

# Capítulo 10

## Violação de CP e a Matriz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

### 10.1 A massa dos quarks

No capítulo anterior vimos como obter a massa dos léptons considerando que os neutrinos não têm massa, o que é uma boa aproximação para os processos em que estamos aqui interessados.

Consideremos agora o problema de massa dos quarks. O problema é mais complicado por duas razões. Uma que tem que ver com a impossibilidade de diagonalizar simultaneamente as matrizes de massa e as interações como foi afirmado atrás e será discutido mais à frente. A outra é mais técnica. Para percebermos o problema consideremos os quarks da primeira família

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad ; \quad u_R, d_R. \quad (10.1)$$

Se considerarmos uma interação da forma

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d \bar{Q}_L \phi d_R + \text{h.c.} \quad (10.2)$$

depois da quebra espontânea de simetria

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_d v (\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) + \dots, \quad (10.4)$$

isto é, um termo de massa para o quark  $d$ , mas não para o quark  $u$ . É fácil de ver que para o termos envolvendo  $d_R$  temos

$$Y(\bar{Q}_L \phi d_R) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{2}{3} = 0, \quad (10.5)$$

o que assegura a invariância teste termos para  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ , enquanto que para  $u_R$  temos,

$$Y(\overline{Q}_L \phi u_R) = -\frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = +2, \quad (10.6)$$

mostrando que o termo  $(\overline{Q}_L \phi u_R)$  não é invariante para  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ . Como resolver este problema? Felizmente a solução não é muito difícil. Numa transformação de  $SU_L(2) \times U_Y(1)$  o dubleto transforma-se da forma seguinte

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \phi & SU_L(2) \\ \delta\phi &= i\frac{\varepsilon}{2} \phi & U_Y(1). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Consideremos agora o dubleto  $\tilde{\phi}$  definido por

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi^- \equiv (\phi^+)^*. \quad (10.8)$$

Vejamos agora como se transforma  $\tilde{\phi}$ . Para  $SU_L(2)$

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi^*) = i\tau_2 \left( -i\varepsilon^a \frac{\tau^{a*}}{2} \phi^* \right) \\ &= \varepsilon^a \tau_2 \tau^{a*} \frac{1}{2} \phi^*. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Usando agora a identidade

$$\tau_2 \tau^{a*} \tau_2 = -\tau^a, \quad (10.10)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= -\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tau_2 \phi^* = i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} (i\tau_2 \phi^*) \\ &= i\varepsilon^a \frac{\tau^a}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.11)$$

isto é, transforma-se exatamente como  $\phi$ . Mas numa transformação de  $U_Y(1)$  obtemos

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\phi} &= i\tau_2 (\delta\phi)^* = i\tau_2 \left( +i\frac{\varepsilon}{2} \phi \right)^* \\ &= -i\frac{\varepsilon}{2} (i\tau_2 \phi^*) = -i\frac{\varepsilon}{2} \tilde{\phi}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

o que mostra que  $\tilde{\phi}$  tem hipercarga fraca igual a  $-1$ . Então um termo

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -h_u \overline{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \text{h.c.}$$

$$= -h_u v (\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + \dots, \quad (10.13)$$

é invariante para  $SU_L(2) \times U_Y(1)$ , pois

$$Y(\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R) = -\frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{3} = 0, \quad (10.14)$$

e dá massa ao quark  $u$ . Precisamos portanto de  $\phi$  para dar massa aos quarks com  $T_3 = -1/2$  e de  $\tilde{\phi}$  para dar massa aos quarks com  $T_3 = +1/2$ . Notar que se trata do mesmo dubleto, a construção de  $\tilde{\phi}$  destina-se a obter uma hipercarga oposta à do  $\phi$ . Noutras teorias, como em supersimetria ou nos modelos com dois dubletos de Higgs, este problema é resolvido usando mais do que um dubleto com hipercargas diferentes.

