Capítulo 7

Invariância de Gauge

Aqui seguimos as secções 10.1 a 10.2 do Griffiths [1] e o capítulo 2 do meu texto FIE [5].

7.1 Lagrangeanos em mecânica clássica

Em mecânica clássica a equação fundamental é a lei de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{7.1}$$

Se um sistema for conservativo então a força pode ser obtida duma função potencial, $U(\vec{r})$, através da relação 5

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{7.2}$$

e portanto as equações do movimento escrevem-se

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}U \ . \tag{7.3}$$

A mesma dinâmica pode ser obtida num formalismo alternativo, designado por formalismo lagrangeano. Aí começa-se por definir o lagrangeano (ou função de Lagrange) através da relação

$$L = T - U \tag{7.4}$$

onde T é a energia cinética,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7.5}$$

e U a energia potencial. As equações da dinâmica resultam de exigir que a ação definida como o integral do lagrangeano,

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt\, L \tag{7.6}$$

seja estacionária ($\delta S = 0$) para a trajetória da partícula. Este requisito conduz às chamadas equações de Euler-Lagrange, que se escrevem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{7.7}$$

para um sistema com n coordenadas $q_i,\ i = 1, 2, \ldots n$ e onde se definiu

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} \ . \tag{7.8}$$

Aplicando a um problema a três dimensões obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m v_i \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\nabla_i U \tag{7.10}$$

e a Eq. (7.7) conduz à mesma Eq. (7.3).

A este nível parece uma complicação desnecessária. No entanto, os lagrangeanos são muito úteis por duas razões. Primeiro porque alguns problemas são mesmo mais fáceis de resolver usando este formalismo (por exemplo pêndulos acoplados), e em segundo lugar porque as simetrias conduzem naturalmente a leis de conservação. De facto já discutimos no capítulo 3 esta relação. Por exemplo, se L não depender das coordenadas, a Eq. (7.7) imediatamente nos diz que o momento linear é conservado.

7.2 Lagrangeanos em teoria de campo

Os lagrangeanos em teoria de campo relativista têm uma importância fundamental. Isto deve-se fundamentalmente à importância que as simetrias têm na descrição das interações fundamentais da Natureza e essa simetrias são implementadas duma maneira muito mais simples nos lagrangeanos. Em mecânica clássica as variáveis dependem do tempo, $x_i(t)$, enquanto que em teoria de campo lidamos com campos que dependem do ponto do espaço tempo $x^\mu = (t, \vec{x})$, por exemplo para um campo escalar, $\phi(x)$.

Não vamos aqui fazer uma dedução da passagem de sistemas com um número finito de graus de liberdade para a situação em teoria do campo onde temos infinitos graus de liberdade. Vamos só dar o resultado sobre a forma de dicionário, conforme indicado na Tabela 7.1. É fácil de verificar que para o campo real de Klein-Gordon a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{7.11}$$

reproduz a equação de Klein-Gordon,

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \ . \tag{7.12}$$

Sistemas Finitos graus liberdade	Teoria do Campo
t	x^μ
q	$\phi(x)$
$\dot{q}$	$\partial_\mu \phi(x)$
$S = \int dt L(q, \dot{q})$	$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$	$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

Tabela 7.1: Dicionário para lagrangeanos em teoria de campo.

Para o campo de Dirac temos que tratar o spinor e o seu adjunto como graus de liberdade independentes (tal como acontece no campo escalar complexo, ver problema 7.4). Assim é fácil de ver que a seguinte densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi$$

conduz à equação de Dirac. De facto As equações de Euler-Lagrange são, para o caso do campo de Dirac,

$$\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \psi\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \overline{\psi}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = 0 \tag{7.13}$$

Do lagrangeano, Eq. (7.13), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^\mu \overline{\psi}\right)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = i\,\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi \tag{7.14}$$

e portanto

$$(i\,\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi = 0, \tag{7.15}$$

como queríamos mostrar. A densidade Lagrangeana de Dirac tem uma propriedade notável. É invariante para as transformações

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\;\psi(x) \qquad ; \qquad \overline{\psi}'(x) = \overline{\psi}\;e^{-i\alpha} \tag{7.16}$$

com α constante. Isto corresponde a redefinir a fase da função de onda, que certamente é arbitrária. Veremos na secção seguinte as implicações que esta observação terá.

