Problemas Capítulo 4

Ondas

***4.1** Uma onda transversal propagando-se numa corda vibrante muito longa é dada pela expressão

$$y(x,t) = 6 \times 10^{-2} \sin(2 \times \pi x + 4.0\pi t) \text{ (SI)}$$

a) Determine a amplitude da onda.
b) Qual o comprimento de onda e a frequência?
c) Qual a velocidade de propagação?
d) Qual a direcção de propagação?
e) Determine a velocidade máxima transversal de uma partícula na corda.

4.2 Um *impulso* triangular de 0.5 m de altura e de 2 m de comprimento desloca-se segundo a direcção positiva do eixo x numa corda, com velocidade $v = 12$ m/s. No instante $t = 0$, o impulso está entre $x_1 = 1$ m e $x_3 = 3$ m. Faça um gráfico da velocidade transversal do ponto x_3 em função do tempo.

4.3 Mostre que

$$u(x,t) = u_0 \sin(\omega t) \sin(kt)$$

é solução da equação de ondas e que representa a sobreposição de duas ondas de igual amplitude, propagando-se em sentidos opostos ao longo do eixo x. Essa solução é uma onda estacionária, apresentando nodos fixos ao longo de x; qual a posição desses nodos?

Ondas electromagnéticas

***4.4** Determine as frequências das ondas electromagnéticas que possuem os seguintes comprimentos de onda no vazio:
a) 10^3 m (onda longa de rádio);
b) 1 m (onda curta de rádio);
c) 3 cm (microondas);
d) 10^{-4} m (infravermelhos);
e) 5000 Å (luz visível);
f) 0.1 Å (raios X);
g) 10^{-2} Å (raios γ) .

4.5 Mostre que $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ satisfaz à equação das ondas.

***4.6** É conhecido o campo eléctrico duma onda plana electromagnética propagando-se num meio dieléctrico ($\mu_r = 1$):

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= -E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)\right] \\ E_z &= E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z\right)\right] \ , \end{aligned}$$

onde $E_0 = 0.4 \times 10^{-9}$ V/m, $\omega = 5 \times 10^5$ rad/s e $|\vec{k}| = 2 \times 10^{-3}$ m^{-1}.
a) Qual a direcção e sentido da propagação da onda? Represente num sistema de eixos (x,y,z) o vector $\vec{n}$. Verifique que $\vec{n}\cdot\vec{E} = 0$
b) Qual o índice de refracção do meio?
c) Qual o comprimento de onda?
d) Qual a polarização da onda?

***4.7** Uma onda plana electromagnética propaga-se num meio não condutor ($\mu_r = 1$, $\sigma = 0$ e $\vec{J} = 0$). O campo $\vec{H}$ é dado por

$$\begin{aligned} H_x &= -3 \times 10^{-3} \cos\left(\omega t - |\vec{k}|z\right) \text{ A/m} \\ H_y &= \ \ 2 \times 10^{-3} \sin\left(\omega t - |\vec{k}|z\right) \text{ A/m} \\ H_z &= 0 \ ; \end{aligned}$$

$\omega = 8 \times 10^6$ rad/s e $|\vec{k}| = 3.4 \times 10^{-2}$ m^{-1}.

a) Qual a permitividade do meio em que se propaga a onda?
b) Escreva as componentes do campo eléctrico $\vec{E}$ e descreva a polarização da onda.
c) Qual o comprimento de onda ?

***4.8** É conhecido o campo eléctrico duma onda plana electromagnética propagando-se num meio dieléctrico ($\mu_r = 1$):

$$
\begin{aligned}
E_x &= E_y = 00 \\
E_z &= E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y\right)\right] \text{ (SI)}\,,
\end{aligned}
$$

$E_0 = 2 \times 10^{-6}$ V/m, $\omega = 6 \times 10^5$ rad/s e $|\vec{k}| = 3 \times 10^{-3}$ m^{-1}.
a) Qual o índice de refracção do meio?
b) Qual a direcção e sentido da propagação da onda?
c) Calcule o campo $\vec{H}$ da onda.
d) Qual a polarização da onda?

