

Capítulo 5

Teoria Quântica dos Campos e Diagramas de Feynman

Seguimos aqui as secções 7.4 a 7.8 e 8.1 e 8.3 do Griffiths. Algumas destas questões estão mais desenvolvidas em ITC [2].

5.1 O fóton

Em teoria quântica a quantidade fundamental é o potencial vetor. A regra é sempre que os 4-vetores contravariantes, isto é aqueles que se transformam como as coordenadas, têm as dimensões e os nomes da parte espacial. Assim definimos (nesta secção não estamos a fazer $c = 1$)

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \quad (5.1)$$

Podemos facilmente verificar que a condição de gauge de Lorentz [12]

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (5.2)$$

se escreve nesta notação (notar que $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$),

$$\partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (5.3)$$

O outro 4-vetor importante é a corrente J^μ definida por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}) \quad (5.4)$$

satisfazendo a equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 = \partial_\mu J^\mu . \quad (5.5)$$

Os campos eletromagnéticos fazem parte do chamado *tensor de Maxwell* definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.6)$$

que é invariante para transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (5.7)$$

Usando as relações usuais [12] entre os potenciais e os campos \vec{E} e \vec{B} , obtemos numa conveniente representação matricial

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

ou ainda

$$F^{0i} = -\frac{1}{c} E^i, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \quad (5.9)$$

As equações de Maxwell não homogéneas (isto é com cargas e correntes) obtém-se a partir da equação

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (5.10)$$

As equações homogéneas são uma consequência do tensor $F_{\mu\nu}$ ser antisimétrico. De facto, se definirmos o tensor dual (ver Problema 4.2)

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.11)$$

então o facto do tensor de Maxwell ser antisimétrico implica que

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (5.12)$$

e esta equação é equivalente às equações homogéneas, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$. Este resultado é conhecido por identidade de Bianchi.

A equação de Maxwell não homogénea na gauge de Lorentz, Eq. (5.3), escreve-se,

$$\square A^\mu = \mu_0 J^\mu \quad (5.13)$$

Contudo esta escolha não eliminou completamente a ambiguidade dos potenciais. De facto podemos ainda usar uma transformação de gauge em que $\square \Lambda = 0$, sem modificar a Eq. (5.13). Esta dificuldade está na base de muitos problemas em quantizar a teoria de Maxwell, que não vamos detalhar aqui.

No espaço livre a equação é a equação das ondas,

$$\square A^\mu = 0 \quad (5.14)$$

que tem com o solução ondas planas

$$A^\mu(x) = N e^{-\frac{i}{\hbar} p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (5.15)$$

onde N é uma normalização e $\epsilon^\mu(p)$ é o vetor polarização que caracteriza ao spin do fóton. A condição de Lorentz implica que

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0. \quad (5.16)$$

Sabe-se do eletromagnetismo clássico que o fóton tem dois estados de polarização (spin 1 sem massa), mas aqui o vetor polarização tem quatro graus de liberdade (4-vetor). Esta dificuldade está relacionada com a ambiguidade dos potenciais e resolve-se escolhendo uma dada condição de gauge. A condição na Eq. (5.16) já retira um grau de liberdade. Para fixar completamente os graus de liberdade escolhe-se muitas vezes a gauge de Coulomb, que é uma restrição da classe de gauges de Lorentz onde

$$A^0 = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.17)$$

Nesta gauge

$$\epsilon^0 = 0, \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0 \quad (5.18)$$

o que quer dizer que as polarizações são perpendiculares à direção de movimento. Se tomarmos essa direção como o eixo dos zz então os dois vetores independentes são

$$\epsilon(p, 1) = (0, 1, 0, 0), \quad \epsilon(p, 2) = (0, 0, 1, 0) \quad (5.19)$$

Estes vetores obedecem às relações gerais

$$\epsilon_\mu p^\mu = 0, \quad \epsilon_\mu(p, 1)\epsilon^\mu(p, 2) = 0, \quad \epsilon_\mu(p, \lambda)\epsilon^\mu(p, \lambda) = -1 \quad (5.20)$$

5.2 A eletrodinâmica quântica (QED)

A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação de elétrons (e pósitrons) com fótons. No capítulo 7 discutiremos em detalhe a construção do lagrangeano de QED. Aqui vamos somente discutir a forma da interação. Vimos no capítulo 4 que para a equação de Dirac temos uma corrente de probabilidade conservada dada por,

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.21)$$

Se multiplicarmos pela carga do elétron, $q_e = -e$, onde e é a carga do próton, obtemos a corrente eletromagnética

$$J^\mu = -e j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (5.22)$$

Esta é a corrente que aparece na Eq. (5.13). Como é que esta corrente interatua com o fóton? Do eletromagnetismo clássico sabemos que o lagrangeano para uma partícula não relativista com carga q em interação com o campo eletromagnético é

