

# Capítulo 8

## Quebra Espontânea de Simetria: Mecanismo de Higgs

Aqui seguimos as secções 10.7 a 10.9 do Griffiths [1] e o capítulo 3 do meu texto FIE [5].

### 8.1 Introdução

Vamos agora considerar o problema da quebra de simetria. A maior parte das simetrias observadas na Natureza não são exatas. Por exemplo, o *Isospin* não é uma simetria exata da Natureza pois o próton e o neutrão não tem a mesma massa. Uma maneira de estudar em teoria quântica dos campos teorias com quebra de simetria é introduzir no lagrangeano termos com coeficientes *pequenos* que explicitamente realizem a quebra. Nós aqui vamos estar interessados noutro tipo de quebra de simetria, dita espontânea, em que o lagrangeano é simétrico sob a ação dum grupo de transformações mas o estado base (de menor energia) não é.

Para vermos aquilo em que estamos interessados vamos começar pelo exemplo mais simples, uma teoria com um campo escalar complexo com auto-interação e invariante para o grupo U(1). O lagrangeano mais geral invariante de Lorentz e renormalizável<sup>1</sup> é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi)\end{aligned}\tag{8.1}$$

O lagrangeano na Eq. (8.1) descreve um campo escalar complexo ou dois campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. Normalmente, o

---

<sup>1</sup>Em termos muito simples pode dizer-se que uma teoria é renormalizável se nenhum dos termos que constituem o lagrangeano tiver dimensão, em termos de massa, superior a quatro. Para esta contagem uma derivada conta como uma massa, um campo escalar também como uma massa e um campo fermiónico com dimensão de  $\frac{3}{2}$  em termos de massa. Para mais detalhes ver as Refs. [2, 11].

espectro de massa vê-se analisando os termos quadráticos da teoria. Mas isto contém o pressuposto que o estado base (energia mínima) corresponde à configuração em que os campos são nulos. Para campos escalares, pode suceder que o estado de energia mínima corresponda a uma configuração em que

$$\phi = v = \text{constante} \neq 0 \quad (8.2)$$

Neste caso as partículas são associadas com oscilações de  $\phi$  em torno do valor do mínimo,  $v$ . Se escrevermos

$$\phi(x) = v + \chi(x) \quad (8.3)$$

as massas devem ser lidas da parte de lagrangeano quadrático em  $\chi$ . Vejamos para a teoria descrita na Eq. (8.1) quais são os estados de energia mínima. A densidade hamiltoniana é (ver problema 8.1),

$$\mathcal{H} = \dot{\phi}^* \dot{\phi} + (\vec{\partial}\phi^*) \cdot (\vec{\partial}\phi) + V \quad (8.4)$$

Como os dois primeiros termos são definidos positivos e a energia deve ser limitada por baixo, o parâmetro  $\lambda$  na Eq. (8.1) deve ser positivo. O sinal do parâmetro  $\mu^2$  é deixado arbitrário. O mínimo da energia corresponde a um valor constante para  $\phi$  que minimize o potencial  $V$ . Este é dado por

$$V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad (8.5)$$

e as equações de minimização são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi^*} &= \phi(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi} &= \phi^*(\mu^2 + 2\lambda|\phi|^2) = 0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Temos portanto duas possibilidades:

a)  $\mu^2 > 0$

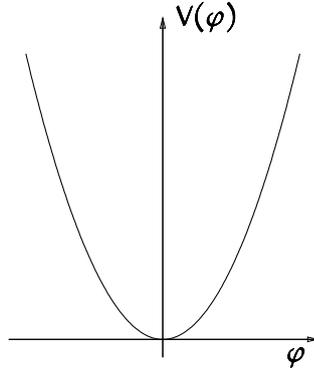
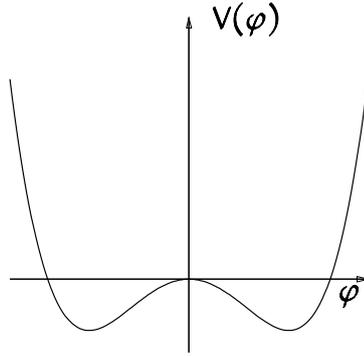
Neste caso o mínimo é para  $\phi = 0$ . Temos a situação descrita na Fig. 8.1. A teoria descreve um isodoubleto escalar complexo de massa  $m = \sqrt{\mu^2}$ .

b)  $\mu^2 < 0$

Neste caso o potencial tem a forma da Fig. 8.2, e o mínimo corresponde ao valor

$$\phi^* \phi = |\phi| = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \quad (8.7)$$

Consideremos o caso b). Uma maneira possível de vermos o espectro de massa da teoria seria introduzir a condição de mínimo na Eq. (8.3) e depois fazer a substituição no lagrangeano da Eq. (8.1). Contudo esta não é a forma mais fácil de proceder

