

# Problemas Extra de Magnetostática

Em magnetostática poucos são os problemas que conduzem a uma solução analítica em termos de funções elementares. O conjunto de questões que se seguem servem para ilustrar isso para o caso dum anel de corrente percorrido por uma corrente estacionária, conforme indicado na Fig. 1, No livro de texto [1], nós vimos como calcular o campo  $\vec{B}$  no ponto

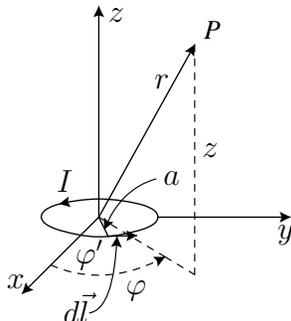


Figure 1: Anel de corrente

$P$  quando este se encontrava sobre o eixo de simetria. Para esse caso o resultado é dado pela Eq.(2.38) que se escreve aqui  $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$  com

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1)$$

onde se usaram coordenadas cilíndricas. Que acontece quando o ponto  $P$  não se encontra sobre o eixo de simetria? Vamos mostrar que é possível neste caso obter o resultado numa forma analítica mas em termos de funções especiais, os chamadas integrais elípticos completos de primeira e segunda espécie.

## Integrais Elípticos Completos

Vamos aqui indicar as propriedades mais importantes destas funções especiais. O integral elíptico de 1º espécie,  $K(k)$ , é definido pelo integral

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \quad (2)$$

enquanto que o integral elíptico de 2º espécie,  $E(k)$ , é dado por,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (3)$$

Para o seguimento são importantes as seguintes relações,

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{1}{k} [E(k) - K(k)] \quad (4)$$

e

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{1}{k} \left[ \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k) \right] \quad (5)$$

Para valores pequenos de  $k^2$  temos,

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}k^2 - \frac{3\pi}{128}k^4 + \dots \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{9\pi}{128}k^4 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

A função  $K(k)$  é dada no Mathematica pela função `EllipticK[k2]` enquanto que  $E(k)$  é dada por `EllipticE[k2]`. Notar a potência do argumento no Mathematica. Na Fig. 2 está indicado o andamento de  $E(k)$  e  $K(k)$  para  $k \in [0, 1]$ . Notar que  $E(1) = 1$  e  $K(1) = \infty$ .

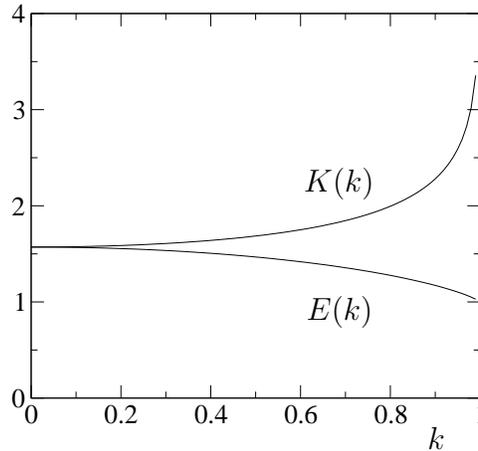


Figure 2: Integrais elípticos  $E(k)$  e  $K(k)$ .

## I

Considere o anel de corrente indicado na Fig. 1 percorrido por uma corrente estacionária  $I$ . Como o problema tem simetria azimutal considere, sem perda de generalidade, que o ponto  $P$  se encontra no plano  $xz$ .

a) Mostre que o potencial vector tem só componente segundo o vector  $\vec{e}_\varphi$  em coordenadas cilíndricas e que se tem

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I a \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi'}} d\varphi' \quad (7)$$

onde o ponto  $P = (\rho, 0, z)$  e  $\varphi'$  é o ângulo de integração ao longo da espira.

b) Usando a mudança de variável  $\varphi' = 2\alpha + \pi$  mostre que pode escrever,

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \frac{\mu_0}{\pi} I \frac{a}{\xi} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \\ &= \frac{\mu_0}{\pi} I \frac{a}{\xi k^2} \left[ (2 - k^2)K(k) - 2E(k) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

onde

$$\begin{aligned}\xi &= \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2} \\ k &= \sqrt{\frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}}\end{aligned}\quad (9)$$

c) Considere agora que  $r \gg a$ . Mostre que obtém o resultado da Eq.(2.118), isto é,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\pi a^2) \sin \theta}{r^2} \quad (10)$$

onde  $r$  e  $\theta$  são agora as coordenadas esféricas do ponto  $P = (r, \theta, 0)$  e não as coordenadas cilíndricas usadas nas alíneas anteriores.