***4.9** Uma onda e.m. plana propaga-se num meio não condutor, com $\mu_r = 1$. O campo eléctrico é $\vec{E} = E_x\,\vec{e}_x$, com

$$
E_x = E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z\right)\right] \;,
$$

$E_0 = 0.5$ V/m, $\omega = 6.5 \times 10^6$ rad/s e $|\vec{k}| = 3.1 \times 10^{-2}$ m^{-1}.
a) Defina a direcção e o sentido da propagação da onda.
b) Qual o índice de refracção do meio?
c) Determine o seu campo magnético $\vec{H}$.
d) Qual a polarização da onda?
e) Determine o vector de Poynting $\vec{S}$.

***4.10** O campo magnético de uma onda electromagnética plana, propagando-se num meio, com $\mu_r = 1$, é dado por

$$
\begin{aligned}
H_x &= H_0 \sin(\cdots) \\
H_y &= 0 \\
H_z &= -H_0 \cos(\cdots) \;,
\end{aligned}
$$

onde

$$
(\cdots) = \left(7.5 \times 10^6 t - 3 \times 10^{-2} y\right) \;,
$$

e $H_0 = 6 \times 10^{-3}$ A/m, t é expresso em segundos, e y em metros.
a) Qual a direcção de propagação ?
b) Qual o índice de refracção do meio?
c) Descreva a polarização da onda?

***4.11** Uma onda plana de rádio propaga-se no vácuo na direcção x polarizada linearmente, com o vector $\vec{E}$ na direcção do eixo do y. A sua frequência é $f = 1$ MHz. A potência média por unidade de área propagada pela onda é 20 W/m^2.
a) Determine o comprimento de onda.
b) Determine as amplitudes de $\vec{E}$ e $\vec{H}$.
c) Escreva as expressões analíticas de $\vec{E}$ e $\vec{H}$.

***4.12** É conhecido o campo eléctrico duma onda plana electromagnética de frequência $f = 10$ Hz propagando-se no vazio.

$$
\begin{aligned}
E_x &= 0 \\
E_y &= 0 \\
E_z &= E_0 \sin\left[\omega t - k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\right] \;,
\end{aligned}
$$

onde $E_0 = 2 \times 10^{-6}$ V/m.
a) Qual a polarização da onda incidente? Qual a direcção de propagação?
b) Esta onda incide numa lâmina de vidro de faces paralelas ($n_{\text{vidro}} = 1.5$). Calcule a espessura mínima da lâmina para que as ondas reflectidas nas duas faces tenham uma diferença de fase de 180°.

Energia

4.13 Mostre que

$$< \sin^2 \omega t >=< \cos^2 \omega t >= \frac{1}{2} \; .$$

***4.14** Uma nave a 30 000 km da Terra possui um emissor de 10 W emitindo isotropicamente a uma frequência de 2 GHz. Calcule o valor médio do vector de Poynting e o valor de pico do campo eléctrico à superfície da Terra.

***4.15** A Terra recebe do Sol aproximadamente 1.5 kW/m^2 (potência integrada sobre todas as frequências).
a) Qual é potência total emitida pelo Sol, supondo que radia isotropicamente? (Distância Terra-Sol = 1.5×10^{11} m).
b) Qual a potência total recebida pela Terra?
c) Se a massa do Sol for 2×10^{30} kg, e se esta for convertida em energia radiante com eficiência de 1% , qual o tempo de vida do Sol, supondo que ele continua a radiar à taxa actual?

***4.16** Uma fonte pontual emite ondas esféricas. A intensidade a uma certa distância da fonte é 25 W/m^2. A intensidade noutro ponto 10 metros mais afastado da fonte é 16 W/m^2.
a) Qual a distância da fonte ao primeiro ponto?
b) Qual é a potência da fonte?

4.17 Uma onda electromagnética plana e monocromática, propagando-se no ar ($\epsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$), apresenta um campo eléctrico definido por

$$\vec{E} = E_0 cos\left(\omega t - k\vec{n} \cdot \vec{r}\right) \; \vec{e}_y \; ,$$

com $E_0 = 0.2$ V/m e $\omega = 2\pi \times 10^{-6}$ rad/s. A onda incide sobre uma superfície plana de um dieléctrico, com $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 1$, segundo um ângulo $i = 30°$.
a) Escreva as expressões para os campos eléctrico e magnético das ondas incidente, reflectida e transmitida.
b) Mostre, ainda, que a energia que incide por segundo, por unidade de área, sobre a superfície do dieléctrico é igual à soma das energias das ondas reflectida e transmitida.