Figura 8.1: Potencial clássico para  $\mu^2 > 0$ .Figura 8.2: Potencial clássico para  $\mu^2 < 0$ .

neste caso. Como a condição do mínimo é que  $|\phi| = v$ , é mais conveniente fazer a seguinte redefinição do campo complexo  $\phi$ :

$$\phi(x) = e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \left( v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.8)$$

com  $\xi$  e  $\sigma$  campos escalares reais. Esta parametrização corresponde a escrever o campo complexo na forma

$$\phi = e^{i \arg(\phi)} |\phi| \quad (8.9)$$

Então

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= \frac{i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \\ \partial^\mu \phi^* &= \frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \end{aligned} \quad (8.10)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \left( \frac{-i}{\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi \phi^* + e^{-\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial_\mu \sigma \right) \left( \frac{i}{\sqrt{2}v} \partial^\mu \xi \phi + e^{\frac{i}{\sqrt{2}v}\xi(x)} \partial^\mu \sigma \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left( v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^2 - \lambda \left( v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right)^4 \\
 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi \left( \sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) \\
 &\quad - \mu^2 \left( v^2 + \sqrt{2}v\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \right) - \lambda \left( v^4 + 2\sqrt{2}v^3\sigma + 3\sqrt{2}v^2\sigma^2 + \sqrt{2}v\sigma^3 + \frac{\sigma^4}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Usando a condição do mínimo podemos escrever, conservando somente até aos termos quadráticos,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{constante} \\
 &\quad + \text{termos de ordem superior}
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

O lagrangeano da Eq. (8.12) descreve portanto dois campos escalares reais,  $\xi$  e  $\sigma$ , um com massa  $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$  e outro com massa zero,  $m_\xi = 0$ . Este facto pode ser interpretado facilmente. Em primeiro lugar, notemos que o potencial  $V$  é no plano complexo do campo  $\phi$  um potencial tipo *fundo de garrafa de champanhe*. Com a parametrização da Eq. (8.8) o campo  $\sigma$  refere-se às oscilações radiais e  $\xi$  às oscilações angulares. Ora enquanto que o potencial tem curvatura na direção radial, na direção angular o potencial é plano. Não custa energia rodar ao longo do *vale* no fundo da garrafa como indicado na Fig. 8.3. Assim as excitações radiais têm massa

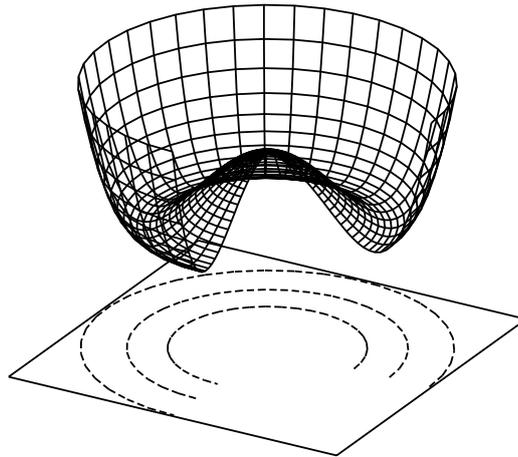


Figura 8.3: Representação do potencial quando  $\mu^2 < 0$ .

e as angulares não. O aparecimento de partículas sem massa é uma característica

geral destes fenómenos de quebra espontânea de simetria e é designado por teorema de Goldstone. Na secção seguinte faremos uma demonstração geral do teorema. Contudo antes de acabarmos esta secção vamos dar outros exemplos simples.

O segundo exemplo que vamos considerar é de facto o mesmo exemplo noutra linguagem. Se escrevermos o campo  $\phi$  em termos das partes real e imaginária

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho + i\pi) \quad (8.13)$$

obtemos para o lagrangeano na Eq. (8.1)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - V(\rho^2 + \pi^2) \quad (8.14)$$

onde

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\rho^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\rho^2 + \pi^2)^2 \quad (8.15)$$

Este lagrangeano continua a ter uma invariância. De facto é invariante para o grupo das rotações no plano,  $O(2)$ . Este grupo tem a mesma álgebra que  $U(1)$ . É o grupo abeliano das rotações em torno dum eixo de simetria. As transformações podem escrever-se

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \pi \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Para analisarmos a quebra de simetria temos de ver onde ocorre o mínimo. As equações são

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 &= \rho [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \\ \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0 &= \pi [\mu^2 + \lambda (\rho^2 + \pi^2)] \end{aligned} \quad (8.17)$$

Novamente podemos ter as duas situações das Figs. 8.1 e 8.2. No caso em que  $\mu^2 < 0$ , o mínimo absoluto ocorre na circunferência

$$\sqrt{\rho^2 + \pi^2} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad (8.18)$$

Para vermos o espectro tomemos os eixos no plano  $\rho - \pi$  de tal forma que

$$\langle \rho \rangle = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = v \quad ; \quad \langle \pi \rangle_0 = 0 \quad (8.19)$$

Então definimos

$$r = \rho - v \quad (8.20)$$

e escrevemos o lagrangeano na Eq. (8.12) em termos de  $r$  e  $\pi$ . Obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu r \partial^\mu r + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \mu^2 r^2 - \lambda v r(r^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (r^2 + \pi^2)^2 \quad (8.21)$$

Obtivemos novamente um campo sem massa,  $\pi$ , enquanto que o campo  $r$  tem massa  $m_r = \sqrt{-2\mu^2}$ . Para vermos que não há perda de generalidade na escolha da Eq. (8.19) ver o problema 8.1.