Antes de terminar consideremos mais dois exemplos, o caso dum campo de spin 1 com massa e o caso do fotão, spin 1 sem massa.

Exemplo 7.1 *Considere o lagrangeano de Proca para uma partícula de spin 1 com massa,*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \tag{7.17}$$

Onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7.18}$$

Vamos deduzir as equações de Euler-Lagrange. Obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \tag{7.19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu \tag{7.20}$$

e portanto as equações de movimento são

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \tag{7.21}$$

que foi a equação de movimento que usámos no capítulo anterior quando discutimos o bosão vetorial intermédio.

Exemplo 7.2 *Considere o lagrangeano de Maxwell com interação com uma corrente exterior,*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J_\mu A^u \tag{7.22}$$

Obtemos facilmente as equações de Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \; . \tag{7.23}$$

7.3 Invariância de gauge. O eletromagnetismo

Nas transformações consideradas na secção anterior o parâmetro α era constante. A invariância *global* queria então dizer que a escolha das fases era arbitrária e que se escolhêssemos as fases doutra maneira ao mesmo tempo em todos os pontos do espaço-tempo a teoria seria idêntica. Dissemos no capitulo 3 que a existência destas invariâncias implicava que houvesse quantidades conservadas no tempo.

Posta a questão nestes termos, a pergunta que surge naturalmente é saber se há teorias em que a escolha das convenções das fases pode ser feita localmente, isto é, diferente para cada ponto do espaço-tempo. Em princípio, estas teorias se puderem ser formuladas, deverão ser mais relevantes para a Física pois parece-nos lógico que dois experimentadores em laboratórios diferentes possam fazer escolhas diferentes das convenções e obter os mesmos resultados físicos. Queremos portanto teorias em que o lagrangeano seja invariante debaixo de transformações de simetria interna mas que dependem do ponto do espaço tempo.

Estas teorias existem e são as denominadas teorias com *invariância padrão* ou *teorias de gauge* na designação inglesa. Usaremos esta última designação por ser a mais corrente entre os físicos. Pedir que uma teoria possua invariância local é uma condição muito restritiva. De facto se tivermos uma teoria que tenha uma dada invariância global, normalmente não será possível torná-la localmente invariante sem adicionar mais qualquer coisa. Essa qualquer coisa é o conceito de força traduzido em teoria quântica dos campos por um campo que é trocado entre as partículas que interagem. Consideremos como exemplo o caso do campo de Dirac. O lagrangeano é dado na Eq. (7.13),

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{7.24}$$

Esta teoria é invariante quando efetuamos transformações de fase constantes como na Eq. (7.16). Vamos ver o que se passa quando as transformações são locais, isto é, a escolha de fase é independente em cada ponto do espaço-tempo, e para simplificar vamos considerar transformações infinitesimais[1],

$$\delta\psi = i\alpha(x)\psi \qquad ; \qquad \delta\overline{\psi} = -i\alpha(x)\overline{\psi} \tag{7.25}$$

Temos então

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} =& - i\alpha(x)\overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + i\alpha(x)\,\overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu\psi\ \partial_\mu\alpha(x) \\ =& -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\ \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{7.26}$$

Portanto o lagrangeano deixa de ser invariante. É fácil de ver que o problema está ligado ao facto de $\partial_\mu\psi$ não se transformar como ψ. Assim introduzimos o conceito de *derivada covariante* D_μ tal que numa transformação de gauge, Eq. (7.25), se transforme como os campos, isto é

$$\delta(D_\mu\psi) = i\alpha(x)D_\mu\psi \tag{7.27}$$

Definimos a derivada covariante pela relação

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \tag{7.28}$$

e vamos ver que transformações deve ter o campo vetorial A_μ para satisfazer a Eq. (7.30). Obtemos sucessivamente,