d) Verifique que, trivialmente, o potencial vector satisfaz a equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (11)$$

## II

Vamos agora calcular o campo  $\vec{B}$  no ponto  $P = (\rho, 0, z)$ . Para isso vamos usar  $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Em coordenadas cilíndricas temos

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad ; \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} \quad ; \quad B_\varphi = 0 \quad (12)$$

a) Mostre que se obtém

$$\begin{aligned}B_\rho &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho \xi} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right] \\ B_z &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\xi} \left[ K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k) \right]\end{aligned}\quad (13)$$

b) Mostre que sobre o eixo de simetria,  $\rho = 0$ , este resultado está de acordo com a Eq. (1), isto é,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \rightarrow 0} B_\rho &= 0 \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} B_z &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (14)$$

c) Utilizando a expressão da divergência em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (15)$$

verifique que o campo  $\vec{B}$  satisfaz sempre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (16)$$

### III

Vamos agora calcular o campo  $\vec{B}$  a partir da lei de Biot-Savart.

a) Para isso considere coordenadas cilíndricas e o ponto  $P(\rho, 0, z)$  no plano  $xz$ , sem perda de generalidade, devido à simetria azimutal do problema. Use

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z = \rho\vec{e}_x + z\vec{e}_z \\ \vec{r}' &= a(\cos\varphi'\vec{e}_x + \sin\varphi'\vec{e}_y) \\ d\vec{l}' &= ad\varphi'(-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y)\end{aligned}\tag{17}$$

para mostrar que

$$\begin{aligned}|\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi'} \\ d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= ad\varphi'[z\cos\varphi'\vec{e}_\rho + z\sin\varphi'\vec{e}_\varphi + (a - \rho\cos\varphi')\vec{e}_z]\end{aligned}\tag{18}$$

e portanto

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\cos\varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi')^{3/2}} d\varphi'\tag{19}$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z\sin\varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi')^{3/2}} d\varphi'\tag{20}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - \rho\cos\varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho\cos\varphi')^{3/2}} d\varphi'\tag{21}$$

b) Mostre que se os integrais anteriores se podem exprimir em termos dos integrais elípticos  $E(k)$  e  $K(k)$  e obter os resultados das Eq. (12) e Eq. (13).

c) Utilize os métodos da secção 1.3.3 para fazer um programa que trace as linhas de campo de  $\vec{B}$  no plano  $xz$  que passam nos pontos  $(\frac{1}{4}a, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$ ,  $(\frac{3}{4}a, 0, 0)$  e  $(\frac{7}{8}a, 0, 0)$ . Faça  $I = 1$  A e  $a = 0.1$  m

### IV

Considere novamente o problema I. Vamos obter a expressão em termos de multipolos. Para isso utilize a expansão (ver livro de J. D. Jackson na bibliografia),

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos\gamma)\tag{22}$$

válida para  $a = |\vec{r}'| < |\vec{r}|$ , e onde  $P_l(x)$  são os polinómios de Legendre e  $\gamma$  é o ângulo entre os vectores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ .

a) Mostre que a componente  $A_\varphi$  do potencial vector se pode escrever na forma

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} F_l(\theta)\tag{23}$$

onde

$$F_l(\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' P_l(\sin \theta \cos \varphi') \quad (24)$$

b) Mostre que  $F_l(\theta) = 0$  para todos os valores pares de  $l$ . Comente a ausência do termo  $l = 0$ .

c) Mostre que  $F_1(\theta) = \pi \sin \theta$  e que portanto o primeiro termo não nulo do potencial vector a grandes distâncias é,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_z \sin \theta}{r^2} \quad (25)$$

com  $m_z = \pi a^2 I$ . Comente.

d) Utilize o **Mathematica** para calcular os integrais em  $F_l(\theta)$ . Mostre que se obtém

$$A_\varphi = \mu_0 I \sum_{l=1, l \text{ odd}}^{\infty} (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{l!!}{2l(l+1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l^1(\cos \theta) \quad (26)$$

onde  $P_l^m(x)$  são os polinómios associados de Legendre. Estas funções são dadas no **Mathematica** por `LegendreP[l, m, x]`.