Finalmente, como último exemplo, consideremos uma teoria novamente com um campo escalar complexo com auto-interação mas em que a interação é invariante para transformações de isospin descrito pelo grupo  $SU(2)$ , e o campo encontra-se na representação dubleto desse grupo. O lagrangeano mais geral, invariante de Lorentz, invariante para o transformações do grupo e renormalizável é então

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ &\equiv \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)\end{aligned}\tag{8.22}$$

onde

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\tag{8.23}$$

O lagrangeano da Eq. (8.22) descreve portanto 4 campos escalares reais. Queremos estudar o espectro de massa da teoria. O estado base vai corresponder ao mínimo do potencial. Estamos interessados na situação em que há quebra espontânea de simetria, isto é o vácuo (estado base) não tem a mesma simetria que o lagrangeano. Isto acontece quando ocorre a situação da Fig. 8.2. Neste caso o potencial é minimizado, para  $\mu^2 < 0$ , quando

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2\tag{8.24}$$

Podemos sempre escolher um referencial de isospin onde o estado de energia mínima se possa escrever

$$\phi_{\min} = \text{constante} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\tag{8.25}$$

O campo  $\phi(x)$  pode portanto escrever-se

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} + \chi(x)\tag{8.26}$$

Para parametrizar convenientemente as pequenas oscilações  $\chi(x)$ , notemos que em cada ponto  $x$  podemos sempre escolher um referencial de isospin onde  $\phi(x)$  tenha a forma

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\tag{8.27}$$

Este referencial será ligado ao referencial definido pela Eq. (8.25) através duma transformação de SU(2), diferente para cada  $x$ ,

$$U(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \quad (8.28)$$

Podemos portanto escrever nesse referencial<sup>2</sup>

$$\phi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

e

$$\chi(x) = e^{i\tau^a \theta^a(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

Para pequenas oscilações temos

$$\chi(x) \simeq \begin{bmatrix} v(\theta^2 + i\theta^1) \\ \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - iv\theta^3 \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

As pequenas oscilações em torno do estado base são parametrizadas por quatro campos escalares reais,  $\theta^a$  e  $\sigma$ . O espectro de massa é lido dos termos quadráticos nesses campos. Substituindo a Eq. (8.29) no lagrangeano da Eq. (8.22) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + v^2 \partial_\mu \theta^a \partial^\mu \theta^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\theta}^a \partial^\mu \hat{\theta}^a + \mu^2 \sigma^2 + \text{constante} \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.32)$$

onde

$$m_\sigma = \sqrt{-2 \mu^2} \quad (8.33)$$

e redefinimos os campos  $\theta^a$  para que o termo cinético tenha a normalização canônica.

$$\hat{\theta}^a \equiv \sqrt{2} v \theta^a \quad (8.34)$$

Temos portanto três partículas de massa zero e uma com massa  $\sqrt{-2 \mu^2}$ . O aparecimento de partículas de massa zero, designadas por *bosões de Nambu-Goldstone*, é uma consequência do teorema de Goldstone que veremos na secção seguinte.

---

<sup>2</sup>Comparar a forma da Eq. (8.29) com a da Eq. (8.8). A explicação da Eq. (8.8) pode ser feita exatamente da mesma forma, só que agora o grupo seria U(1) e não SU(2).

## 8.2 O teorema de Goldstone

Começemos então pelo enunciado do teorema.

**Teorema 8.1** *Seja uma teoria invariante sob a ação dum grupo de transformações  $G$ , com  $n$  geradores. Se houver uma quebra espontânea da simetria, de tal forma que o vácuo (estado base) seja invariante somente sob a ação de  $G'$  com  $m$  geradores ( $G' \subset G$ ), então aparecerão partículas de spin zero sem massa em número igual ao dos geradores de  $G$  que não deixam o vácuo invariante, isto é, há  $n-m$  bósons de Nambu-Goldstone.*