O termo mais geral que dá massa aos quarks é portanto

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_{i,j} h_{dij} \bar{Q}_L(i) \phi d_R(j) - \sum_{i,j} h_{uij} \bar{Q}_L(i) \tilde{\phi} u_R(j), \quad (10.15)$$

numa notação óbvia. Vemos assim que há uma matriz de massa para os quarks de baixo, e outra para os quarks de cima. É possível diagonalizar estas matrizes e passar o efeito para os termos de interação. Os termos de corrente neutra continuarão diagonais, mas nos termos de corrente carregada tal não acontecerá. De facto a corrente neutra liga os quarks de cima com os quarks de cima e os de baixo com os baixo, e portanto teremos sempre termos diagonais se usarmos a unitariedade das matrizes. Isso não acontece para as correntes carregadas pois elas misturam os quarks de cima com os de baixo que são diagonalizados de maneira diferente. O resultado é uma matriz de mistura, que convencionalmente se coloca nos quarks de baixo, a chamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19, 31]. Como há três famílias de quarks trata-se duma matriz  $3 \times 3$  unitária. Para vermos o mecanismo, consideremos primeiro o modelo só com duas famílias de quarks deixando para uma secção seguinte o estudo do caso geral. Então o lagrangeano de massa dos quarks pode ser escrito

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} = & -h_{u1} v \bar{u} u - h_{u2} v \bar{c} c - h_{d1} v \bar{d}_c d_c - h_{d2} v \bar{s}_c s_c \\ & - h_{d12} v (\bar{d}_c s_c + \bar{s}_c d_c), \end{aligned} \quad (10.16)$$

onde se usou a liberdade referida atrás para escrever os quarks  $u$  e  $c$  diretamente na forma diagonal. Olhemos para a matriz dos quarks de baixo. Escrevemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d}_c \quad \bar{s}_c) \begin{pmatrix} h_{d1} v & h_{d12} v \\ h_{d12} v & h_{d2} v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Agora o ângulo de Cabibbo pode ser facilmente compreendido. De facto do ponto de vista das interações fortes, a matriz de massa deve ser diagonal nos quarks  $d$  e  $s$ .

Então se introduzirmos

$$\begin{pmatrix} d_c \\ s_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.18)$$

na Eq. (10.17) obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \ \bar{s}) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.19)$$

onde

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{12} &= \sin \theta_c (h_{d1} \cos \theta_c - h_{d12} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c - h_{d2} \sin \theta_c) \\ m_{21} &= + \cos \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) - \sin \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c) \\ m_{22} &= \sin \theta_c (h_{d12} \cos \theta_c + h_{d1} \sin \theta_c) + \cos \theta_c (h_{d2} \cos \theta_c + h_{d12} \sin \theta_c). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Como queremos que a matriz seja diagonal,

$$\mathcal{L}_{\text{massa}}^{\text{down}} = - (\bar{d} \ \bar{s}) \begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (10.21)$$

devemos impor as condições  $m_{12} = m_{21} = 0$  e  $m_{11} = m_d, m_{22} = m_s$ . A condição  $m_{12} = m_{21} = 0$  tem como solução

$$\tan(2\theta_c) = \frac{2h_{d12}}{h_{d2} - h_{d1}}, \quad (10.22)$$

isto é relaciona os parâmetros do lagrangeano com o ângulo de Cabibbo. É usual em vez de usar os parâmetros  $h_{uij}$  e  $h_{dij}$ , usar os valores experimentais das massas dos quarks e os elementos da matriz de rotação. Esta para o caso de três famílias de quarks é a matriz CKM que vamos escrever com mais detalhe numa secção seguinte.

## 10.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

### 10.2.1 A simetria CP

Como vimos as interações fracas não são invariantes para a transformação de paridade P. Por exemplo no decaimento

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad (10.23)$$

os muões têm sempre a helicidade esquerda. Também não são invariantes para a operação de conjugação de carga (transforma partícula em antipartícula), porque então a reação

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (10.24)$$

viria sempre com muões esquerdos e de facto eles têm helicidade direita. No entanto o produto das duas transformações, CP, parece ser uma boa simetria pois transforma o antimuão esquerdo num muão direito que parece ser o que observamos.

Gell-Mann e Pais mostraram que a invariância de CP tinha implicações estranhas para os kaões neutros. Eles observaram que o  $K^0$  com estranheza +1 pode-se transformar na sua antipartícula  $\bar{K}^0$  com estranheza -1 através dos diagramas de segunda ordem representados na Fig. 10.1.