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\psi) =& \delta(ieA_\mu)\psi + D_\mu(\delta\psi) \\ =& ie\delta A_\mu\psi + \partial_\mu(i\alpha(x)\psi) + ieA_\mu(i\alpha(x)\psi) \\ =& i\alpha(x)D_\mu\psi + ie\delta A_\mu\psi + i\partial_\mu\alpha(x)\psi \end{aligned} \tag{7.29}$$

Agora comparando a Eq. (7.29) com a Eq. (7.27), obtemos a lei de transformação do campo vetorial A_μ, dada por

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e}\ \partial_\mu\alpha(x) \tag{7.30}$$

[1]Para transformações contínuas (grupos de Lie) o que se passa para transformações infinitesimais também é verdade para transformações finitas. Ver problema 7.1

Esta lei de transformação é exatamente uma transformação de gauge do eletromagnetismo se A_μ for interpretado como o campo do fotão. Assim vemos que o campo vetorial A_μ representa a força de que tínhamos falado anteriormente que assegura que podemos escolher a fase de maneira diferente em diferentes pontos do espaço tempo. A introdução do campo A_μ força a introdução de novos termos no lagrangeano, em particular os termos de energia cinética[2] para esse campo. A única combinação quadrática nas primeiras derivadas do campo A_μ que é invariante para a Eq. (7.30) é o tensor de Maxwell,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{7.31}$$

De facto usando 7.30 em 7.31 obtemos trivialmente

$$\delta F_{\mu\nu} = 0 \tag{7.32}$$

Por outro lado termos de massa da forma $A^\mu A_\mu$ não são invariantes exigindo que o fotão não tenha massa. Portanto o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \tag{7.33}$$

$$\equiv \mathcal{L}_{\text{livre}} + \mathcal{L}_{\text{interacção}} \tag{7.34}$$

onde

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \tag{7.35}$$

e

$$\mathcal{L}_{\text{interacção}} = -e\overline{\psi}\gamma_\mu \psi A^\mu \tag{7.36}$$

é invariante para as transformações de fase locais, Eqs. (7.25) e (7.30). Diz-se que é uma teoria com invariância de gauge. O lagrangeano 7.34 descreve a interação dos eletrões com os fotões. É chamada eletrodinâmica quântica (QED). Para aplicação posterior recordemos aqui os passos que nos levaram até ela.

i) Tínhamos uma teoria que era invariante para transformações globais. Neste caso o grupo de transformações era abeliano, multiplicação por uma fase, $U(1)$.

ii) O requisito que a invariância se mantivesse quando as transformações fossem locais levou-nos à introdução dum novo campo, o fotão A_μ, *com transformações univocamente dadas por essa condição. Fisicamente é o fotão que assegura que as diversas escolhas de fase são consistentes.*

iii) Foi necessário introduzir um novo termo no lagrangeano para nos dar a propagação dos fotões livres. Este termo deve possuir invariância de gauge.

[2] Isto é os termos quadráticos nos campos.

7.4 Teorias de Yang-Mills

Os mesmos passos que nos levaram a QED podem ser dados quando o grupo de transformações das fases é não abeliano. Neste caso dizemos que temos uma teoria não abeliana com invariância de gauge ou teoria de *Yang-Mills* [21], embora este nome se devesse só aplicar ao caso em que o grupo é SU(2). Como alguns conceitos têm que ser generalizados vamos ver os passos em detalhe.

Comecemos pelo lagrangeano para campos fermiónicos generalizando QED. Seja

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi \tag{7.37}$$

onde Ψ é um vetor coluna

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{7.38}$$

num espaço vetorial de dimensão n, onde atua uma representação do grupo não abeliano G

$$\delta\Psi = i\varepsilon^a(x)\Omega^a\Psi\,, \quad a = 1, 2, \ldots m \tag{7.39}$$

Ω^a são m matrizes hermíticas $n \times n$ que obedecem às relações de comutação de G,

$$\left[\Omega^a, \Omega^b\right] = i f^{abc}\Omega^c \tag{7.40}$$

sendo f^{abc} as constantes de estrutura de G. Desta relação resulta que m é a dimensão da representação adjunta de G, pois esse é também o número de geradores do grupo que obedecem a uma relação semelhante à Eq. (7.40).