Vemos portanto que o teorema não só nos diz que há partículas sem massa mas também nos diz o seu número. Nos dois primeiros exemplos anteriores tínhamos os grupos  $U(1)$  e  $O(2)$  com 1 gerador, e o vácuo ficou sem simetria alguma e portanto o número de bósons de Nambu-Goldstone era igual ao número de geradores daqueles grupos, isto é um gerador. O terceiro exemplo requer um pouco mais de atenção. Isto porque embora tivéssemos só falado do grupo  $SU(2)$ , de facto a simetria do lagrangeano na Eq. (8.22) é maior do que  $SU(2)$  pois também é invariante para transformações de fase das duas componentes do dubleto ao mesmo tempo, isto é

$$\phi' = e^{i\epsilon} \phi \quad (8.35)$$

Este grupo é o grupo  $U(1)$ , e é claro que as suas transformações comutam com as de  $SU(2)$ . Isto quer dizer que a invariância total do lagrangeano é  $SU(2) \times U(1)$ . O número de geradores é então  $3+1 = 4$ , o que quer dizer, de acordo com o teorema de Goldstone, que o vácuo, Eq. (8.25), ainda deve ser invariante para algum subgrupo abeliano de  $SU(2) \times U(1)$ . Isto é de facto verdade pois a combinação

$$Q = \frac{1 + \tau_3}{2} \quad (8.36)$$

deixa invariante o vácuo 8.25. De facto

$$Q\phi_{min} = \frac{1 + \tau_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \quad (8.37)$$

e portanto

$$e^{i\epsilon Q} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

Este modelo será a base do modelo standard das interações eletrofracas, e o gerador que não é quebrado será interpretado como a *carga elétrica*.

É conveniente, antes de apresentarmos a demonstração geral do teorema, vermos outro caso em que nem toda a simetria é quebrada. Seja uma teoria com um tripleto de campos escalares  $\phi^i$  com  $i = 1, 2, 3$ . Com estes campos podemos construir um

lagrangeano invariante para rotações no espaço de simetria interna, isto é invariante para  $O(3)$ . O lagrangeano é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^i \phi^i - \frac{1}{4} \lambda (\phi^i \phi^i)^2 \quad (8.39)$$

Com a experiência adquirida até aqui é fácil de ver que se  $\mu^2 < 0$  o potencial tem um mínimo se

$$\phi^i \phi^i = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (8.40)$$

Esta condição não define a direção da quebra de simetria. Escolhemos um referencial no qual é a componente 3 que desenvolve um valor de expectação no vácuo (vev). Isto quer que podemos escrever

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

O grupo de simetria original  $O(3)$  tem  $\frac{1}{2} \times 3 \times (3 - 1) = 3$  geradores. O facto novo que aparece neste exemplo é que o vácuo ainda tem um grupo de simetria não trivial. Este é o subgrupo de  $O(3)$  que não mistura a componente 3 com as outras. É claro que é  $O(2)$  com  $\frac{1}{2} \times 2 \times (2 - 1) = 1$  gerador. De acordo com o teorema de Goldstone devemos ter  $3 - 1 = 2$  bósons de Nambu-Goldstone. Vamos ver como isso ocorre. Para isso convém recordar um pouco de teoria de grupos (ver problema 7.3). Sejam  $L_{ij} = -L_{ji}$  os 3 geradores de  $O(3)$  e  $l_{ij}$  os do subgrupo  $O(2)$ , isto é  $l_{ij} = L_{ij}$  para  $i, j \neq 3$  (é de facto só um gerador,  $l_{12}$ ). Sejam  $k_i = L_{i3}$ ,  $i = 1, 2$  os restantes geradores de  $O(3)$ . Em geral podemos escrever

$$(L_{ij})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8.42)$$

e portanto os geradores  $k_i$  são

$$(k_i)_{kl} = (L_{i3})_{kl} = -i (\delta_{ik} \delta_{3l} - \delta_{il} \delta_{3k}) \quad (8.43)$$

Então  $k_i$  atuando no vetor coluna  $v_i = v \delta_{i3}$  dá

$$(k_i v)_j = v (k_i)_{jl} \delta_{l3} = v (k_i)_{j3} = -i v \delta_{ij} \quad (8.44)$$

Então se definirmos  $\sigma$  e  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  por

$$\phi = e^{i \xi_i(x) k_i / v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad (8.45)$$

vemos que a ordem mais baixa é equivalente a subtrair o valor de expectação para definir os novos campos. De facto em ordem mais baixa

$$\begin{aligned}\phi &\simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + i\xi_i(x)k_i/v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \sigma \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (8.46)$$

Em termos destes campos o lagrangeano escreve-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi_i \partial^\mu \xi_i - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \sigma)^4 \\ &+ \text{termos de ordem superior}\end{aligned}\quad (8.47)$$

Observamos novamente que o campo  $\sigma$  tem massa  $-2\mu^2$  e que há dois campos  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , com massa nula. Isto é precisamente o que diz o teorema de Goldstone. Este exemplo generaliza-se facilmente ao caso do grupo  $O(n)$ . Então o número de bosões de Nambu-Goldstone é, para o caso duma quebra de simetria do grupo  $O(n)$  para o seu subgrupo  $O(n-1)$

$$\begin{aligned}\#\text{Bosões de Goldstone} &= \#\text{Geradores de } O(n) - \#\text{Geradores de } O(n-1) \\ &= \frac{1}{2} \times n \times (n-1) - \frac{1}{2} \times (n-1) \times (n-2) \\ &= n-1\end{aligned}\quad (8.48)$$

o que se reduz ao resultado anterior para o caso de  $O(3)$ .

