

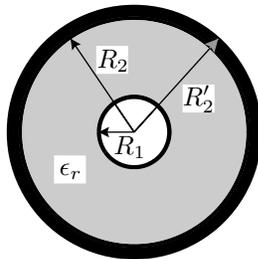
Problemas Capítulo 2

Corrente estacionária

***2.1** Seja um fio de cobre de 1 mm^2 de secção, percorrido por uma corrente de intensidade 1 A . Sabendo que a massa volúmica do cobre é $\rho = 8.96 \text{ g.cm}^{-3}$, a sua massa molar é $m = 63.54 \text{ g mol}^{-1}$, a constante de Avogadro é $N = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ e que cada átomo contribui com um electrão para o *gás electrónico*, determinar a velocidade média desse *fluido*. Comente o resultado.

***2.2** O dieléctrico dum condensador plano, cujas armaduras, de área S , estão à distância d , é composto por duas camadas homogêneas de espessura d_1 e d_2 , de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , e condutividades σ_{c1} e σ_{c2} , tal que $d = d_1 + d_2$. A diferença de potencial entre as armaduras é V . Determinar a densidade de carga eléctrica livre e a densidade de corrente sobre a superfície de separação das duas camadas.

***2.3** Seja um condensador esférico definido pelos raios $R_1 = 2 \text{ cm}$, $R_2 = 5 \text{ cm}$, $R'_2 = 5.1 \text{ cm}$ (ver figura).



O espaço entre as armaduras está completamente preenchido por uma substância com $\epsilon_r = 4$ e condutividade $\sigma_c = 10^{-2} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

Ligam-se as armaduras a fontes, de modo a que $\phi_1 = 10 \text{ V}$ e $\phi_2 = 0 \text{ V}$. Determinar:

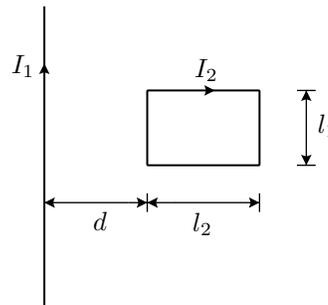
- As cargas ρ , ρ' , σ e σ' .
- O valor da intensidade de corrente.
- A resistência do meio.

***2.4** Uma bateria, de força electromotriz \mathcal{E} e resistência interna r , fornece uma potência P a uma resistência R .

- Estabelecer a lei de variação da potência em função de R e obter as condições em que a potência fornecida é máxima. b) Como usar o resultado da alínea anterior para medir a resistência interna duma bateria?

Lei de Biot-Savart

***2.5** Temos um fio rectangular no qual circula uma corrente I_2 . No mesmo plano encontra-se outro fio percorrido por uma corrente I_1 e de comprimento $L \gg l_1, l_2$ (ver figura).



- Qual a força no fio rectangular? Qual a força no outro fio?
- Calcule o momento das forças no fio rectangular em relação ao centro do rectângulo.

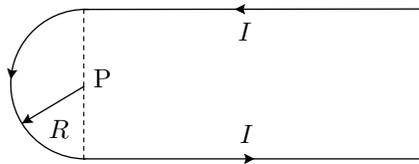
***2.6** Considere uma espira quadrada de lado L , assente no plano xy , percorrida por uma corrente I . Calcule \vec{H} no centro da espira.

2.7 Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ para o caso do campo do fio retilíneo infinito (Exemplo 2.1). Faça o problema em coordenadas cartesianas e em coordenadas cilíndricas.

***2.8** Um disco circular não condutor de raio a possui uma densidade superficial de carga σ uniforme. O disco roda em torno do eixo que lhe é perpendicular e que passa no seu centro com velocidade angular ω . Determine o valor do campo de indução magnética no centro do disco.

***2.9** Considere ainda o disco referido no Problema 2.8. Calcule agora o campo de indução magnética, num ponto do eixo de rotação do disco situado a uma distância b do seu centro, no caso de b ser muito maior que o raio a do disco.