O lagrangeano 7.37 não é invariante sob a ação das transformações 7.39. Para o tornar invariante introduzimos a derivada covariante, generalizando a Eq. (7.28),

$$\partial_\mu \to D_\mu\Psi = (\partial_\mu + igA_\mu^a\Omega^a)\Psi \tag{7.41}$$

onde A_μ^a são m campos vetoriais, que vão desempenhar um papel análogo ao do fotão no eletromagnetismo, e que são designados por *campos de gauge*. As matrizes Ω^a são as apropriadas para a representação de Ψ de dimensão n. A lei de transformação de A_μ^a é obtida pelo requisito de que $D_\mu\Psi$ se transforme como Ψ. Para a calcular introduzimos a notação compacta

$$\underline{\varepsilon} \equiv \varepsilon^a\Omega^a \tag{7.42}$$

$$\underline{A}_\mu \equiv A_\mu^a\Omega^a \tag{7.43}$$

onde $\underline{\varepsilon}$ e $\underline{A}_\mu$ são matrizes $n \times n$ e funções de $(\vec{x}, t)$. Então 7.39 escreve-se simplesmente

$$\delta\Psi = i\,\underline{\varepsilon}\,\Psi \tag{7.44}$$

Calculemos então a variação de $D_\mu \Psi$. Obtemos

$$\delta(D_\mu \Psi) = \partial_\mu(\delta\Psi) + ig\ (\delta\underline{A}_\mu)\ \Psi \tag{7.45}$$

$$= i\ \underline{\varepsilon}\ \partial_\mu \Psi + i\,(\partial_\mu \underline{\varepsilon}\,\Psi) - g\ \underline{A}_\mu\ \underline{\varepsilon}\ \Psi + ig(\delta\underline{A}_\mu)\ \Psi \tag{7.46}$$

Nós queremos que

$$\delta(D_\mu \Psi) = i\ \underline{\varepsilon}\ D_\mu \Psi \tag{7.47}$$

$$= i\ \underline{\varepsilon}\ \partial_\mu \Psi - g\ \underline{\varepsilon}\ \underline{A}_\mu\ \Psi \tag{7.48}$$

Comparando as Eqs. (7.46) e (7.48) obtemos

$$\delta\underline{A}_\mu = i\left[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu\right] - \frac{1}{g}\partial_\mu\,\underline{\varepsilon} \tag{7.49}$$

que é a transformação dos campos de gauge escrita numa forma matricial. Em termos das componentes A_μ a equação 7.49 escreve-se

$$\delta A^a_\mu = -f^{bca}\ \varepsilon^b\ A^c_\mu - \frac{1}{g}\ \partial_\mu \varepsilon^a \tag{7.50}$$

Notar que no caso do grupo ser abeliano tanto a Eq. (7.49) como a Eq. (7.50) se reduzem à expressão válida numa teoria abeliana como QED, Eq. (7.30) (nesse caso $m = 1$).

A derivada covariante, Eq. (7.41) tem algumas propriedades importantes para o seguimento e que vamos aqui indicar.

i) A derivada covariante pode ser escrita na forma

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + g\ A^a_\mu\ \frac{\delta\Phi}{\delta\varepsilon^a} \tag{7.51}$$

para um campo arbitrário Φ, fermiónico ou bosónico. Esta expressão permite-nos escrever a derivada covariante de qualquer campo, ou funções de campos, desde que se saibamos as suas propriedades de transformação.

ii) A derivada dum produto pode ser facilmente calculada a partir de

$$\delta(\phi\psi) = (\delta\phi)\psi + \phi\delta\psi \tag{7.52}$$

Então a Eq. (7.51) implica

$$D_\mu(\phi\psi) = (D_\mu\phi)\ \psi + \phi\ D_\mu\psi \tag{7.53}$$

iii) O comutador de duas derivadas covariantes pode ser facilmente calculado. De facto não é zero, nem mesmo para um grupo abeliano. Obtemos