Voltemos então ao teorema de Goldstone [22,23] para efetuar a sua demonstração.

**Dem.**

*Comecemos por escrever o lagrangeano em termos de  $n$  campos escalares reais  $\phi_i$ , que formam um vetor com  $n$  componentes,*

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}\quad (8.49)$$

*Isto é sempre possível, pois uma representação complexa pode sempre ser tornada real à custa de duplicar a dimensão do espaço vetorial. Então o lagrangeano escreve-se*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)\quad (8.50)$$

onde  $V(\phi)$  é um polinómio em  $\phi$  que é invariante sob a ação de algum grupo  $G$ . Este tem  $n$  geradores  $\Omega^a$  e os campos  $\phi$  transformam-se de acordo com

$$\delta\phi = i\epsilon^a\Omega^a\phi \quad (8.51)$$

Como a representação é real então,  $i\Omega^a$  deve ser uma matriz real, e  $\Omega^a$  uma matriz imaginária pura. Como os  $\Omega^a$  são matrizes hermíticas, então também devem ser antissimétricas (comparar com o exemplo de  $O(3)$ ), pois

$$\Omega^a = (\Omega^a)^\dagger = (\Omega^{a*})^T = -\Omega^{aT} \quad (8.52)$$

$V$  é invariante sob a ação de  $G$  e portanto devemos ter

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial\phi_i}\delta\phi_i = i\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\epsilon^a\Omega_{ij}^a\phi_j \quad (8.53)$$

Como os parâmetros  $\epsilon^a$  são arbitrários, obtemos  $n$  equações

$$\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\Omega_{ij}^a\phi_j = 0 \quad ; \quad a = 1, 2, \dots, n \quad (8.54)$$

Diferenciemos agora a equação anterior. Obtemos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}\Omega_{ij}^a\phi_j + \frac{\partial V}{\partial\phi_i}\Omega_{ik}^a = 0 \quad (8.55)$$

Agora calculemos a Eq. (8.55) no valor  $\phi = v$  que minimiza  $V$ , isto é

$$\left.\frac{\partial V}{\partial\phi_i}\right|_{\phi=v} = 0 \quad (8.56)$$

O resultado é então

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_k}\right|_{\phi=v}\Omega_{ij}^a v_j = 0 \quad (8.57)$$

Por outro lado se expandirmos  $V$  em redor do mínimo devemos ter

$$V = \frac{1}{2} M_{ij}^2(\phi - v)_i(\phi - v)_j + \text{termos de ordem superior} \quad (8.58)$$

Daqui se conclui que

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\partial\phi_j}\right|_{\phi=v} = M_{ij}^2 \quad (8.59)$$

onde  $M_{ij}^2$  é a matriz de massa (quadrada). Então

$$M_{ij}^2\Omega_{jk}^a v_k = 0 \quad (8.60)$$

Seja agora  $G'$  o subgrupo de dimensão  $m$  de  $G$  que permanece como uma simetria do vácuo. O que isto quer dizer é que se  $\Omega^a$  for um gerador de  $G'$  então

$$\Omega^a v = 0 \quad (8.61)$$

e a Eq. (8.60) não contém qualquer informação sobre a massa. Pelo contrário, para cada um dos  $(n-m)$  vetores  $\Omega^a v$  que não são zero, então a Eq. (8.60) diz-nos que  $M^2$  tem um valor próprio zero. Se estes vetores  $\Omega^a v$  não nulos formarem a base dum espaço vetorial de dimensão  $(n-m)$ , mostrámos que há  $(n-m)$  bosões de Goldstone na teoria. Demonstremos então este último ponto. Para isso definimos

$$A^{ab} \equiv (\Omega^a v, \Omega^b v) = (v, \Omega^a \Omega^b v) \quad (8.62)$$

onde a última igualdade resulta de  $\Omega^a$  ser hermítico. Então

$$A^{ab} - A^{ba} = (v, [\Omega^a, \Omega^b] v) = i f^{abc} (v, \Omega^c v) = 0 \quad (8.63)$$

e a última igualdade resulta do facto das matrizes  $\Omega^a$  serem antissimétricas. Seja agora  $\tilde{A}$  a matriz  $(n-m) \times (n-m)$  obtida de  $A$  por restrição dos valores de  $a$  e  $b$  para os quais  $\Omega^a v \neq 0$ . Então  $\tilde{A}$  é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada. Seja  $O$  a matriz  $(n-m) \times (n-m)$  que diagonaliza  $\tilde{A}$ , isto é

$$\tilde{A}'^{ab} = (O \tilde{A} O^T)^{ab} = (O^{ac} \Omega^c v, O^{bd} \Omega^d v) \quad (8.64)$$