## V

Uma das equações fundamentais do electromagnetismo,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ , tem como consequência que as linhas de campo de  $\vec{B}$  são fechadas. No problema **II** determinámos as componentes do campo  $\vec{B}$  devido a um anel de corrente de raio  $a$  assente no plano  $xy$  e com centro na origem. Vamos neste problema mostrar que o fluxo que atravessa a superfície com  $\rho < a$  é igual e de sinal contrário ao fluxo que atravessa a superfície com  $\rho > a$ . Em termos simples, todas as linhas de campo que atravessam a superfície contida dentro da espira têm que atravessar também a superfície exterior.

a) Mostre que os fluxos que atravessam as superfícies limitadas pelo anel de corrente em  $\rho = a$  são dadas por (a normal escolhida é  $\vec{n} = \vec{e}_z$ )

$$\Phi_{\text{Interior}} = \Phi_0 \int_0^1 d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad \Phi_{\text{Exterior}} = \Phi_0 \int_1^\infty d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad (27)$$

onde

$$\Phi_0 = \mu_0 I a \quad (28)$$

e

$$\mathcal{F} = \frac{\eta}{1+\eta} \left[ K(k) + \frac{1-\eta^2}{(1-\eta)^2} E(k) \right] \quad (29)$$

com

$$k = \sqrt{\frac{4\eta}{(1+\eta)^2}} \quad (30)$$

b) Verifique que os fluxos definidos pela Eq. (27) são infinitos. Isto resulta do facto de se ter considerado um fio com secção nula. Faça um gráfico da função integranda  $\mathcal{F}(\eta)$  para  $0 < \eta < 10$ .

c) O resultado da alínea b) põe um problema ao querermos verificar que

$$\Phi_{\text{Interior}} = -\Phi_{\text{Exterior}} \quad (31)$$

Para resolver este problema completamente teríamos de considerar que a secção do fio não é nula e recalculer o campo  $\vec{B}$  em todo o espaço. Veríamos então que os fluxos não são infinitos. Com estamos só interessados em mostrar a Eq. (31) podemos utilizar um outro método. Para isso definimos, em vez da Eq. (27),

$$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_0^{1-\epsilon} d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad \Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_{1+\epsilon}^{\infty} d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad (32)$$

Agora para  $\epsilon > 0$  os integrais não são infinitos e para  $\epsilon$  suficientemente pequeno deve ser possível mostrar que a Eq. (31) é satisfeita. No entanto se quisermos calcular os integrais numericamente veremos que é difícil conseguir a precisão desejada. De facto use o **Mathematica** para obter os valores da tabela seguinte

$\epsilon$	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon)/\Phi_0$
$10^{-1}$	2.21770	-2.55543
$10^{-2}$	4.65625	-4.71294
$10^{-3}$	6.98320	-6.99103
$10^{-4}$	9.28927	-9.29014

d) Para valores muito pequenos de  $\epsilon$  a integração numérica torna-se difícil. De facto o **Mathematica** já dá uma mensagem de *convergência não atingida* para o último valor da tabela anterior. Para resolver este problema vamos fazer um desenvolvimento em série para isolar a divergência. Use o **Mathematica** para mostrar que na vizinhança de  $\eta = 1$  temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) &= \frac{1}{1-\eta} - \frac{1}{2} \ln |1-\eta| + c_0 + (1-\eta) \left[ c_1 + \frac{1}{8} \ln |1-\eta| \right] \\ &+ (1-\eta)^2 \left[ c_2 + \frac{3}{32} \ln |1-\eta| \right] + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

onde

$$c_0 = -1 - \frac{1}{2}\gamma - \psi(1/2) - \frac{1}{4} \ln 4 \simeq 0.03972077 \quad (34)$$

$$c_1 = -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\gamma + \frac{3}{16}\psi(1/2) - \frac{1}{16}\psi(3/2) - \frac{1}{16} \ln 4 \simeq -0.57243019 \quad (35)$$

$$c_2 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32}\gamma + \frac{1}{8}\psi(1/2) - \frac{1}{32}\psi(3/2) - \frac{3}{64} \ln 4 \simeq -0.22619764 \quad (36)$$