Reflexão e refracção

***4.18** Verifique que, quando uma onda passa através de um meio limitado por lados planos e paralelos, a direcção de propagação do raio emergente é paralela à do raio incidente, e calcule o deslocamento lateral dos raios em função da distância entre os planos.

4.19 Em termos matemáticos o princípio de Fermat pode ser enunciado da forma seguinte: A luz segue a trajectória que minimiza a quantidade

$$\mathcal{T} = \frac{1}{c} \int_{s_i}^{s_f} n \; ds \; .$$

Considere que a luz se propaga no plano zx dum dado referencial. Mostre que: a) A trajectória $z(x)$, que corresponde ao mínimo de $\mathcal{T}$, é a solução da equação

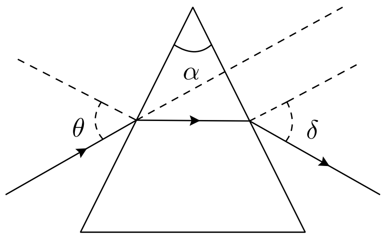
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{F}}{dz'} - \frac{\partial \mathcal{F}}{dz} = 0 \; ,$$

com

$$\mathcal{F} = n\left(z(x) + \sqrt{1 + (z')^2}\right) \; ,$$

e onde $z'(x) = dz/dx$. Sugestão: pense na analogia com as equações de Euler Lagrange.
b) Se n for constante, então a trajectória é uma linha recta.

4.20 Considere um raio luminoso que incide num prisma, conforme se indica na figura.



a) Mostre que o ângulo de desvio δ é mínimo para valores de θ tais que o raio passa o prisma simetricamente.
b) Para raios que passam o prisma simetricamente mostre que

$$\sin\frac{\alpha+\delta}{2} = n_{\text{prisma}}\ \sin\frac{\alpha}{2}\ .$$

c) Se o índice de refracção do prisma for $n_{\text{prisma}} = 1.48$ para o vermelho e $n_{\text{prisma}} = 1.52$ para o violeta, qual é a separação angular da luz visível num prisma com $\alpha = \pi/3$? Qual a distância do vermelho ao violeta num alvo a 1 metro de distância?

4.21 Mostre que o máximo do ângulo θ do arco-íris primário, Eq. (4.191), ocorre para

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{ar}}}\right)^2 - 1}\ .$$

Mostre que se $\frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{ar}}} = 1.33$ então $i \simeq \pi/3$ e $\theta \simeq 42°$.

4.22 Considere a trajectória dos raios solares para o arco-íris secundário indicada na Fig. 4.26. Deduza os seguintes resultados:
a) Relação entre θ e o ângulo de incidência, i:

$$\theta = \pi + 2i - 6\arcsin\left(\frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}}\ \sin i\right)\ .$$

b) O ângulo θ tem um mínimo para

$$\cos i = \frac{\sqrt{\left(\frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{ar}}}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{2}}\ .$$

Mostre que, se $\frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{ar}}} = 1.33$, então $i \simeq 71.9°$ e $\theta \simeq 50°$.

4.23 O campo magnético de uma onda e.m. plana e monocromática, propagando-se no vazio, é dado por

$$\vec{H}(\vec{r},t) = H_0 \sin\left(\omega t - 2x10 - 3\vec{n}\cdot\vec{r}\right)\vec{e}_y\ ,$$

onde $H_0 = 6\times 10^{-8}$ A/m.
a) Determine a frequência angular, o estado de polarização e a expressão para o campo eléctrico $\vec{E}$.
b) Suponha agora que a onda incide, segundo o ângulo de Brewster, sobre uma superfície plana de um dieléctrico, com índice de refracção $n' = 1.5$. Determine o ângulo de incidência e o vector de onda $\vec{k} = k\,\vec{n}$ no interior do dieléctrico e ainda o campo eléctrico da onda reflectida.
c) Mostre que a energia que incide por segundo e por unidade de área sobre a superfície do dieléctrico é igual à soma das energias das ondas transportadas pelas ondas reflectida e transmitida.