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi + q\vec{A} \cdot \vec{v} \quad (5.23)$$

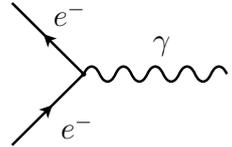
o que com a identificação (ver capítulo 7)

$$L \equiv \int d^3x \mathcal{L} \quad (5.24)$$

dá

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -J^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -eQ_e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (5.25)$$

onde definimos $Q_e = -1$. Na linguagem dos diagramas de Feynman descrevemos a interação da forma seguinte



$$-ieQ_e\gamma^\mu \quad (5.26)$$

Vemos assim que a regra de Feynman corresponde a *tirar* os campos do lagrangeano de interação e multiplicar o resultado por i .

5.3 Regras de Feynman para QED

Vamos agora indicar o conjunto completo de regras de Feynman para QED. Elas seguem o que vimos para o modelo ABC com as modificações necessárias devido a termos spinores e antipartículas.

1. Para num dado processo desenhar todos os diagramas topologicamente distintos.
2. Para cada eletrão que entra no diagrama um fator $u(p, s)$. Se sai do diagrama um fator $\bar{u}(p, s)$.
3. Para cada positrão deixando o diagrama um fator $v(p, s)$. Entrando o diagrama um fator $\bar{v}(p, s)$.
4. Para cada fóton no estado inicial o vetor polarização $\varepsilon_\mu(k)$ e no estado final $\varepsilon_\mu^*(k)$.
5. Por cada linha fermiônica interna o propagador

$$\beta \xrightarrow[p]{} \alpha \quad S_{F\alpha\beta}(p) = i \frac{(\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.27)$$

6. Por cada linha interna do fóton o propagador (na gauge de Feynman)

$$\mu \text{ ~~~~~ } \underset{k}{\text{~~~~~}} \text{ ~~~~~ } \nu \quad D_{F\mu\nu}(k) = -i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad (5.28)$$

7. Por cada vértice o fator

$$\begin{array}{c} \nearrow e^- \\ \searrow e^- \end{array} \text{ ~~~~~ } \underset{\gamma}{\text{~~~~~}} \quad (-ieQ_e\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \quad (5.29)$$

onde passamos a usar a notação, mais convencional, de introduzir o sinal da carga explicitamente. Portanto, a partir daqui, $e = |e|$, é a carga do positrão ou do próton e claro que para o eletrão $Q_e = -1$.

8. Por cada momento interno não fixado por conservação de energia-momento (*loops*) um fator

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \quad (5.30)$$

9. Por cada loop de fermiões um sinal (-1) .
10. Um fator -1 entre diagramas que diferem por permutações ímpares de linhas fermiônicas (estatística de Fermi dos fermiões).
11. O resultado da aplicação das regras anteriores dá $-i\mathcal{M}$, por isso para obter \mathcal{M} multiplique o resultado final por i .

Comentários

1. As regras 9) e 10) são um pouco difíceis de explicar sem operadores e teorema de Wick. A este nível aparecem mais como uma receita.
2. Para escrever corretamente as linhas fermiônicas devemos notar que elas no final devem dar um número, isto é uma matriz 1×1 no espaço de Dirac. Para obter isso deve-se usar a regra empírica que se começa a escrever cada linha do diagrama pela ponta da seta.
3. Os denominadores dos propagadores têm a mesma forma do que no caso da teoria escalar ABC . Os numeradores diferem para eletrões e fótons (gauge de Feynman) da maneira indicada.

5.4 Exemplos

Se nos ficarmos por duas partículas no estado final, o número de processos em causa é muito reduzido. Na tabela 5.1 está feito um resumo.

Processo	Observação
$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$	Efeito Compton
$\mu^- + e^- \rightarrow \mu^- + e^-$	Em QED
$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$	Difusão Bhabha
$e^- + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow e^- + \text{Núcleo}(Z) + \gamma$	Bremsstrahlung
$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$	Aniquilação de pares
$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$	Difusão Möller
$\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$	Criação de pares
$\gamma + \text{Núcleo}(Z) \rightarrow \text{Núcleo}(Z) + e^- + e^+$	Criação de pares

Tabela 5.1: Processos simples em QED.

Vamos analisar os três primeiros casos.

5.4.1 Colisão elástica eletrão-muão

Consideremos primeiro a colisão elástica eletrão-muão. Embora este processo não seja em QED no sentido restrito, o muão é em tudo, exceto na massa, igual ao eletrão e tem a vantagem de haver só um diagrama que se mostra na Fig. 5.1. Com

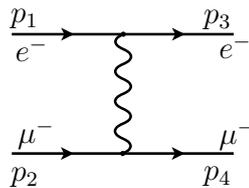


Figura 5.1: Difusão $e^- e^- \rightarrow \mu^- \mu^+$ em QED.

a cinemática da figura obtemos para a amplitude,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \bar{u}(p_3)(ie\gamma^\mu)u(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4)(ie\gamma^\nu)u(p_2) \\
 &= - \frac{e^2}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_4)\gamma_\mu u(p_2)
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Para prosseguir e calcular a secção eficaz, Eq. (2.31), temos de calcular $|\mathcal{M}|^2$. Antes de fazer isso vamos ver mais dois processos e voltaremos então ao cálculo das secções eficazes.