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi = (\partial_\mu + ig\ \underline{A}_\mu)(\partial_\nu + ig\ \underline{A}_\nu)\ \Psi - (\mu \leftrightarrow \nu) \tag{7.54}$$

$$= ig\ (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig\ [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu])\ \Psi \tag{7.55}$$

Portanto

$$[D_\mu, D_\nu]\ \Psi = ig\ \underline{F}_{\mu\nu}\Psi \tag{7.56}$$

onde $\underline{F}_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu}\ \Omega^a$ é definido por

$$\underline{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\ \underline{A}_\nu - \partial_\nu\ \underline{A}_\mu + ig\ [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu] \tag{7.57}$$

Vemos assim que $\underline{F}_{\mu\nu}$ é a generalização para o caso não abeliano do tensor de Maxwell. Podemos verificar que se transforma duma forma covariante (não é invariante) para as transformações dos campos de gauge, Eq. (7.49),

$$\begin{aligned}\delta(\underline{F}_{\mu\nu}) =& \partial_\mu \left(i\,[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - \frac{1}{g}\ \partial_\nu \underline{\varepsilon} \right) - \partial_\nu \left(i\,[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu] - \frac{1}{g}\ \partial_\mu \underline{\varepsilon} \right) \\ & - g\,[[\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\mu], \underline{A}_\nu] - i\,[\partial_\mu \underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu] - g\,[\underline{A}_\mu, [\underline{\varepsilon}, \underline{A}_\nu]] - i\,[\underline{A}_\mu, \partial_\nu \underline{\varepsilon}] \\ =& i\,[\underline{\varepsilon}, \underline{F}_{\mu\nu}]\end{aligned} \tag{7.58}$$

Contrariamente ao caso abeliano, $\underline{F}_{\mu\nu}$ não é invariante. De facto transforma-se como um vetor num espaço de dimensão m (a dimensão do grupo), isto é

$$\delta F^a_{\mu\nu} = -f^{bca}\varepsilon^b F^c_{\mu\nu} \tag{7.59}$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g\ f^{bca} A^b_\mu A^c_\nu \tag{7.60}$$

A lei de transformação, Eq. (7.59), permite mostrar que a generalização do lagrangeano de Maxwell

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \tag{7.61}$$

é invariante para as transformações de gauge 7.49. Juntando todas as peças, concluímos que a generalização do lagrangeano 7.37 que possui invariância de gauge local é

$$\mathcal{L} = \overline{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}\ . \tag{7.62}$$

Antes de acabarmos esta secção vamos fazer alguns comentários sobre o que acabámos de ver e as suas aplicações. Primeiro que tudo o lagrangeano na Eq. (7.62) descreve a teoria física para uma das interações fundamentais da Natureza, quando o grupo G é SU(3). É a chamada Cromodinâmica Quântica (QCD) que descreve as interações fortes. Nessa teoria os campos de matéria são os *quarks* que se encontram na representação fundamental do grupo (tripletos de SU(3)) e os campos de gauge são os *gluões* que se encontram na representação adjunta de SU(3) que é aquela que tem a mesma dimensão que o grupo (8 para SU(3)). Outra observação tem que ver com a massa para os campos de gauge. Um termo de massa para os campos de gauge teria a forma

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = \frac{1}{2}\, m^2 A^a_\mu A^{a\mu} \tag{7.63}$$

e é fácil de ver que as transformações na Eq. (7.50) não deixam o lagrangeano na Eq. (7.63) invariante. Assim o fotão e os gluões aparecem naturalmente como partículas sem massa. Contudo para as interações fracas este facto levanta problemas pois nós sabemos que devido ao seu curto alcance, os portadores da força fraca devem ter massa. Este problema que persistiu na física de partículas durante várias décadas só foi resolvido com a quebra espontânea da simetria e o mecanismo de Higgs que veremos no capítulo seguinte. Finalmente um comentário sobre o caso do grupo G não ser *simples*, por exemplo

$$G = \text{SU}(2) \times U(1) \tag{7.64}$$

Neste caso a generalização da Eq. (7.62) obtém-se do modo seguinte. Para os campos de matéria o lagrangeano tem a mesma forma mas a derivada covariante, Eq. (7.41) é agora uma soma sobre todos os campos de gauge com uma constante de acoplamento por cada grupo fator. O lagrangeano para os campos de gauge é simplesmente a soma de lagrangeanos do tipo da Eq. (7.61) para cada grupo fator.