Mas  $O^{ac} \Omega^c v \neq 0$ , e os elementos diagonais de  $\tilde{A}'$  são todos positivos e o espaço gerado por  $O^{ab} \Omega^b$  e portanto por  $\Omega^b$  tem dimensão  $(n-m)$ . Então os  $\Omega^a$  que não aniquilam o vácuo são independentes, o que completa a demonstração de que  $M^2$  tem  $(n-m)$  valores próprios nulos.

### 8.3 O mecanismo de Higgs

Chegados aqui, podemos perguntar porque é que estivemos a estudar em tanto detalhe teorias com quebra espontânea de simetria, pois á primeira vista o problema de necessitarmos de partículas com massa para descrever as interações fracas não parece ser resolvido com estas teorias, pois a quebra de simetria dá origem a novas partículas sem massa e os bosões de gauge dessas teorias não podem ter termos de massa no lagrangeano, pois não são invariantes de gauge. A razão é que se tivermos uma teoria com invariância de gauge local e o fenómeno de quebra espontânea de simetria, então os bosões de Nambu-Goldstone não aparecem e é possível dar massa aos bosões vetoriais dessa teoria. Este fenómeno é conhecido pelo nome de mecanismo de Higgs, que passamos a explicar.

Não vamos apresentar uma demonstração geral mas sim dar dois exemplos. Vamos começar pelo caso do campo escalar carregado com invariância de gauge local

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (8.65)$$

onde a derivada covariante é

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (8.66)$$

Por construção o lagrangeano é invariante para as transformações de gauge locais

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{i\epsilon(x)} \phi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x) \end{aligned} \quad (8.67)$$

Se  $\mu^2 > 0$ , a Eq. (8.65) é simplesmente o lagrangeano da eletrodinâmica escalar [2]. Se  $\mu^2 < 0$  devemos ter o mecanismo de quebra espontânea de simetria e temos que analisar o espectro com mais cuidado. Em particular temos que encontrar o vácuo da teoria (estado base). Este será dado pelos valores  $\langle \phi \rangle$  e  $\langle A_\mu \rangle$  que minimizem a energia. A invariância de Lorentz do vácuo requer que

$$\langle A_\mu \rangle = 0 \quad (8.68)$$

mas o campo escalar  $\phi$  deverá ter um valor não nulo

$$\langle \phi \rangle = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} > 0 \quad (8.69)$$

Em vez de fazermos a mudança de variável  $\phi(x) \rightarrow v + \chi(x)$ , vamos parametrizar  $\phi$  exponencialmente, isto é

$$\phi(x) = e^{i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \left( v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.70)$$

Como vimos o campo  $\xi(x)$  está associado com a quebra espontânea da simetria. Na ausência do campo de gauge  $A_\mu$ , concluímos que  $\xi$  não tinha massa. Vamos ver agora que isso não é verdade para uma teoria de gauge. Substituindo a Eq. (8.70) na Eq. (8.65), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + e^2 v^2 A_\mu A^\mu \\ & + \sqrt{2} v e A_\mu \partial^\mu \xi + \mu^2 \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \end{aligned} \quad (8.71)$$

Da equação anterior resulta que o campo  $\sigma$  tem massa  $-2\mu^2$ , mas os campos  $A_\mu$  e  $\xi$  estão misturados ao nível dos termos quadráticos. Assim a leitura do espectro não é imediata. A maneira mais fácil de resolver esta situação é aproveitar a invariância de gauge local do lagrangeano da Eq. (8.65). Se escolhermos para parâmetro da transformação de gauge

$$\epsilon(x) = -\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v} \quad (8.72)$$

então

$$\begin{aligned}\phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{\sqrt{2}v}} \phi(x) = v + \frac{\sigma(x)}{\sqrt{2}} \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) + \frac{1}{e\sqrt{2}v} \partial_\mu \xi\end{aligned}\quad (8.73)$$

Como o lagrangeano é invariante para estas transformações devemos ter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi, A_\mu) &= \mathcal{L}(\phi', A'_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu - ieA'_\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \left[ (\partial^\mu + ieA'^\mu) (\sqrt{2}v + \sigma) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mu^2 (\sqrt{2}v + \sigma)^2 - \frac{1}{4} \lambda (\sqrt{2}v + \sigma)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}\end{aligned}\quad (8.74)$$

onde

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \quad (8.75)$$

Agora o novo lagrangeano na Eq. (8.74) pode ser expandido facilmente. Obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \sigma (2\sqrt{2}v + \sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sigma^2 (6\lambda v^2 + \mu^2) - \sqrt{2} \lambda v \sigma^3 - \frac{1}{4} \lambda \sigma^4\end{aligned}\quad (8.76)$$