5.4.2 Colisão elástica eletrão-positrão

Neste processo, conhecido por difusão Bhabha, temos dois diagramas conforme indicado na Fig. 5.2. Temos ainda uma situação em que existe um sinal menos entre

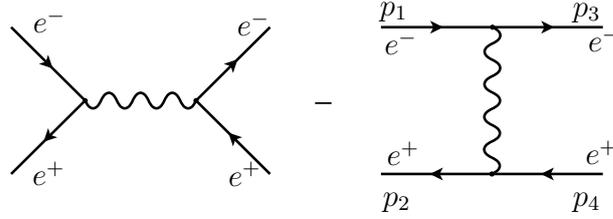


Figura 5.2: Difusão Bhabha $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$.

os dois diagramas, uma consequência da regra 10. A amplitude escreve-se

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.32)$$

onde

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{e^2}{s} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4), \quad \mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{t} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{v}(p_2) \gamma_\mu v(p_4) \quad (5.33)$$

onde as variáveis de Mandelstam s, t são

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2. \quad (5.34)$$

5.4.3 Efeito de Compton

Consideremos finalmente o efeito de Compton. Com a cinemática indicada na Fig. 5.3, obtemos para a amplitude

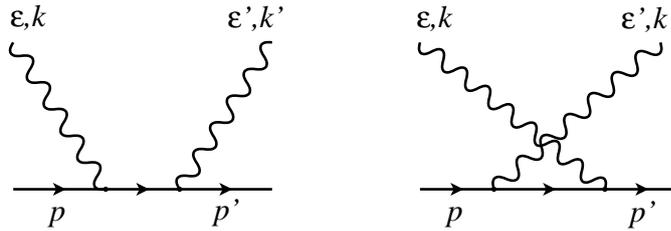


Figura 5.3: Diagramas para o efeito de Compton, $e^- + \gamma \rightarrow e^- + \gamma$.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \quad (5.35)$$

com

$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{(p+k)^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_\mu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k') \quad (5.36)$$

$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{(p-k')^2 - m^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu (\not{p} - \not{k}' + m) \gamma_\nu u(p) \varepsilon^\mu(k) \varepsilon'^{\nu*}(k'). \quad (5.37)$$

5.5 O truque de Casimir

Na secção anterior calculámos as amplitudes para três processos em QED. É claro que para quaisquer dos processos na Tabela 5.1 se pode prosseguir de maneira semelhante pelo que não continuaremos por aí. Vamos antes usar as amplitudes para calcular as secções eficazes. Tomemos a difusão Bhabha pois normalmente é calculada no referencial do CM (para anéis de colisão e^-e^+) e nós já deduzimos a fórmula para a secção eficaz diferencial para esse caso, Eq. (2.31),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.38)$$

onde já estamos a usar o sistema de unidades em que $\hbar = c = 1$.

Em geral a amplitude depende dos spins do estado inicial e do estado final $\mathcal{M}(s_i, s_f)$. Na maior parte das experiências nós não escolhemos o spin dos estados iniciais nem medimos os spins do estado final. Devemos por isso, para comparar com os resultados experimentais, somar sobre todos os spins do estado final e tirar a média sobre as combinações de spin possíveis para o estado inicial, isto é, devemos calcular,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{n_{s_i}} \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\mathcal{M}|^2 \quad (5.39)$$

onde o n_{s_i} é o número de polarizações de spin do estado inicial (1/4 para a difusão de Bhabha). Para evitar para já a complicação de antipartículas, consideremos a amplitude do processo electrão-muão, na Eq. (5.31). Obtemos numa notação óbvia

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)]^* \quad (5.40)$$

Vemos portanto que vamos ter de lidar com expressões do tipo

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* \quad (5.41)$$

Mas calculando o complexo conjugado da matriz 1×1 devemos usar o conjugado hermítico. Assim

$$\begin{aligned} [\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= u(b)^\dagger \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) = \bar{u}(b)\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0 u(a) \\ &\equiv \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde usámos o facto de que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e definimos