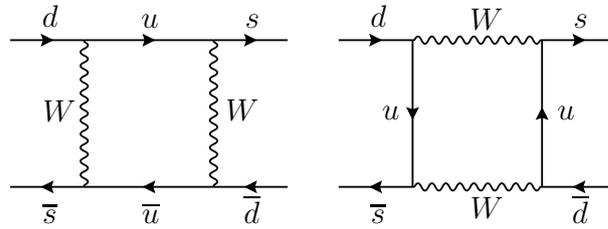


Figura 10.1: Diagramas para a oscilação  $K^0 - \bar{K}^0$ . Há ainda os diagramas com  $u$  trocado com  $c$  e  $t$  através da mistura na matriz CKM.

Como resultado, as partículas que observamos no laboratório não são o  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$  mas alguma linear combinação dos dois. Podemos formar estados próprios de CP da forma seguinte. Como os kaões são pseudo-escalares devemos ter

$$P |K^0\rangle = -|K^0\rangle, \quad P |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle. \quad (10.25)$$

Por outro lado sob a ação da conjugação de carga temos,

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad C |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle, \quad (10.26)$$

e obtemos portanto

$$CP |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad CP |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle. \quad (10.27)$$

Podemos portanto formar estados próprios de CP, corretamente normalizados, através de

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad (10.28)$$

com os valores próprios de CP

$$CP |K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP |K_2\rangle = -|K_2\rangle. \quad (10.29)$$

Se admitirmos que CP é conservado nas interações fracas, então  $K_1$  só pode decair num estado com  $CP = +1$  e  $K_2$  num estado com  $CP = -1$ . Os kaões decaem em dois ou três piões. O estado de dois piões tem  $P = +1$  e  $C = +1$  enquanto o estado fundamental de três piões tem  $P = -1$  mas também  $C = +1$ . Em conclusão, devemos ter

$$K_1 \rightarrow 2\pi, \quad K_2 \rightarrow 3\pi. \quad (10.30)$$

O decaimento em dois piões é mais rápido pois o espaço de fase é maior. Portanto, se começarmos com um feixe de  $K^0$

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle + |K_2\rangle), \quad (10.31)$$

a componente  $K_1$  decairá rapidamente e ficará somente um feixe quase puro de  $K_2$ . Esta previsão foi confirmada experimentalmente, com

$$\tau_1 = 0.895 \times 10^{-10} \text{ s}, \quad \tau_2 = 5.11 \times 10^{-8} \text{ s}. \quad (10.32)$$

Notar que  $K_1$  e  $K_2$  não são antipartículas um do outro mas antes as suas próprias antipartículas com  $C = -1$  para  $K_1$  e  $C = +1$  para  $K_2$ . Têm mesmo uma diferença de massa,

$$m_2 - m_1 = 3.48 \times 10^{-6} \text{ eV}. \quad (10.33)$$

Em resumo, os kaões são produzidos nas interações fortes em estados próprios da estranheza,  $K_0$  e  $\bar{K}^0$  mas decaem através das interações fracas em estado próprios de CP,  $K_1$  e  $K_2$ .

### 10.2.2 Violação de CP no sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Os kaões neutros são um laboratório perfeito para testarmos se as interações fracas são de facto invariantes para o produto CP. Usando um feixe suficientemente longo sabemos que temos só kaões do tipo que têm um tempo de vida longa. Se observarmos que estes decaem em  $2\pi$  sabemos que CP é violada. Esta experiência, descrita na Fig. 10.2, foi feita por Christenson, Cronin, Fitch e Turlay [33], em 1964 e eles descobriram uma fração de 1 em 500 que decaíam em  $2\pi$ . O produto CP não é conservado nas interações fracas e o kaão que tem um tempo de vida longo não é um estado perfeito de CP, deve ter uma pequena mistura de  $K_1$ . Designamos esse estado por  $K_L$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (\epsilon |K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (10.34)$$

De igual modo podemos definir o estado ortogonal que é predominantemente  $K_1$  e decai rapidamente por

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1\rangle + \epsilon |K_2\rangle). \quad (10.35)$$