Interferências

4.24 Temos dois dipolos oscilantes, paralelos, em fase, separados por uma distância igual a $\lambda/2$. Mostre que:
a) na direcção normal à linha que une os dois dipolos é máxima a intensidade emitida pelo sistema e igual a 4 vezes a intensidade devida a um dipolo;
b) na direcção da linha unindo os dipolos é nula a intensidade;

c) na direcção fazendo 30° com a direcção da alínea a), essa intensidade é igual a 2 vezes a intensidade de um dipolo;
d) verifique o que se passa quando os dois dipolos estão desfasados de π radianos.

4.25 Considere o caso em que a distância entre os dipolos é igual a $\lambda/4$, e um dipolo está atrasado de $\pi/2$ radianos em relação ao outro. Verificar que existe um nítido efeito direccional.

Outros tópicos

4.26 Para os guias de ondas rectangulares da Secção 4.12, estude o modo TE com $k_x = 2\pi/a$. Em particular, determine a sua frequência de corte. Será fácil generalizar para um n qualquer?

4.27 Considere o guia de ondas com secção rectangular e eixo segundo o eixo z. Escreva os campos na forma

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(x,y)\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_z z)}$$
$$\vec{H} = \vec{\mathcal{H}}(x,y)\, e^{\mathrm{i}\,(\omega t - k_z z)} \ . \qquad (4.268)$$

a) Partindo das equações de Maxwell, mostre que as componentes transversais $\mathcal{E}_{x,y}$ e $\mathcal{H}_{x,y}$ podem exprimir-se em função das componentes longitudinais $\mathcal{E}_z$ e $\mathcal{H}_z$.

b) Mostre que as componentes longitudinais obedecem à equação diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\right)\mathcal{E}_z(\mathcal{H}_z) = 0 \ ,$$

onde

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \ .$$

c) Mostre que as condições na fronteira apropriadas para as soluções da equação anterior são

$$\mathcal{E}_z|_{\text{secção}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n}\right|_{\text{secção}} = 0,$$

d) Escreva a solução geral da para as componentes longitudinais, para os modos **TE** ($\mathcal{E}_z = 0$) e **TM** ($\mathcal{H}_z = 0$).

4.28 Considere os modos **TEM**, correspondentes a $\mathcal{E}_z = \mathcal{H}_z = 0$ (ver Problema 4.27).
a) Mostre que isso só é possível, se $k_z^2 = \omega^2/c^2$, isto é $\omega_c = 0$.
b) Mostre que as equações de Maxwell implicam, neste caso, que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}_{\mathbf{TEM}} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}_{\mathbf{TEM}} = 0 \ .$$

c) Verifique que as equações da alínea anterior correspondem a um problema de electrostática a duas dimensões (as dimensões transversais) equivalente a $\nabla^2 \phi_{\mathbf{TEM}} = 0$, com $\phi_{\mathbf{TEM}}$ constante na superfície condutora do guia e $\vec{\mathcal{E}}_{\mathbf{TEM}} = -\vec{\nabla}\phi_{\mathbf{TEM}}$.
d) Mostre que só existe modo **TEM** se o condutor não for simplesmente conexo. Este resultado mostra que estes modos não podem existir num guia de ondas, mas sim em cabos coaxiais e linhas bifilares. Em resultado da alínea a), não há frequência de corte para estes dois casos.

Métodos numéricos

4.29 Considere que, nas condições do Problema 4.19, o índice de refracção é só função da altura, isto é $n(z)$.
a) Deduza a equação diferencial que resulta do princípio de Fermat:

$$n(z)\ z'' - \frac{dn}{dz}\ \left(1 + z'^2\right) = 0$$

b) Prove que esta equação diferencial de segunda ordem é equivalente ao seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= f(x)\\ \frac{df}{dx} &= \frac{dn}{dz}\frac{1}{n(z)}\left[1+f(x)^2\right]\ .\end{aligned}$$

c) Considere que o perfil do índice de refracção é dado por

$$n(z) = 1 + \frac{0.0003}{1+e^{(z_0-z)/\Delta z}}\ ,$$

com $z_0 = 0.5$ m e $\Delta z = 0.1$ m. Resolva numericamente a equação diferencial para a trajectória do raio luminoso. Para isso, use o método de Runge-Kutta com condições fronteira apropriadas. Investigue as condições em que há curvatura apreciável do raio luminoso. Para isso, considere que o observador está a $z = 1.5$ m e que o objecto está à distância $L = 200$ m. Reproduza a Fig. 4.22.