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 \quad (5.43)$$

Obtemos portanto

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)] \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)\Gamma_1 \left[\sum_{s_b} u(b)\bar{u}(b) \right] \bar{\Gamma}_2 u(a)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_a} \bar{u}(a) \Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2 u(a) = \sum_{s_a} \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} u(a)_\beta \\
&= \sum_{s_a} u(a)_\beta \bar{u}(a)_\alpha [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} = (\not{p}_a + m_a)_{\beta\alpha} [\Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2]_{\alpha\beta} \\
&= \text{Tr} [(\not{p}_a + m_a) \Gamma_1(\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2] \tag{5.44}
\end{aligned}$$

onde usámos a relação

$$\sum_s u(a)_\alpha \bar{u}(a)_\beta = (\not{p}_a + m_a)_{\alpha\beta} \tag{5.45}$$

Comentários e generalizações

1. Este método foi utilizado pela primeira vez por Casimir e veio a ser conhecido por truque de Casimir.
2. A matriz Γ é sempre um produto de matrizes γ . Assim para calcular $\bar{\Gamma}$, é conveniente usar o resultado

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0 \tag{5.46}$$

que pode ser verificada diretamente a partir da definição. Em particular obtemos o resultado importante $\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu$.

3. Para spinores v (para as antipartículas) devemos usar

$$\sum_s v(a)_\alpha \bar{v}(a)_\beta = (\not{p}_a - m_a)_{\alpha\beta} \tag{5.47}$$

em particular

$$G = \sum_{s_a} \sum_{s_b} [\bar{v}(a) \Gamma_1 v(b)] \bar{v}(b) \bar{\Gamma}_2 v(a) = \text{Tr} [(\not{p}_a - m_a) \Gamma_1 (\not{p}_b - m_b) \bar{\Gamma}_2] \tag{5.48}$$

5.5.1 Teoremas de traços de matrizes γ

Para usar o truque de Casimir temos de saber calcular traços de matrizes γ . Vamos aqui dar os resultados sob a forma de Teoremas, deixando a maior parte da demonstração para os exercícios.

Teorema 5.1 *O traço dum número ímpar de matrizes γ é zero.*

Dem:

$$\text{Tr} [\not{a}_1 \not{a}_2 \cdots \not{a}_n] = \text{Tr} [\not{a}_1 \cdots \not{a}_n \gamma_5 \gamma_5]$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{Tr} [\gamma_5 \phi_1 \cdots \phi_n \gamma_5] \\
 &= (-1)^n \text{Tr} [\phi_1 \cdots \phi_n]
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Então para n ímpar o traço é nulo.

Teorema 5.2 *Os traços de 0 e 2 matrizes γ são*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} 1 &= 4 \\
 \text{Tr} [a\cancel{b}] &= \text{Tr} [(\cancel{b}a)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [(a\cancel{b} + \cancel{b}a)] = a \cdot b \text{Tr} 1 \\
 &= 4a \cdot b
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Teorema 5.3 *O traço de n matrizes γ obtém-se por recorrência a partir de traços de $n - 2$ matrizes γ .*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\phi_1 \cdots \phi_n] &= a_1 \cdot a_2 \text{Tr} [\phi_3 \cdots \phi_n] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} [\phi_2 \phi_4 \cdots \phi_n] \\
 &\quad + \cdots + a_1 \cdot a_n \text{Tr} [\phi_2 \cdots \phi_{n-1}]
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

Este teorema tem um corolário importante,

Corolário: *Para 4 matrizes γ temos:*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] &= a_1 \cdot a_2 \text{Tr} [\phi_3 \phi_4] - a_1 \cdot a_3 \text{Tr} [\phi_2 \phi_4] + a_1 \cdot a_4 \text{Tr} [\phi_2 \phi_3] \\
 &= 4 [a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot a_4 - a_1 \cdot a_3 a_2 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4 a_2 \cdot a_3]
 \end{aligned} \tag{5.52}$$

Teorema 5.4 *Os traços com a matriz γ_5 obtém-se a partir dos seguintes resultados*

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [\gamma_5] &= 0 \\
 \text{Tr} [\gamma_5 \cancel{a}\cancel{b}] &= 0 \\
 \text{Tr} [\gamma_5 \cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}\cancel{d}] &= -4i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

O teorema seguinte não é sobre traços mas é importante pois permite reduzir o número de matrizes γ em alguns traços:

Teorema 5.5

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \\
\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c} \not{b} \not{a} \\
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu &= 2 [\not{d} \not{a} \not{b} \not{c} + \not{c} \not{b} \not{a} \not{d}]
\end{aligned} \tag{5.54}$$

e finalmente um último resultado muito útil,

Teorema 5.6

$$\text{Tr} [\not{a}_1 \cdots \not{a}_{2n}] = \text{Tr} [\not{a}_{2n} \cdots \not{a}_1] \tag{5.55}$$