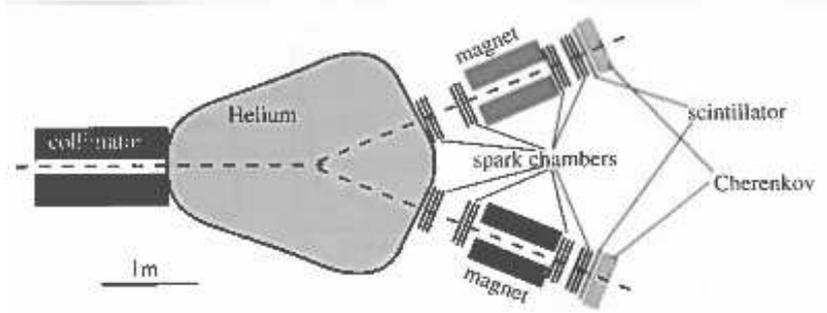


Figura 10.2: Experiência de Cronin e Fitch

O parâmetro  $\epsilon$  mede o desvio do estado  $K_L$  em relação ao estado de CP, isto é, mede a violação de CP no sistema  $K^0 - \bar{K}^0$ . Para a determinação experimental, é usual definir a razão das amplitudes

$$\eta_{+-} \equiv |\eta_{+-}| e^{i\phi^{+-}} \equiv \frac{\mathcal{M}(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{M}(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.36)$$

Obtemos então

$$|\epsilon|^2 \equiv |\eta_{+-}|^2 = \frac{\Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (10.37)$$

O valor experimental atual é  $\epsilon = 2.24 \times 10^{-3}$ .

A experiência de Cronin-Fitch, como veio a ser conhecida depois da atribuição do prémio Nobel a este dois físicos em 1980, destruiu a última esperança para uma simetria exata que envolvesse a Paridade<sup>1</sup>. Mas as coisas ficaram ainda piores quando se olhou para os decaimentos semi-leptónicos do  $K_L$ . De facto, cerca de 41% das vezes o  $K_L$  decai semileptonicamente nos canais,

$$a) K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e; \quad b) K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e. \quad (10.38)$$

Agora notemos que a operação de CP leva o estado final em a) para o estado final em b) e vice-versa. Então se  $K_L$  fosse um estado próprio de CP, os dois decaimentos deviam ocorrer exatamente com as mesmas probabilidades. Experimentalmente verificou-se que isso não acontecia, e que o decaimento do  $K_L$  em positrão (ou leptão carregado positivamente) ocorria mais frequentemente, com uma diferença fracional,  $\delta_L$ , definida por

$$\delta_L = \frac{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) - N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)}{N(K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l) + N(K_L \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l)} \simeq 3.3 \times 10^{-3}, \quad (10.39)$$

onde  $l = e, \mu$ . Há assim uma distinção absoluta entre matéria e anti-matéria. Podemos dizer que o positrão é o leptão que ocorre mais frequentemente no decaimento do  $K_L$ . De facto esta distinção entre matéria e anti-matéria é mais profunda e permite pensar em compreender porque somos feitos de matéria e não de anti-matéria.

<sup>1</sup>Isto não é rigorosamente verdade, pois acredita-se que o teorema TCP seja válido e que o produto das três transformações seja uma invariância da teoria quântica.

### 10.2.3 Violação de CP noutros sistemas

Embora o sistema dos mesões  $K^0$  tenha sido, durante mais de 30 anos, o único sistema a evidenciar a violação de CP, tal não era de esperar do ponto de vista teórico, como será explicado na secção seguinte. No ano 2000 a situação mudou drasticamente pois foi observada pelas colaborações BaBar no SLAC (Stanford, Estados Unidos) e Belle no KEK (Japão), pela primeira vez a violação de CP no sistema dos mesões  $B^0$  ( $d\bar{b}$ ). Essa violação de CP foi observada, medindo a assimetria

$$A = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)}{\Gamma(B^0 \rightarrow J/\psi - K_S) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow J/\psi - K_S)} = 0.679 \pm 0.020 \quad (10.40)$$

que seria zero se CP fosse conservada. O resultado de  $\sim 70\%$  para esta assimetria mostra que a violação de CP é intrinsecamente grande. Perceberemos na secção seguinte por que razão em muitos casos os resultados experimentais são pequenos. Estes resultados são muito importantes pois ajudam a determinar os parâmetros da mistura dos quarks, descritos pela matriz CKM como veremos na secção seguinte. A importância destas medidas justifica que no LHC, presentemente em operação no CERN, haja uma experiência dedicada à física dos mesões  $B$ , a colaboração LHCb, que tem produzido resultados notáveis que ajudam a nossa compreensão da física da mistura dos quarks.

