\gamma^\mu S^{-1}(a)a^\nu{}_\mu = \gamma^\nu$$

- A forma explícita depende do tipo de transformações de Lorentz. Assim

1. Rotações

$$S_R = e^{\frac{i}{2}\vec{\theta}\cdot\vec{\Sigma}}$$

onde $\vec{\theta}$ é um vetor com a direção da rotação e módulo igual ao ângulo de rotação e

$$\vec{\Sigma} = \begin{bmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{bmatrix}$$

Notar que em cada bloco diagonal os spinores transformam-se como em mecânica quântica não relativista.

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)

- **Spinors**

- Adjunto

[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

2. Transformações de Lorentz (boosts)

$$S_L = e^{-\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\alpha}}$$

onde $\vec{\alpha}$ são as matrizes de Dirac, e $\vec{\omega}$ é um vetor na direção da velocidade relativa entre S e S' tal que

$$\tanh \omega = \frac{|\vec{V}|}{c}$$

3. Inversão no espaço (Paridade)

Neste caso

$$a^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_P = \gamma_0$$

- [Sumário](#)
- [Equação KG](#)
- [Equação de Dirac](#)
- [Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
- [Partícula livre](#)
- [Covariância](#)
- [Spinors](#)
- [Adjunto](#)
- [Bilineares](#)
- [Matrizes de Dirac](#)
- [Conjugação \$C\$](#)

- A escolha mais simplista para formar um invariante seria $\psi^\dagger \psi$. Contudo esta quantidade não é um escalar mas sim a componente temporal dum 4-vetor, como vimos. Como formar então um escalar? Para isso notemos, que

$$S_L^\dagger = S_L \neq S_L^{-1} \rightarrow \psi'^\dagger \psi' \neq \psi^\dagger \psi$$

- Podemos mostrar que para todas as transformações de Lorentz temos

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0$$

- Por isso se definirmos o chamado **adjunto de Dirac**

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \gamma^0$$

então temos

$$\psi' = S\psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} S^{-1}$$

- Portanto

$$\bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} S^{-1} S \psi = \bar{\psi} \psi$$

e um escalar, invariante para **todas** as transformações de Lorentz.

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Mar de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Tal como qualquer matriz complexa 2×2 se pode exprimir em termos de 4 matrizes linearmente independentes (por exemplo a matriz identidade mais as matrizes de Pauli) assim qualquer matriz 4×4 se pode exprimir em termos de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes.
- Para introduzir estas matrizes é conveniente definir a seguinte matriz

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

que na representação de Dirac tem a forma

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Da definição resultam as propriedades importantes

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = 1$$

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Mar de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Estamos agora em posição de definir as 16 matrizes 4×4

$$\Gamma^S = 1$$

$$\Gamma_\mu^V = \gamma_\mu$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\Gamma_\mu^A \equiv \gamma_5 \gamma_\mu$$

$$\Gamma^P = \gamma_5$$

- Os símbolos S , V , T , A e P designam: escalar, vector, tensor, pseudo vector e pseudo-escalar e têm a ver com a maneira como os bilineares

$$\bar{\psi} \Gamma^a \psi \quad a = S, V, T, A \text{ e } P$$

se transformam para transformações de Lorentz.

[Sumário](#)
[Equação KG](#)
[Equação de Dirac](#)
[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)
[Partícula livre](#)
[Covariância](#)
[Bilineares](#)
[Matrizes de Dirac](#)
[Conjugação \$C\$](#)

- Por exemplo

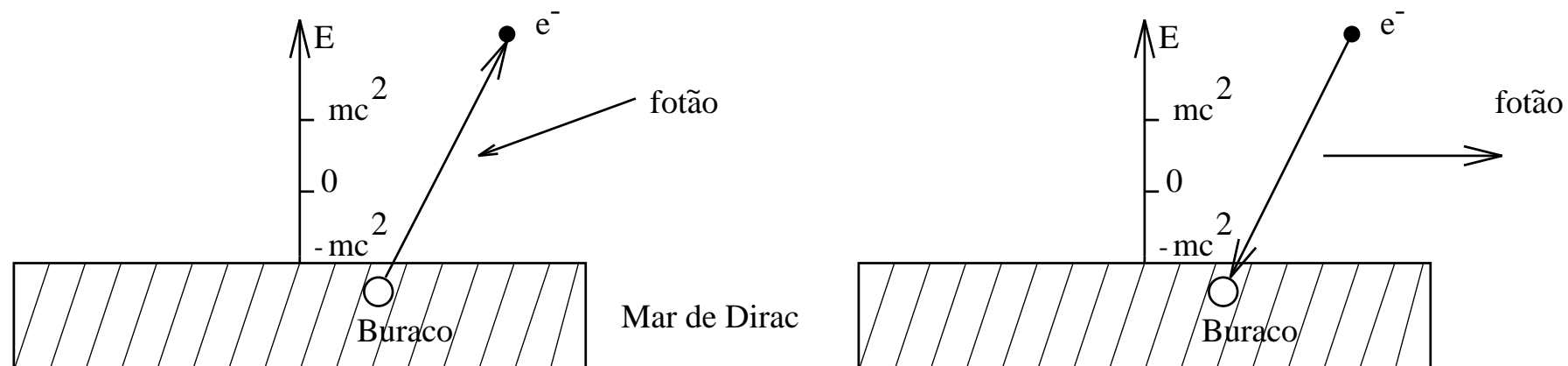
$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}'(x') \Gamma^A \psi'(x') &= \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') \\
 &= \bar{\psi}(x) S^{-1} \gamma_5 \gamma^\mu S \psi(x) \\
 &= \det a \ a^\mu{}_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x)
 \end{aligned}$$