***2.10** Dois condutores muito longos e paralelos estão ligados por uma semicircunferência de raio R .

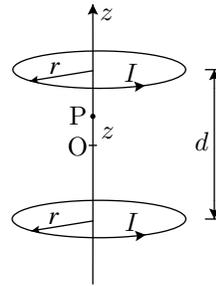


Calcular a indução magnética $|\vec{B}|$ no ponto P , situado no plano deste conjunto.

***2.11** Dois fios paralelos, à distância d , são percorridos pela mesma intensidade de corrente I , mas em sentidos opostos. Determinar o campo \vec{B} : a) Num ponto do plano que contém os fios. b) Num ponto do plano mediano.

***2.12** Determine o coeficiente de indução mútua entre o fio e o circuito rectangular do Problema 2.5.

2.13 Em muitas aplicações, é necessário utilizar campos magnéticos uniformes numa dada região do espaço. As bobinas de Helmholtz são uma solução para este problema. São constituídas por dois anéis de corrente iguais, e com o mesmo eixo, e percorridos por correntes estacionárias I no mesmo sentido, conforme se indica na figura.



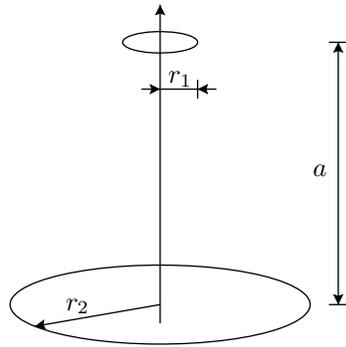
a) Mostre que a indução magnética no ponto P se pode escrever na forma $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$, onde z é a distância da origem O (ponto médio da distância dos anéis) ao ponto P .

b) Desenvolva $B(z)$ numa série de potências na variável $\alpha = z/d$. Mostre que só os termos pares são não nulos.

c) Encontre a condição para que o termo de ordem α^2 se anule. Comente a aplicação deste resultado.

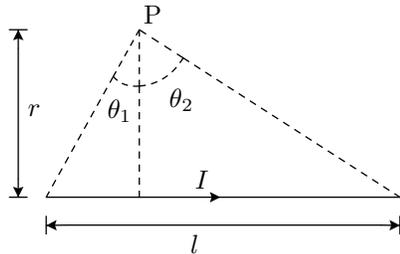
***2.14** Temos um cilindro cuja superfície está carregada uniformemente com uma carga de σ . O cilindro gira em torno do eixo, com uma velocidade angular ω . Calcular o valor de $|\vec{B}|$ assim criado.

***2.15** Na figura, temos representadas duas espiras paralelas, com o mesmo eixo, separadas de uma distância a . Os respectivos raios satisfazem $r_1 \ll r_2, a$.



Calcule o coeficiente de indução mútua do sistema, fazendo as aproximações que considerar razoáveis.

2.16 Considere um fio rectilíneo de comprimento ℓ percorrido por uma corrente estacionária I (ver figura).



a) Mostre que o campo \vec{B} no ponto P é tal que

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2)$$

b) No limite apropriado, obtenha o campo do fio infinito.

c) Use a alínea a) para verificar o resultado do Problema 2.6.

2.17 Considere a situação referida no Exemplo 2.9. Pretende-se agora usar a definição da Eq. (2.70) para calcular \vec{A} . Como $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$,

devemos ter $\vec{A} = A_z \vec{e}_z$. Devido a o fio ser infinito, o potencial A_z também o será. No entanto, o potencial vector é uma grandeza auxiliar, e qualquer constante arbitrária, mesmo infinita, não modificará o valor de \vec{B} .

a) Mostre que

$$A_z(r, \varphi, z) - A_z(0, 0, 0)$$

é uma quantidade finita. Para isso, *regularize* os integrais, fazendo uma integração em z' no intervalo $-L < z' < L$.

b) Depois de fazer a integração, faça $L \rightarrow \infty$. Mostre que a dependência em z desapareceu e o resultado é finito.