Finalmente, é de esperar também resultados para os mesões  $D^0$  ( $c\bar{u}$ ). Contudo as previsões teóricas do modelo standard são pequenas para este sistema. Os resultados experimentais de LHCb indicam um resultado positivo para a observação de violação de CP nos mesões  $D^0$ , mas de momento só ao nível de  $3\sigma$ , inferior aos  $5\sigma$  necessários para ser considerado uma descoberta. Certamente que este assunto ficará resolvido com mais dados na nova fase do LHC.

## 10.3 Violação de CP e a matriz CKM

### 10.3.1 A matriz CKM

A generalização da matriz de Cabibbo para o caso de três gerações de quarks é a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19, 31] que passamos a explicar. Começemos por recordar as partes do lagrangeano do modelo standard em que aparecem os quarks. Escrevemos

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}}, \quad (10.41)$$

onde os diferentes lagrangeanos, corrente carregada, corrente neutra e de Yukawa, são,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{u}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d'_i \right] W_\mu^+ - \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \bar{d}'_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u'_i \right] W_\mu^- \quad (10.42)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{NC}} = e \left[ \frac{2}{3} \bar{u}'_i \gamma^\mu u'_i - \frac{1}{3} \bar{d}'_i \gamma^\mu d'_i \right] A_\mu - \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{q}'_i \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) q'_i Z_\mu \quad (10.43)$$

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{Yukawa}} = -h_{ij}^d \bar{Q}'_{Li} \Phi d'_{Rj} - h_{ij}^u \bar{Q}'_{Li} \tilde{\Phi} u'_{Rj} + \text{h.c.}, \quad (10.44)$$

onde os índices  $i, j = 1, 2, 3$  são de família (ou geração), isto é, por exemplo,  $d'_i = (d', s', b')$  e  $\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^*$  como anteriormente. A notação  $u'_i, d'_i$  quer dizer que estes estados não são os estados de massas mas aqueles que resultam da escrita das derivadas covariantes. Para simplificar escrevemos ainda  $q'_i = (u'_i, d'_i)$ .

Quando se dá a quebra espontânea de simetria, substituímos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

e obtemos a partir do lagrangeano de Yukawa o lagrangeano de massa para os quarks,

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{massa}} = -\bar{d}'_L M^d d'_R - \bar{u}'_L M^u u'_R + \text{h.c.} \quad (10.46)$$

onde  $M_{ij}^{d,u} = h_{ij}^{d,u} v$  e passámos a usar uma notação matricial no espaço das famílias. Em geral as matrizes  $M^{d,u}$  são matrizes arbitrárias complexas. Não sendo estas matrizes diagonais, os quarks  $u'_i, d'_i$  não são os estados próprios de massa. Para os obter temos de diagonalizar as matrizes de massa, o que é sempre possível. Na verdade uma matriz arbitrária complexa é diagonalizada através de duas matrizes unitárias diferentes à esquerda e direita. Isto quer dizer que devemos ter,

$$U_L^u M^u U_R^{u\dagger} = \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \quad U_L^d M^d U_R^{d\dagger} = \text{diag}(m_d, m_s, m_b). \quad (10.47)$$

Isto é equivalente a rodar os estados de acordo com

$$d_L = U_L^d d'_L, \quad d_R = U_R^d d'_R, \quad u_L = U_L^u d'_L, \quad u_R = U_R^u u'_R. \quad (10.48)$$

Depois de diagonalizar as matrizes de massa, temos de aplicar a rotação inversa nos lagrangeanos de interação, isto é

$$d'_L = U_L^{d\dagger} d_L, \quad d'_R = U_R^{d\dagger} d_R, \quad u'_L = U_L^{u\dagger} u_L, \quad u'_R = U_R^{u\dagger} u_R. \quad (10.49)$$

Olhemos primeiro para a corrente neutra. Um termo genérico é da forma, tomando os quarks down como exemplo,

$$\bar{d}'_L \gamma^\mu d'_L + \bar{d}'_R \gamma^\mu d'_R = \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu d_R, \quad (10.50)$$

onde usámos  $U_L^d U_L^{d\dagger} = U_R^d U_R^{d\dagger} = 1$  devido à unitariedade das matrizes. Para os quarks  $u$  obtemos resultados semelhantes. Assim vemos que para as correntes neutras o resultado final em termos dos estados de massa é o mesmo que na Eq. (10.43), basta fazer  $q' \rightarrow q$ . No entanto para as correntes carregadas tal não vai ser possível pois elas misturam quarks do tipo  $u$  com quarks do tipo  $d$ . Talvez a maneira mais simples de ver isto é pensar no dubleto