Para dar um exemplo concreto vamos considerar o grupo $G = \text{SU}(2) \times U(1)$ que como veremos mais à frente vai ser precisamente o caso do modelo standard das interações eletrofracas. Neste caso o lagrangeano será,

$$\mathcal{L} = \sum_f \overline{\Psi}_f (i\not{D} - m)\Psi_f - \frac{1}{4} W^a_{\mu\nu} W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \tag{7.65}$$

onde a soma é sobre todos os fermiões da teoria. Os campos de gauge introduzidos são convencionalmente designados por W^a_μ para SU(2) e B_μ para U(1), com os tensores do campo dados por

$$W^a_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu - g\, f^{bca} W^b_\mu W^c_\nu \tag{7.66}$$

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{7.67}$$

A derivada covariante tem agora uma contribuição de cada campo de gauge com uma constante de acoplamento diferente. Assim temos,

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + igW^a_\mu \frac{\sigma^a}{2} + ig' Y B_\mu)\Psi \tag{7.68}$$

onde $\Omega^a = \frac{\sigma^a}{2}$ para SU(2) e Y, designada por hipercarga, uma matriz proporcional à matriz identidade para o grupo U(1). Voltaremos a este assunto no capítulo 9.

7.5 Regras de Feynman para a teoria de gauge

Consideremos uma teoria de gauge simples descrita pelo lagrangeano da Eq. (7.62). Vamos aqui enunciar as regras de Feynman para essa teoria sem demonstração. O objetivo é comparar com QED para ver as semelhanças e diferenças. De facto essas regras só são suficientes para calcular em ordem mais baixa de teoria de perturbações, mas a quantização das teorias de gauge não abelianas está muito para além deste curso elementar (ver o meu texto *Advanced Quantum Field Theory* [11]).

7.5.1 Propagadores

Comecemos pelos propagadores. Aqui não há nada de novo, para além do facto que agora temos m campos de gauge. A estrutura dos termos quadráticos é a mesma que a teoria de Dirac e de Maxwell e portanto obtemos[3],

μ, a  ν, b

$$-i\delta_{ab}\,\frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \tag{7.69}$$

p

$$\frac{i(\not{p}+m_f)}{p^2-m_f^2} \tag{7.70}$$

7.5.2 Vértices

Os vértices vêm dos termos com três ou mais campos no lagrangeano. Da Eq. (7.62) obtemos

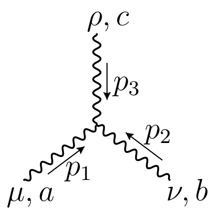
$$\mathcal{L}_{int} = g f^{abc}\partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} - g\overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_j \Omega^a_{ij} A^a_\mu \tag{7.71}$$

o que conduz a interações com três e quatro campos de gauge, que não existiam em QED, para além da generalização da interação entre fermiões e campos de gauge. As regras de Feynman estão descritas nas figuras seguintes.

Notar que para grupos abelianos as constantes de estrutura, $f^{abc} = 0$, e as interações triplas e quárticas desaparecem, mantendo-se somente a interações entre os fermiões e o campo de gauge, como em QED.

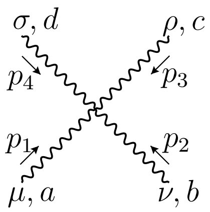
[3]Tecnicamente na gauge de Feynman. Para mais detalhes sobre a escolha de gauges ver a Ref. [11].