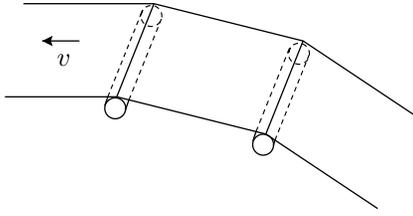
c) Faça agora as integrações em φ' e r' e mostre que obtém os resultados das Eqs. (2.86) e (2.87).

Lei de Ampère

***2.18** Determinar o campo \vec{B} criado no interior e no exterior dum cabo rectilíneo de comprimento infinito e raio R percorrido pela intensidade de corrente I distribuída uniformemente na secção. Desenhar as linhas de campo.

***2.19** Num cabo coaxial muito longo, uma corrente I circula num sentido no condutor interior e regressa pelo condutor exterior. O raio do condutor interior é igual a R_1 , e o condutor exterior é definido pelos raios R_2 e R_3 , com $R_3 > R_2 > R_1$. Calcular $|\vec{B}|$ em todas as regiões e fazer o respectivo gráfico.

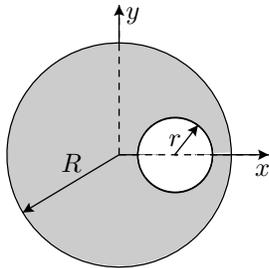
***2.20** Numa fábrica de plásticos, devido à fricção do plástico nos rolos cilíndricos ao longo dos quais é arrastado, gerou-se no plástico uma carga superficial de $+\sigma$.



Calcular o valor aproximado de $|\vec{B}|$, próximo da superfície do plástico.

2.21 Uma folha muito comprida (podemos tomá-la como infinita), de largura l , está uniformemente carregada com σ . A folha desloca-se com velocidade v na direção longitudinal, originando assim uma corrente superficial. Calcular a indução magnética num ponto P, à distância d da folha e equidistante dos lados desta. Verifique se recupera o resultado do problema anterior, para distâncias d muito pequenas.

2.22 A figura representa um corte transversal dum condutor cilíndrico de raio R com uma cavidade também cilíndrica de raio r e centro $(R/2, 0, z)$, conforme se indica na figura. O condutor é percorrido por uma corrente estacionária de densidade constante e dada por $\vec{J} = J_0 \vec{e}_z$.

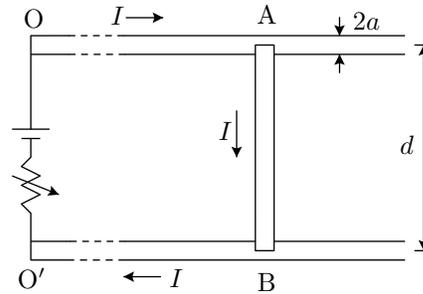


Calcule o campo \vec{B} em todo o espaço. Sugestão: utilize o princípio de sobreposição.

Força magnética

2.23 Um circuito rectangular é percorrido por uma corrente I . O campo \vec{B} , criado pela própria corrente, exerce forças de Laplace. Verifique que o sentido dessas forças é *para fora* e tende a aumentar o valor algébrico do fluxo. Por isso, um circuito de comprimento fixo e forma flexível, percorrido por uma corrente, tende a assumir a forma de uma circunferência.

2.24 Considere o circuito indicado em baixo.



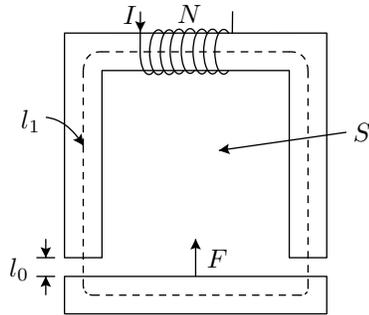
A barra metálica AB desliza sem atrito sobre os carris condutores e tem uma massa $m = 3$ g. A corrente I é mantida a um valor constante $I = 20$ A. Os outros dados são $d = 3.5$ mm e $2a = 1$ mm.

a) Calcule o valor médio de $|\vec{B}|$ ao longo de AB. Suponha para isso que a barra está a uma distância muito grande das extremidades O e O'.

b) Utilize este valor médio para achar a força que se exerce sobre a barra AB e calcule a respectiva aceleração.

c) Calcule a velocidade atingida ao fim de 2 min. Este sistema constitui o que se designa por canhão magnético.