5.5.2 Difusão Bhabha

Estamos agora em posição de calcular a secção eficaz no referencial do CM. Para simplificar vamos considerar que $\sqrt{s} \gg m_e$ e vamos desprezar as massas do electrão e positrão. Um cálculo simples dá então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle &= \frac{e^4}{4} \left\{ \frac{1}{t^2} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{s^2} \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] - \frac{2}{st} \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] \right\} \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Usando os teoremas sobre os traços podemos obter

$$\begin{aligned}
\text{Tr} [\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= 8 \frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} \\
\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu] \text{Tr} [\not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= 8 \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} \\
\text{Tr} [\not{p}_3 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma_\nu] &= -8 \frac{(s+t)^2}{st}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

e portanto

$$\frac{1}{4} \langle |\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2|^2 \rangle = 2e^4 \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right] \tag{5.58}$$

para a secção eficaz obtemos finalmente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{t^2 + (s+t)^2}{s^2} + \frac{s^2 + (s+t)^2}{t^2} + 2 \frac{(s+t)^2}{st} \right]. \tag{5.59}$$

onde se usou a Eq. (5.38) com $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_3|$ e fizemos ($\hbar = c = 1$)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{5.60}$$

5.5.3 Efeito de Compton

Vamos agora considerar o efeito de Compton. Na experiência usual o eletrão é considerado em repouso, pelo que se trata duma colisão no referencial do laboratório. Vamos considerar a cinemática da Fig. 5.3. Não vamos deduzir a expressão para a secção eficaz diferencial desde o início pois já o fizemos para um caso parecido no problema 2.4, Eq. (2.48). Adaptando essa equação à nossa cinemática,

$$\begin{aligned} p_1 = k &= (k, 0, 0, k), \quad p_3 = k' = (k', k' \sin \theta, 0, k' \cos \theta) \\ p_2 = p &= (m_e, 0, 0, 0), \quad p_4 = p' = p + k - k' \end{aligned} \quad (5.61)$$

escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 m_e} \frac{k'^2}{k} \frac{\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle}{|(k + m_e)k' - k k' \cos \theta|} \\ &= \frac{1}{64\pi^2 m_e^2} \frac{k'^2}{k^2} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \end{aligned} \quad (5.62)$$

onde no último passo se usou a cinemática do efeito de Compton,

$$k' = \frac{k}{1 + \frac{k}{m_e}(1 - \cos \theta)}. \quad (5.63)$$

Para prosseguir com a nossa soma sobre as polarizações do estado final e média sobre as polarizações do estado inicial, temos de explicar o que se passa com o fóton. O resultado geral é (ver Problema 5.8),

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \text{termos proporcionais a } p_{\mu} \text{ ou } p_{\nu} \quad (5.64)$$

Como a invariância de gauge do eletromagnetismo assegura que os termos proporcionais a p_{μ} ou p_{ν} não contribuem (ver Problema 5.9), podemos simplesmente usar,

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} \quad (5.65)$$

O cálculo agora resume-se ao cálculo dos traços. É algo laborioso mas o resultado final é simples. Obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}_1|^2 \rangle &= \frac{1}{4} \text{Tr} [(\not{p}' + m) \gamma_{\nu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma_{\mu} (\not{p} + m) \gamma^{\mu} (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^{\nu}] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \\ &= 8 [2 m^4 + m^2 (-p \cdot p' - p' \cdot k + 2p \cdot k) + (p \cdot k)(p' \cdot k)] \frac{e^4}{(2p \cdot k)^2} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Igualmente

$$\langle |\mathcal{M}_2|^2 \rangle = 8 [2m^4 + m^2(-p \cdot p' + p' \cdot k' - 2p \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k')] \frac{e^4}{(2p \cdot k')^2} \quad (5.67)$$

e finalmente para os termos cruzados

$$\begin{aligned} \langle [M_1 M_2^\dagger + M_1^\dagger M_2] \rangle &= \frac{8e^4}{4(k \cdot p)(k' \cdot p)} [2(k \cdot p)(p \cdot p') - 2(k \cdot k')(p \cdot p') \\ &- 2(p \cdot p')(p \cdot k') + m^2(-2k \cdot p - k \cdot p' + k \cdot k' - p \cdot p' + 2p \cdot k' + p' \cdot k') - m^4] \quad (5.68) \end{aligned}$$

Pondo tudo junto, e usando a nossa cinemática, obtemos a fórmula de Klein-Nishima,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 \left[\left(\frac{k'}{k} \right) + \left(\frac{k}{k'} \right) - \sin^2 \theta \right]. \quad (5.69)$$

5.6 Produção de hádrões em colisões $e^- + e^+$

5.6.1 Hadronização

Na colisão $e^- + e^+$ podemos produzir um grande número de estados finais: $e^- + e^+$ (Bhabha), $\mu^- + \mu^+$, $\gamma + \gamma$ e em geral qualquer par de fermiões $f\bar{f}$. Podemos portanto ter também a produção de pares quark-antiquark, $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$. Se as energias foram baixas isso ocorre através do diagrama de QED indicado na Fig 5.4. Como os quarks não são estados livres (confinamento), quando estão a distâncias