$$Q'_L = \begin{bmatrix} u'_L \\ d'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_L^{u\dagger} u_L \\ U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix} = U_L^{u\dagger} \begin{bmatrix} u_L \\ U_L^u U_L^{d\dagger} d_L \end{bmatrix}, \quad (10.51)$$

o que mostra o não alinhamento entre a diagonalização das matrizes de massa e as interações. Para ver a consequência escrevemos os termos relevantes do lagrangeano das correntes carregadas, Eq. (10.42). Obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}}^{\text{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}'_L \gamma^\mu d'_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L \gamma^\mu u'_L W_\mu^-) \quad (10.52)$$

$$= -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{u}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d_L W_\mu^+ + \bar{d}_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}}^\dagger u_L W_\mu^-), \quad (10.53)$$

onde se definiu

$$V_{\text{CKM}} \equiv U_L^u U_L^{d\dagger}. \quad (10.54)$$

Como as matrizes de diagonalização são diferentes, a  $V_{\text{CKM}} \neq 1$ .

### 10.3.2 Contagem de parâmetros na matriz CKM

Como vimos, a matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa [19,31] liga os estados próprios de sabor com os estados próprios de massa. Tradicionalmente esta mistura é descrita nos quarks do tipo *down*, isto é com  $T^3 = -1/2$  e que se costuma escrever na forma,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

Esta matriz é uma matriz  $3 \times 3$  e unitária pela maneira como foi construída. Em geral uma matriz complexa  $N \times N$  terá  $2N^2$  parâmetros reais. Contudo as condições de unitariedade  $VV^\dagger = 1$  impõem  $N^2$  condições reduzindo o número de parâmetros independentes a  $N^2$ . No entanto podemos ainda absorver  $2N - 1$  fases nos campos dos  $2N$  quarks deixando uma fase global arbitrária. Isto reduz o número de parâmetros para

$$N^2 - (2N - 1) = (N - 1)^2. \quad (10.56)$$

Destes,  $N(N - 1)/2$  correspondem a ângulos, (para  $N = 2$  temos só um ângulo o ângulo de Cabibbo) e portanto os outros parâmetros devem ser fases num número dado por

$$\# \text{ fases} = (N - 1)^2 - \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{(N - 1)(N - 2)}{2}. \quad (10.57)$$

Vemos assim que para ter uma fase complexa, necessária para explicar a violação de CP, precisamos de  $N = 3$ . Este argumento foi apresentado antes da descoberta da terceira família. Obtemos portanto para  $N = 3$ , três ângulos e uma fase independentes, e portanto 4 parâmetros físicos.

### 10.3.3 Parametrizações da matriz CKM

Há várias parametrizações da matriz CKM. As duas mais utilizadas são a do PDG e de Wolfenstein. A parametrização do PDG usa rotações em três planos, escrevendo

$$\begin{aligned}
 V_{\text{CKM}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix}, \quad (10.58)
 \end{aligned}$$

onde  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  e  $\delta$  é uma fase responsável pela violação de CP no modelo standard. Como  $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$  é conveniente definir esta hierarquia numa forma explícita, ainda que aproximada. É o que faz a parametrização de Wolfenstein, onde

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (10.59)$$

A correspondência entre as duas parametrizações é

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{i\delta} = A\lambda^3(\rho + i\eta). \quad (10.60)$$

Os valores experimentais atuais são aproximadamente,

$$\lambda \simeq 0.223, \quad A \simeq 0.811, \quad \rho \simeq 0.131, \quad \eta \simeq 0.345 \quad (10.61)$$

$$s_{12} = \lambda \simeq 0.223, \quad s_{23} \simeq 0.041, \quad s_{13} \simeq 0.003, \quad \delta \simeq 1.2079 = 69.2^\circ. \quad (10.62)$$

Notar que os efeitos de CP são pequenos, não por a fase ser pequena, mas por vir multiplicada por  $s_{13}$  que é um número muito pequeno. Uma ideia melhor da hierarquia na matriz CKM, pode ser obtida se considerarmos os módulos dos elementos (tomamos o valor central, sem considerar os erros, ver PDG [32] para resultados mais precisos)

$$V_{\text{CKM}} = \begin{bmatrix} 0.97427 & 0.22534 & 0.00351 \\ 0.22520 & 0.97344 & 0.0412 \\ 0.00867 & 0.0404 & 0.999146 \end{bmatrix}. \quad (10.63)$$

Vemos que os elementos são cada vez mais pequenos à medida que nos afastamos da diagonal e também da esquerda para a direita. Esta observação está na base da parametrização de Wolfenstein.