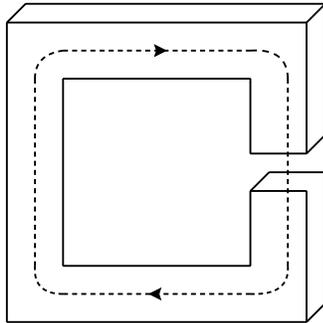
2.25 A figura representa um electroímã, cujo enrolamento possui 500 espiras e é percorrido por uma corrente $I = 10$ A.



Seja S a seção recta do núcleo. O fluxo magnético ϕ é suposto ser uniforme e não ter perdas. Calcular a força de levantamento $|\vec{F}_{\text{mag}}|$. Dados: $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, $\mu_{\text{núcleo}} = 3000 \mu_0$, $l_0 = 2 \text{ mm}$ e $l_1 = 200 \text{ cm}$ (consultar a Ref. [10] sobre este assunto).

Substâncias magnéticas

2.26 Considere o íman permanente representado na figura:

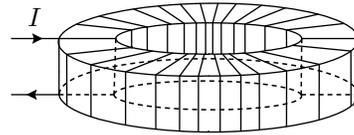


Mostre que dentro do íman as linhas de força de \vec{B} e de \vec{H} podem ter sentidos opostos.

Energia

2.27 Uma bobina consiste num enrolamento de N voltas num núcleo toroidal com permeabilidade magnética μ , conforme se indica na

figura. O raio interior do toróide é b , e os lados da seção quadrada têm o comprimento a . Uma corrente estacionária I percorre o enrolamento.



- a) Calcule o campo \vec{B} à distância r do eixo do toróide.
- b) Calcule o fluxo no núcleo do toróide.
- c) Mostre que o coeficiente de auto-indução do toróide é dado por

$$L = \frac{\mu N^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+b}{b} \right) .$$

- d) Calcule a energia magnética armazenada no toróide. Mostre que é igual a $\frac{1}{2} L I^2$.

2.28 Considere um cabo coaxial. O condutor interior tem raio r_1 , e o condutor exterior tem raio r_2 e espessura desprezável. O condutor interior é percorrido por uma corrente I que retorna em sentido contrário pelo condutor exterior.

- a) Calcule o campo \vec{B} em todo o espaço.
- b) Calcule a energia magnética por unidade de comprimento do cabo coaxial.
- c) Use o resultado da alínea b) para mostrar que a auto-indução por unidade de comprimento do cabo coaxial é dada por

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + \frac{1}{4} \right] .$$

- d) Para muito altas frequências, a corrente não entra dentro do condutor (efeito pelicular). Mostre que neste caso se tem

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

e) Se quisesse calcular o coeficiente de auto-indução, nas condições da alínea d), através do fluxo, qual a superfície que teria de considerar?

2.29 Temos um condutor retilíneo de raio r percorrido por uma corrente estacionária I .

a) Mostre que usando a definição do coeficiente de auto-indução a partir do fluxo ou da energia se obtém que o coeficiente de auto-indução dum fio infinito é infinito. Comente.
 b) No entanto, os fios retilíneos são partes de circuitos e é importante calcular o seu coeficiente de auto-indução. A definição normalmente aceite deve-se a Rose e é a seguinte: considere um fio de comprimento l percorrido por uma corrente uniforme I e situado no eixo z entre $z = 0$ e $z = l$. O campo \vec{B} pode calcular-se em qualquer ponto compreendido entre os planos $z = 0$ e $z = l$, usando os resultados do Problema 2.16. A definição de L é então obtida através do cálculo da energia magnética armazenada entre esses dois planos. Use esta definição para mostrar que