Interações triplas de campos de gauge



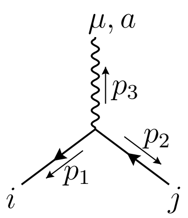
$$-gf^{abc}\left[\; g^{\mu\nu}(p_1-p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2-p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3-p_1)^\nu \right] \tag{7.72}$$

Interações quárticas de campos de gauge



$$\begin{aligned} -ig^2\Big[\; & f_{eab}f_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\ & + f_{eac}f_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) \\ & + f_{ead}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\Big] \end{aligned} \tag{7.73}$$

Interações de fermiões com campos de gauge



$$-i\, g\gamma^\mu \Omega^a_{ij} \tag{7.74}$$

Problemas capítulo 7

7.1 Mostre que o lagrangeano de QED, Eq. (7.34), é invariante para transformações finitas,

$$\psi' = e^{i\alpha(x)}\psi, \quad A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{7.75}$$

7.2 Mostre que o lagrangeano

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{7.76}$$

é invariante para as transformações

$$\delta A^a_\mu = -f^{bca}\ \varepsilon^b\ A^c_\mu - \frac{1}{g}\ \partial_\mu \varepsilon^a \tag{7.77}$$

7.3 Para o grupo das rotações num espaço a n dimensões, $O(n)$, os $\frac{1}{2}\ n(n-1)$ geradores independentes são dados por

$$(L_{ij})_{kl} = -i(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad ; \qquad i,j,k,l = 1,2,\ldots,n \tag{7.78}$$

com $L_{ij} = -L_{ji}$. Considere agora o caso de $O(3)$.
a) Identifique

$$J_1 = L_{23} \quad ; \quad J_2 = L_{31} \quad ; \quad J_3 = L_{12} \tag{7.79}$$

Mostre que os J_i têm as seguintes relações de comutação

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ikm}\ J_m \tag{7.80}$$

b) Um vetor de E_3 transforma-se como

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}\ V \tag{7.81}$$

Para uma transformação infinitesimal encontre a lei de transformação

$$\delta V_i = \cdots \tag{7.82}$$

c) Verifique que esta lei para uma rotação em torno do eixo dos zz dá o resultado conhecido

$$\begin{aligned} \delta V_1 =& \theta V_2 \\ \delta V_2 =& -\theta V_1 \\ \delta V_3 =& 0 \end{aligned} \tag{7.83}$$

d) Mostre que para transformações infinitesimais se tem

$$\delta(V_i V_i) = 0 \tag{7.84}$$

e) Considere agora transformações finitas

$$V' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}\, V \tag{7.85}$$

Mostre que

$$V'^T V' = V^T V \tag{7.86}$$

7.4 Considere o lagrangeano seguinte

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$

a) Verifique que as equações de movimento são as equações de Klein-Gordon.

b) Verifique que o lagrangeano é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha}\, \phi \qquad ; \qquad \alpha = \text{constante}$$

c) Considere a acção definida para campos reais, ϕ_i, $i = 1, 2$. Mostre que se a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i)$$

é invariante para uma transformação

$$\phi_i' = \phi_i - i\varepsilon\lambda_{ij}\, \phi_j$$

onde ε é infinitesimal e λ_{ij} são constantes, então existe uma corrente conservada, isto é

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

onde

$$J^\mu = -i\lambda_{ij}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\,\phi_j$$

Este resultado é conhecido pelo nome de *teorema de Noether* .

d) Aplique este resultado ao lagrangeano dado. Para isso faça

$$\phi_1 = \frac{\phi+\phi^*}{\sqrt{2}}, \quad \phi_2 = -i\frac{\phi-\phi^*}{\sqrt{2}} \tag{7.87}$$

e) Mostre que se $\alpha = \alpha(x)$ o lagrangeano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)^*\,\phi^*\,(\partial_\mu - ieA_\mu)\,\phi - m^2\phi^*\phi$$

é invariante para as transformações

$$\phi' = e^{-ie\alpha(x)}\,\phi$$

se A_μ se transformar de forma apropriada. Qual? Comente.