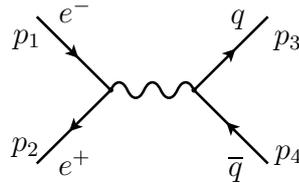


Figura 5.4: Difusão $e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q}$.

da ordem da dimensão dos hádrões ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) a interação forte vai produzir muitos novos pares $q\bar{q}$ e glúões que finalmente se combinam para produzir os hádrões que são medidos no detetor. Este processo chama-se hadronização e está representado na Fig. 5.5. Quando estes acontecimentos são observados nos detetores eles mantêm a memória do acontecimento original e aparecem como dois jatos de partículas que aparecem em sentidos opostos (*back-to-back*) e apontando para as direções dos quarks iniciais que lhes deram origem, como representado no lado esquerdo da Fig. 5.6. Por vezes parecem acontecimentos com três jatos que podem ser interpretados como resultado da hadronização do glúão, um processo de ordem mais elevada, desde que esse glúão leve uma percentagem significativa da energia,

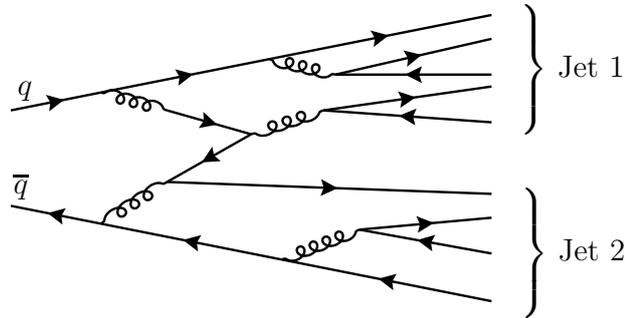


Figura 5.5: Processo de Hadronização

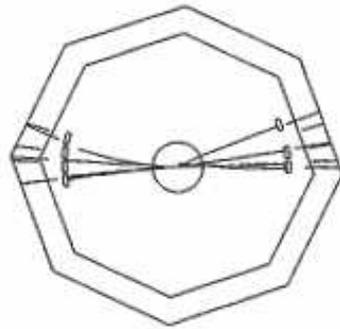


Fig. 8.2 A typical two-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

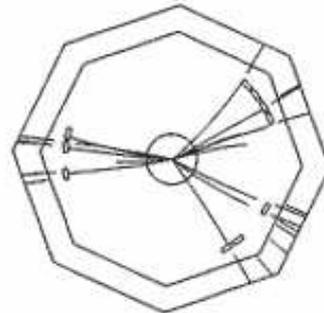


Fig. 8.3 A three-jet event. (Source: J. Dorfan, SLAC.)

Figura 5.6: Acontecimentos com dois e três jets.

como representado na Fig. 5.7. De facto a observação deste acontecimentos são uma prova experimental da existência dos glúões, os portadores da força forte na chamada Cromodinâmica Quântica (QCD).

5.6.2 Processo elementar

Apesar de todas as complicações anteriores o processo elementar que está na base de todas estas considerações é um processo simples em QED (desde que as energias sejam tais que $\sqrt{s} \ll M_Z$),

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \tag{5.70}$$

que corresponde ao diagrama da Fig. 5.4. A amplitude é então

$$\mathcal{M} = \frac{Q_q e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma^\mu v(p_4)] \tag{5.71}$$

onde Q_q é a carga do quark em unidades de e , isto é, $Q_u = 2/3$, $Q_d = -1/3$. Usando o truque de Casimir obtemos para a amplitude não polarizada, isto é, somando todos

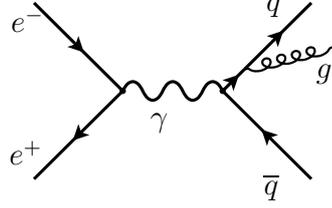


Figura 5.7: Processo elementar com emissão dum glúon

os spins finais e fazendo a média sobre os spins iniciais,

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{4} \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} \text{Tr}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_q)\gamma_\mu(\not{p}_4 - m_q)\gamma_\nu] \quad (5.72)$$

onde $s = (p_1 + p_2)^2$. Usando os teoremas dos traços podemos obter,

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 8 \frac{Q_q^2 e^4}{s^2} [(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\ &\quad + m_e^2(p_3 \cdot p_4) + m_q^2(p_1 \cdot p_2) + 2m_e^2 m_q^2] \\ &= Q_q^2 e^4 \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

onde usámos a cinemática para obter

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta_e), \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -\beta_e) \\ p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta_q \sin \theta, 0, \beta_q \cos \theta), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta_q \sin \theta, 0, -\beta_q \cos \theta) \\ \beta_e &= \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{s}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{s}} \end{aligned} \quad (5.74)$$

onde β_e, β_q são as velocidades do eletrão e do quark no referencial do CM, respetivamente. Usando a Eq. (2.31) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_q}{\beta_e} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \\ &= \frac{Q_q^2 e^4}{64\pi^2 s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{4m_e^2}{s} + \frac{4m_q^2}{s} + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_q^2}{s}\right) \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \quad (5.75)$$