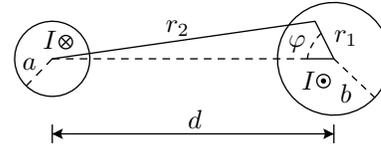
$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - \frac{3}{4} \right].$$

c) Mostre que no caso das altas frequências em que a corrente não penetra no condutor, ficando somente à superfície, se tem

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[\ln \left(\frac{2l}{r} \right) - 1 \right].$$

d) Qual a superfície que permite obter o resultado da alínea c) através do cálculo do fluxo magnético?

2.30 Uma linha bifilar é constituída por dois condutores paralelos de raios a e b , percorridos por correntes estacionárias I conforme se indica na figura.



a) Calcule a energia magnética por unidade de comprimento da linha bifilar. Para isso, use a expressão da energia em termos do potencial vector, Eq. (2.181), e as expressões para \vec{A} na Eq. (2.88). Considere a geometria da figura.

b) Use o resultado anterior para mostrar que o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento da linha bifilar é dado por

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{d^2}{ab} \right).$$

Sugestão: Use o integral

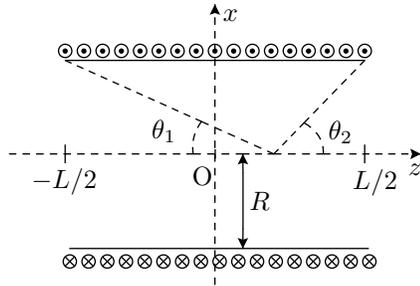
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln(A - B \cos \varphi) d\varphi &= \\ &= 2\pi \ln \frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} \end{aligned}$$

para $A > |B| > 0$.

2.31 Considere o cabo coaxial descrito no Problema 2.28. Use o método do Problema 2.30, isto é, calcule a energia magnética através do potencial vector \vec{A} , para tornar a calcular o coeficiente de auto-indução do cabo coaxial.

Métodos numéricos

2.32 Considere o solenóide representado na figura junta, percorrido por uma corrente estacionária I .



a) Mostre que o campo \vec{B} do solenóide num ponto do eixo se escreve $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ com

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) .$$

b) Mostre que, no limite apropriado, este resultado reproduz o campo do solenóide infinito.

c) Faça um gráfico de $B_z(z)/\mu_0 n I$ em função de z/L no intervalo $-4 < z/L < 4$, para $L/R = 2, 6, 20$. Verifique que reproduz a Fig. 2.16.

2.33 Considere o solenóide descrito no Problema 2.32.

a) Mostre que, para um ponto no eixo x , isto é, um ponto de coordenadas $P(x, 0, 0)$, o campo \vec{B} se escreve $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ com

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{LR(R - x \cos \varphi)}{R^2 + x^2 - 2xR \cos \varphi}$$

$$\frac{1}{\sqrt{L^2/4 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos \varphi}} .$$

b) Calcule numericamente o integral anterior, para fazer um gráfico de $B_z(z)/\mu_0 n I$ em função de x/L no intervalo $-4 < x/L < 4$ para $L/R = 2, 5, 20$. Verifique que reproduz a Fig. 2.16.

2.34 Nos Problemas 2.32 e 2.33 foi feito o cálculo do campo \vec{B} em situações em que $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$. Considere agora um ponto genérico $P(x, 0, z)$ no plano xz da figura do Problema 2.32.

a) Escreva expressões na forma de integrais para as componentes de \vec{B} no ponto genérico P .

b) Mostre que $B_y = 0$, isto é, as linhas de força de \vec{B} existem no plano xz .

c) Faça um programa para calcular numericamente as componentes B_x e B_z . Desenhe as linhas de força do campo \vec{B} no plano xz para os casos $L/R = 2, 10$.

2.35 Faça um programa para desenhar as linhas de força do campo \vec{B} para a linha bifilar do Problema 2.30.