### 10.3.4 Confrontado a experiência com a matriz CKM

Neste momento todos os resultados experimentais conhecidos podem ser explicados com a matriz CKM, definida na secção anterior. Em particular os processos com violação de CP, tanto no setor dos mesões  $K^0 = (d\bar{s})$  mas também nos mesões  $D^0 = (c\bar{u})$  e  $B^0 = (d\bar{b})$ , são descritos corretamente pela matriz CKM. Neste curso elementar não prosseguiremos com os detalhes desta verificação. Na Fig. 10.3 mostramos o resumo dos resultados recentes nos vários processos. Vemos que há um acordo completo entre todos os dados experimentais e os parâmetros da matriz CKM que são assim obtidos duma maneira consistente. Notar em particular o vértice do triângulo que mostra esse acordo. Nos eixos estão os parâmetros de Wolfenstein  $\rho$  e  $\eta$  modificados ligeiramente. Ver PDG para uma discussão mais detalhada do porquê desta modificação bem como do significado dos ângulos  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ .

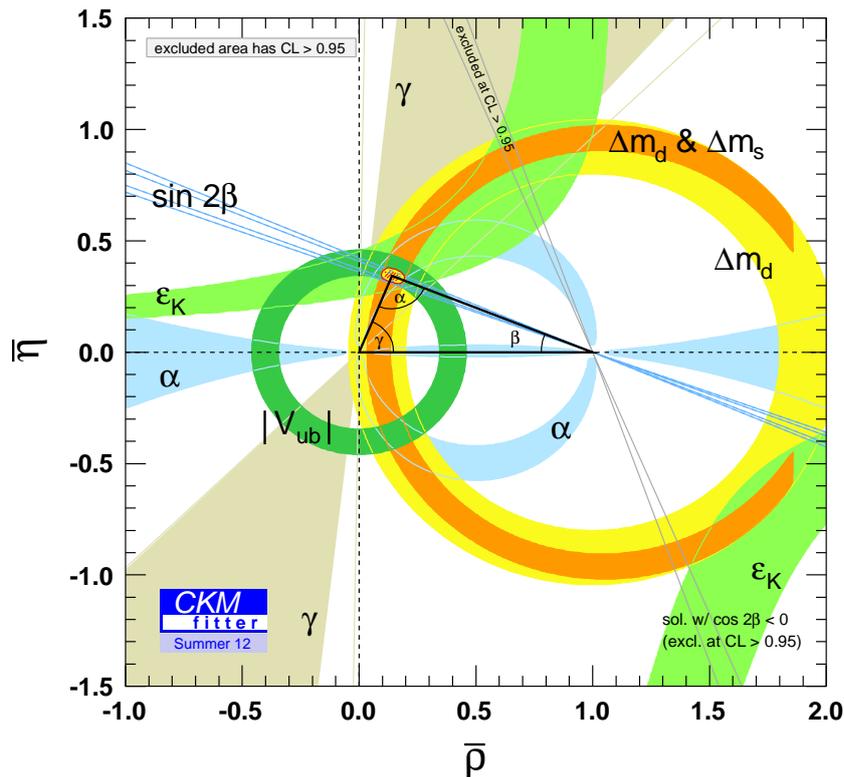


Figura 10.3: Resultados experimentais em confronto com a matriz CKM. Tirado da página da colaboração CKM-fitter.

---

## Problemas capítulo 10

**10.1** Verifique que obtém a Eq. (10.20) e que as condições  $m_{12} = m_{21} = 0$  conduzem à Eq. (10.22).

**10.2** Mostrar que se obtém a matriz da parametrização do PDG, multiplicando as três matrizes na Eq. (10.58).

**10.3** Mostrar que a matriz CKM na representação do PDG, Eq. (10.58), é unitária.

**10.4** Mostrar que a matriz CKM na representação de Wolfenstein Eq. (10.59), é unitária até à ordem indicada.