A secção eficaz obtém-se fazendo a integração final nas variáveis angulares com o resultado

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} \sqrt{\frac{1 - 4m_q^2/s}{1 - 4m_e^2/s}} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s} \right] \left[1 + \frac{2m_q^2}{s} \right] \quad (5.76)$$

Notar nesta equação o limiar de produção. A energia no CM tem de ser maior que duas vezes a massa do quark para a reação ter lugar, isto é, $\sqrt{s} > 2m_q$ assegurando que as raízes quadradas são bem definidas. Quando $\sqrt{s} \gg m_e, m_q$ a expressão simplifica-se enormemente para dar,

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s}. \quad (5.77)$$

5.6.3 A razão R

Quando começamos com uma energia do feixe mínima para aparecer o primeiro par de quarks e começamos a aumentar essa energia vamos passando os diferentes limiares de produção para as diferentes espécies de leptões e quarks. Este efeito pode ser descrito numa forma muito conveniente definindo a razão R ,

$$R \equiv \frac{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \mu^- + \mu^+)} \quad (5.78)$$

Se usamos a expressão aproximada na Eq. (5.77) devemos obter

$$R(\sqrt{s}) = 3 \sum_i Q_i^2 \quad (5.79)$$

onde a soma é sobre todos os quarks tais que $\sqrt{s} > 2m_q$. O fator 3 vem porque cada quark aparece em 3 cores. Assim se estivermos a uma energia onde só podem ser produzidos os quarks u, d, s temos

$$R = 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = 2 \quad (5.80)$$

Acima do limiar de produção do quarks c devemos ter

$$R = 2 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3} = 3.33 \quad (5.81)$$

e acima do limiar do b

$$R = \frac{10}{3} + 3 \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3} = 3.67 \quad (5.82)$$

Se houve energia suficiente para produzir o quark top tínhamos $R = 5$. Temos assim um efeito de escada em que há medida que a energia aumenta o R vai subindo a escada.

Como compara isto com a experiência? Vemos na Fig. 5.8 o gráfico de R baseado em dados experimentais. Vemos que o andamento em patamares se confirma,

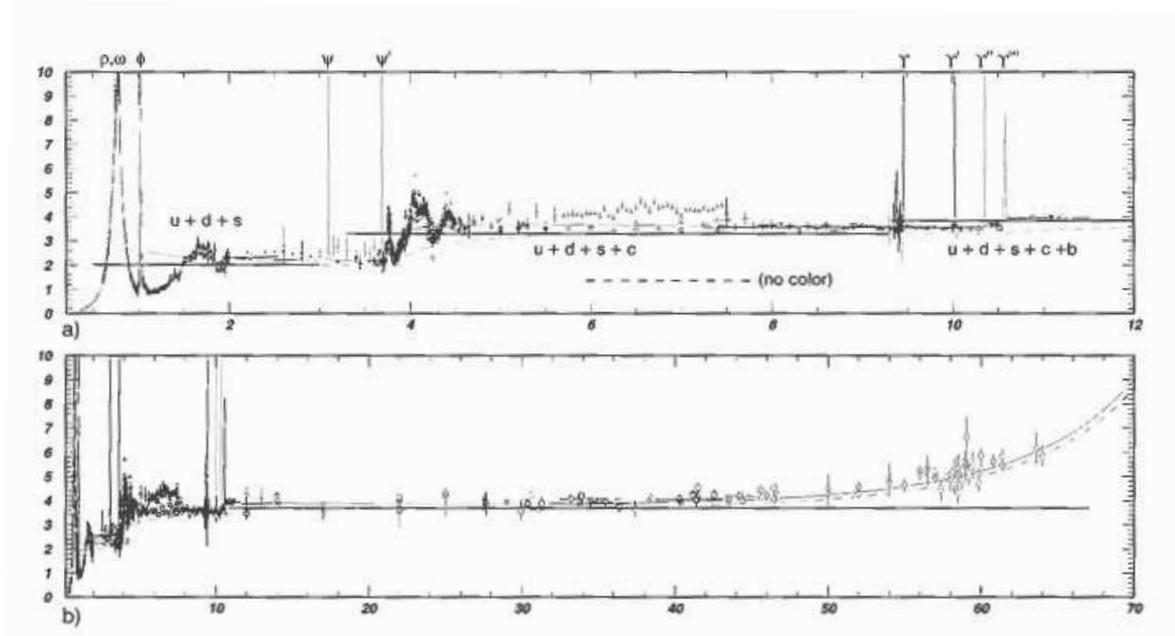


Figura 5.8: Gráfico de R baseado em dados experimentais. Tirado do Griffiths.