Nesta gauge não há, para os termos quadráticos, mistura entre os diferentes campos e portanto o espectro pode ser lido diretamente,

$$\begin{aligned}m_\sigma &= \sqrt{6\lambda v^2 + \mu^2} = \sqrt{-2\mu^2} \\ m_A &= \sqrt{2}ev\end{aligned}\quad (8.77)$$

e o campo  $\xi$  desapareceu completamente da teoria. Esta gauge, onde o espectro pode ser lido facilmente, é designada por *gauge unitária*<sup>3</sup>. Para onde foi o campo  $\xi$ ? Para percebermos a resposta, façamos primeiro uma contagem de graus de liberdade. No lagrangeano original, Eq. (8.65), temos dois campos escalares reais e um campo vetorial *sem massa*, portanto outros dois graus de liberdade. No total temos quatro graus de liberdade. No lagrangeano redefinido, Eq. (8.76), temos só um campo escalar real, correspondendo a um grau de liberdade, mas temos um campo vetorial *com massa*, correspondendo a três graus de liberdade. A soma é de novo quatro. Portanto a interpretação é que o grau de liberdade associado ao  $\xi$  corresponde à polarização longitudinal do campo vetorial. Vemos assim, que contrariamente ao que diz o teorema de Goldstone, não só não há bosões de Nambu-Goldstone, mas além disso campos vetoriais podem adquirir massa no processo. Este fenómeno

<sup>3</sup>Pode-se mostrar [24] que a gauge unitária, onde é fácil de ler o espectro, existe sempre.

designa-se por *mecanismo de Higgs*. Com a atribuição do prémio Nobel de 2013 a comunidade passou a chamar *mecanismo de Brout-Englert-Higgs* embora na verdade tenha sido descoberto independentemente por várias pessoas [25–27].

O exemplo anterior é bastante simples e mostra o essencial do mecanismo de Higgs mas é demasiado simples para ser útil na física de partículas. Isto porque o campo  $A_\mu$  não pode ser interpretado como o fóton, pois sabemos que este não tem massa<sup>4</sup>. Para considerarmos um modelo mais realista, (de facto a base do modelo standard das interações eletrofracas), consideremos a teoria de gauge construída sobre o modelo invariante para  $SU(2) \times U(1)$  dada pelo lagrangeano da Eq. (8.22). A versão com invariância de gauge local escreve-se

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (8.78)$$

onde  $V$  é dado por

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (8.79)$$

e onde introduzimos os campos  $W_\mu^a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ) e  $B_\mu$  correspondentes a  $SU(2)$  e a  $U(1)$ , respetivamente. Os tensores do campo são então

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a - g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (8.80)$$

e

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (8.81)$$

A derivada covariante é para este caso

$$D_\mu \phi \equiv \left( \partial_\mu + ig W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig' B_\mu \frac{1}{2} \right) \phi \quad (8.82)$$

onde  $\tau^a$  são as matrizes de Pauli e o fator  $\frac{1}{2}$  no terceiro termo da Eq. (8.82) foi introduzido por conveniência (podemos sempre redefinir a constante  $g'$ ). Note-se que como o grupo é um produto de 2 fatores, há uma constante de acoplamento para cada grupo fator,  $g$  e  $g'$ . O passo seguinte na análise deste modelo é encontrar o estado base ou vácuo. Devido aos requisitos de invariância de Lorentz só o campo escalar pode ter um valor constante diferente de zero e minimizar a energia. Esta será a situação quando  $\mu^2 < 0$ .

Vejamos então qual o espectro de massa neste caso. Escolhemos os eixos de isospin tais que

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (8.83)$$

onde como anteriormente

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (8.84)$$

---

<sup>4</sup>Este exemplo é útil em supercondutividade onde o efeito de Meissner pode ser interpretado como o fóton adquirindo uma massa. Na verdade as ideias que deram origem ao mecanismo vieram da física da matéria condensada.

Com a experiência do exemplo anterior podemos escolher uma gauge, designada por *gauge unitária*, onde

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (8.85)$$

Então substituindo a Eq. (8.85) na Eq. (8.78), e conservando só os termos quadráticos, obtemos para os diferentes termos,

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi^\dagger) (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \left( v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[ \frac{1}{4} g^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \right] \\ &\quad + \left( v^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 + \sqrt{2} v \sigma \right) \left[ \frac{1}{4} (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \right] \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{4} (gv)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ &\quad + \frac{1}{4} v^2 (g W_\mu^3 - g' B_\mu) (g W^{3\mu} - g' B^\mu) \\ &\quad + \text{termos de ordem superior} \\ V(\phi^* \phi) &= \text{constante} + \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 + \text{termos de ordem superior} \\ -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + \text{termos de ordem superior} \\ -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \quad (8.86)$$