- Usámos o facto de $[S, \gamma_5] = 0$ para transformações de Lorentz próprias e $\{\mathcal{P}, \gamma_5\} = 0$ para a inversão no espaço.
- Isto mostra que $\bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)$ se transforma como um sector axial ou pseudo-sector.
- De forma semelhante se podiam demonstrar as propriedades de transformação dos outros bilineares.

[Sumário](#)[Equação KG](#)[Equação de Dirac](#)[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#) [Partícula livre](#)[Covariância](#)[Bilineares](#)[Mar de Dirac](#)[Conjugação \$C\$](#)

- ❑ Apesar de todos os sucessos da equação de Dirac descritas anteriormente o problema das soluções com energia negativa continua por resolver. Este problema não é um problema académico, pois é preciso explicar porque é que os electrões nos átomos não efectuam transição para estados de energia negativa. Por exemplo um cálculo simples dá para o electrão, no estado fundamental do hidrogénio, uma taxa de transição de 10^8 s^{-1} para decair no intervalo $[-mc^2, -2mc^2]$
- ❑ Foi Dirac quem primeiro forneceu um tratamento consistente das soluções de energia negativa. O argumento de Dirac só funciona para fermiões pois faz uso do *Princípio de Exclusão de Pauli*.
- ❑ Assim para Dirac o *vácuo* da teoria é constituído por todos os estados de energia negativa preenchidas. Devido ao princípio de exclusão de Pauli um electrão com energia $E > 0$ não pode então efectuar uma transição para um estado de energia negativa, explicando a estabilidade dos átomos. Claro que o vácuo tem energia e momento infinitos mas fisicamente só medimos diferenças em relação ao vácuo e essas serão finitas.

- A principal consequência desta interpretação é a existência de antipartículas, neste caso o positrão. Consideremos que o vácuo tem uma lacuna ou buraco. Isto quer dizer a *ausência* dum electrão de energia $-E$ e carga $-|e|$. Mas isto pode ser igualmente interpretado como *presença* dum partícula de carga $+|e|$ a energia positiva $+E$, isto é, o positrão. Assim a produção dum par electrão-positrão
- Isto é, um electrão é excitado dum estado de energia negativa deixando atrás de si uma lacuna no mar de Dirac. Como esta lacuna corresponde a um positrão ficou criado um par e^+e^- . Igualmente a aniquilação electrão-positrão pode ser interpretada como um electrão com $E > 0$ que faz uma transição para um estado com $E < 0$ que estava livre (positrão) desaparecendo portanto o electrão e o positrão



- Sumário
- Equação KG
- Equação de Dirac
- Unidades $\hbar = c = 1$
- Partícula livre
- Covariância
- Bilineares
- Mar de Dirac
- Conjugação C

[Sumário](#)

[Equação KG](#)

[Equação de Dirac](#)

[Unidades \$\hbar = c = 1\$](#)

[Partícula livre](#)

[Covariância](#)

[Bilineares](#)

[Mar de Dirac](#)

[Conjugação \$C\$](#)

- ❑ Com a teoria dos buracos abandonamos a interpretação em termos de funções de onda de uma partícula para passar a ser uma explicação em termo de muitas partículas.
- ❑ Só o formalismo da segunda quantificação, com os seus operadores de criação e destruição permitirá fazer uma descrição consistente desta teoria de muitas partículas.
- ❑ Essa explicação, como veremos, também se aplicará aos bósons, o que a este nível não é possível de explicar por não satisfazerem ao princípio de exclusão de Pauli.
- ❑ Contudo a interpretação de Dirac teve um papel determinante no desenvolvimento da teoria e a descoberta experimental das anti-partículas foi um grande sucesso.

Sumário

Equação KG

Equação de Dirac

Unidades $\hbar = c = 1$

Partícula livre

Covariância

Bilineares

Mar de Dirac

Conjugação C

- Interação com campo eletromagnético: Acoplamento mínimo $e < 0$

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$$

- Equação para carga $e < 0$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi(x) = 0$$

- Equação para carga $-e > 0$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m) \psi_c(x) = 0$$

- Deve existir uma operação de simetria tal que

$$\psi_c \equiv C\bar{\psi}^T, \rightarrow C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo da conjugação de carga

$$\psi = N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{imt} \Rightarrow \psi_c = N \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-imt}$$