incluindo o fator 3 da cor. No entanto há zonas de ressonâncias que não são explicadas pelo argumento acima. Quando a reação tem a energia exata podem ser produzidos estados ligados quark-antiquark que aparecem como ressonâncias na figura: $\rho, \omega, \phi, \psi, \dots$. Mas se excluirmos estas ressonâncias o andamento geral confirma os cálculos e em particular constitui uma demonstração experimental da existência de tripletos de cor, a base para a construção da Cromodinâmica Quântica, a teoria das interações fortes. Voltaremos a esta teoria depois de vermos as teorias de gauge no capítulo 7.

Problemas capítulo 5

5.1 Considere os processos em QED:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma, \quad e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-, \quad \gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$$

- Desenhe os diagramas de Feynman para cada um destes processos.
- Escreva as respectivas amplitudes.

5.2 Utilize as expressões explícitas dos spinores u e v , Eq. (4.76) e Eq. (4.77) para mostrar as seguintes propriedades

$$\bar{u}(p, s)u(p, s') = \bar{v}(p, s)v(p, s') = 2m\delta_{ss'} \quad (5.83)$$

$$u^\dagger(p, s)u(p, s') = -v^\dagger(p, s)v(p, s') = 2E\delta_{ss'} \quad (5.84)$$

$$\sum_s u(p, s)_\alpha \bar{u}(p, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.85)$$

$$\sum_s v(p, s)_\alpha \bar{v}(p, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.86)$$

5.3 Considere o processo $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$. Defina as variáveis de Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 \quad (5.87)$$

Mostre que satisfazem a relação

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (5.88)$$

isto é, só duas delas são independentes.

5.4 Considere a definição $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ para qualquer combinação Γ de matrizes de Dirac.

- Para as matrizes da base Γ^A calcule $\bar{\Gamma}^A$.

b) Considere a matriz Γ definida por

$$\Gamma = \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) \quad (5.89)$$

onde g_V e g_A são constantes. Mostre que

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \quad (5.90)$$

c) Calcule $\overline{\gamma^\mu P_L}$ e $\overline{\gamma^\mu P_R}$.

5.5 Em relação aos teoremas de traços de matrizes gama:

- a) Demonstre o teorema 5.3
- b) Demonstre o teorema 5.5
- c) Demonstre o teorema 5.6

5.6 Este problema destina-se a aprender a calcular os traços simples que foram usados no texto. Começamos por definir os seguintes traços:

$$T^{\mu\nu} = \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu], \quad S^{\mu\nu} = \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu], \quad A^{\mu\nu} = \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \gamma_5] \quad (5.91)$$

a) Usando os teoremas dos traços, em particular as Eqs. (5.50), (5.52) e (5.53) mostre que

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= 4 g^{\mu\nu} \\ S^{\mu\nu} &= 4 [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2)] \\ A^{\mu\nu} &= -4i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} \end{aligned} \quad (5.92)$$

b) Verifique que $T^{\mu\nu}$ e $S^{\mu\nu}$ são tensores simétricos, $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ e que $A^{\mu\nu}$, é um tensor anti-simétrico, isto é $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$. Verifique que a contração dum tensor simétrico com um tensor anti-simétrico é sempre nula.

c) Mostre que se tem

$$\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} = -2 (g^\alpha_\rho g^\beta_\sigma - g^\alpha_\sigma g^\beta_\rho) \quad (5.93)$$

Nota: Nos testes e exames as Eqs. (5.91), (5.92) e (5.93) serão sempre dadas no enunciado, se forem necessárias.

5.7 Calcule os traços da difusão de Bhabha, Eq. (5.57). Use os resultados do Problema 5.6.

5.8 Para entender a Eq. (5.64), veja o Complemento 4.1 de *Introdução à Teoria de Campo* [2].

5.9 Mostre que a amplitude do efeito de Compton se pode escrever na forma

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_\mu(k) \epsilon_\nu(k') \quad (5.94)$$

Use $\mathcal{M}^{\mu\nu}$ para mostrar que as relações seguintes se verificam

$$k_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} = k'_\nu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0 . \quad (5.95)$$

Isto justifica desprezar os termos proporcionais aos momentos dos fótons exteriores na soma sobre as polarizações, Eq. (5.64). **Sugestão:** Se tiver dificuldades veja Complemento 4.2 do livro *Introdução à Teoria de Campo* [2].

5.10 Para o efeito de Compton:

- a) Calcule os traços, Eqs. (5.66)-(5.68).
- b) Mostre que se obtém a fórmula de Klein-Nishima, Eq. (5.69).