Vejamos então o espectro da teoria. Na parte dos campos escalares obtemos, como anteriormente, só um campo escalar real com massa

$$m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2} \quad (8.87)$$

Como a Eq. (8.86) tem produtos cruzados de  $W_\mu^3$  e  $B_\mu$ , para determinar o espectro de massa dos bosões de gauge temos que diagonalizar a matriz de massa

$$M^2 = \frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

Os valores próprios de  $M^2$  são 0 e  $\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)$ . Se designarmos o vetor próprio de massa nula por  $A_\mu$  e outro por  $Z_\mu$ , podemos escrever

$$\begin{cases} A_\mu = \sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \\ Z_\mu = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \end{cases} \quad (8.89)$$

O ângulo  $\theta_W$  é determinado pelo requerimento que  $A_\mu$  seja o vetor próprio de massa nula, isto é

$$\frac{1}{2} v^2 \begin{bmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{bmatrix} = 0 \quad (8.90)$$

donde resulta

$$g^2 \sin \theta_W - gg' \cos \theta_W = 0 \quad (8.91)$$

ou seja

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (8.92)$$

A parte livre (quadrática nos campos) do lagrangeano escreve-se então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{livre}} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \sigma^2 \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^1 \tilde{W}^{1\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^1 W^{1\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{W}_{\mu\nu}^2 \tilde{W}^{2\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} g^2 v^2 \right) W_\mu^2 W^{2\mu} \\ & - \frac{1}{4} \tilde{Z}_{\mu\nu} \tilde{Z}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2) \right] Z_\mu Z^\mu \\ & - \frac{1}{4} \tilde{A}_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.93)$$

onde definimos as partes quadráticas dos tensores dos campos de gauge,

$$\tilde{W}_{\mu\nu}^{1,2} = \partial_\mu W_\nu^{1,2} - \partial_\nu W_\mu^{1,2}, \quad \tilde{Z}_{\mu\nu} = \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu, \quad \tilde{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.94)$$

Vemos portanto que na presença de campos de gauge, o fenómeno da quebra espontânea de simetria não conduz a campos escalares sem massa. O espectro de massa é o seguinte. Um campo escalar,  $\sigma$ , com massa  $m_\sigma = \sqrt{-2\mu^2}$  como antes. Dois campos vetoriais com massa  $M_W = \sqrt{\frac{1}{2} g^2 v^2}$ , um campo vetorial com massa  $M_Z = \sqrt{\frac{1}{2} v^2 (g^2 + g'^2)}$  e um campo vetorial sem massa. Vemos assim, que 3 dos campos de gauge adquiriram massa devido ao fenómeno de quebra espontânea de simetria. Este fenómeno é designado por mecanismo de Higgs. Repare-se que a contagem do número de graus de liberdade está certa, pois um campo vetorial massivo tem 3 polarizações enquanto que se não tiver massa tem só duas. Assim se explica o *desaparecimento* dos três escalares da teoria. Em linguagem pictórica, diz-se que foram *comidos* pelos campos de gauge que então ficaram com massas. Este mecanismo tornou possível aplicar as teorias com invariância de gauge às interações fracas pois passou a ser possível dar massa aos portadores da força fraca. Note-se ainda que um dos campos de gauge não adquiriu massa tornando-se portanto um candidato

para ser o fóton. Isto deve-se ao facto da simetria não ter sido toda quebrada, há ainda uma simetria residual  $U(1)$ , isto é

$$SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1) \tag{8.95}$$

que, como veremos no capítulo dedicado ao modelo standard, corresponderá ao eletromagnetismo. O outro facto fundamental sobre o mecanismo de Higgs, é que uma teoria com invariância de gauge local, com quebra espontânea de simetria é renormalizável, enquanto que uma teoria de campos vetoriais com massa o não é. O modelo que temos vindo a descrever corresponde de facto ao modelo de Glashow-Weinberg-Salam para as interações fracas e eletromagnéticas, que descreveremos em maior detalhe no capítulo 9.

## Problemas capítulo 8

**8.1** Considere o lagrangeano dedinido pela Eq. (8.14) com quebra espontânea de simetria, isto é,  $\mu^2 < 0$ . Então escolha o vácuo

$$\langle \rho \rangle = v \cos \theta \quad ; \quad \langle \pi \rangle = v \sin \theta \quad (8.96)$$

Faça a redefinição

$$\begin{aligned} \rho &= v \cos \theta + \rho' \\ \pi &= v \sin \theta + \pi' \end{aligned} \quad (8.97)$$

e analize o espectro da teoria.

**8.2** Reproduza os passos que levaram à Eq. (8.86).

**8.3** Verifique que obtém os termos quadráticos nos campos indicados na Eq. (8.93).