e  $\gamma = 0.577216$  é a constante de Euler e  $\psi(z) = \frac{d\Gamma(z)}{dz}$ . Da Eq. (33) é claro porque é que os integrais divergem. Podemos usar esta expansão para definir expressões aproximadas,

mas mais úteis para efectuar os integrais,

$$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_0^{\eta_1} d\eta \mathcal{F}(\eta) + \Phi_0 \int_{\eta_1}^{1-\epsilon} d\eta \mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) \quad (37)$$

$$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_{1+\epsilon}^{\eta_2} d\eta \mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) + \Phi_0 \int_{\eta_2}^{\infty} d\eta \mathcal{F}(\eta) \quad (38)$$

onde  $\eta_{1,2}$  não necessitam de estar tão próximos de  $\eta = 1$ . Com estas expressões é mais fácil efectuar os integrais para valores mais pequenos de  $\epsilon$ . Para  $\eta_1 = 0.95$  e  $\eta_2 = 1.05$  mostre que se obtêm os valores indicados na tabela seguinte,

$\epsilon$	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon)/\Phi_0$
$10^{-4}$	9.28927	-9.29014
$10^{-5}$	11.5923	-11.5923
$10^{-6}$	13.8949	-13.8948
$10^{-7}$	16.1975	-16.1974

Experimente com outros valores de  $\eta_{1,2}$ .

e) A auto inductância duma espira circular pode ser calculada determinando o fluxo que atravessa a espira e igualando  $\Phi = LI$ . Claro que temos o problema da divergência do fluxo quando o raio do condutor é nulo. Por isso define-se normalmente a auto inductância integrando *até ao condutor*, isto é considerando só a nossa definição de  $\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)$ . Na literatura é usual usar uma fórmula aproximada devida a Wheeler[2]

$$L \simeq a\mu_0 \left[ \ln \left( \frac{8a}{b} \right) - 2 \right]$$

onde  $a$  é o raio da espira circular e  $b$  o raio do condutor. Mostre que este resultado é consistente com os resultados anteriores reproduzindo os valores da tabela seguinte

$\epsilon$	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	$L/L_0$
$10^{-1}$	2.21770	2.38203
$10^{-2}$	4.65625	4.68461
$10^{-3}$	6.98320	6.9872
$10^{-4}$	9.28927	9.28978
$10^{-5}$	11.5923	11.5924
$10^{-6}$	13.8949	13.8950
$10^{-7}$	16.1975	16.1975

onde  $L_0 = a\mu_0$  e  $\epsilon = b/a$ .

## VI

No problema **II** obtivemos o campo  $\vec{B}$  no caso dum anel de corrente. Vamos usar esse problema para determinar o campo  $\vec{H}$  dum solenóide de altura  $2L$  e raio  $a$ , com o eixo coincidente com o eixo do  $z$ , percorrido por uma corrente superficial  $J_S = nI$  A/m, onde  $n$  é, como habitualmente, o número de espiras por unidade de comprimento.

a) Mostre que as componentes do campo  $\vec{H}$  são dadas pelas seguintes expressões,

$$\begin{aligned} H_\rho(\rho, z) &= \int_{-L}^L dz' \mathcal{F}_\rho(\rho, z, a, L, z') \\ H_z(\rho, z) &= \int_{-L}^L dz' \mathcal{F}_z(\rho, z, a, L, z') \\ H_\varphi(\rho, z) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\rho(\rho, z, a, L, z') &= \frac{J_S}{2\pi} \frac{z - z'}{\rho \xi} \left[ -K(k) + \frac{a^2 + \rho^2 + (z - z')^2}{(a - \rho)^2 + (z - z')^2} E(k) \right] \\ \mathcal{F}_z(\rho, z, a, L, z') &= \frac{J_S}{2\pi} \frac{1}{\xi} \left[ K(k) + \frac{a^2 - \rho^2 - (z - z')^2}{(a - \rho)^2 + (z - z')^2} E(k) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

e

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + (z - z')^2}}, \quad \xi = \sqrt{(a + \rho)^2 + (z - z')^2} \quad (41)$$

b) Os integrais da alínea anterior não podem ser feitos analiticamente. No entanto são possíveis de calcular numericamente. Mostre que reproduz os resultados da Fig. 3 para  $a = 1$ ,  $L = 5$ ,  $J_S = 1$  (em unidades arbitrárias). Comente os resultados

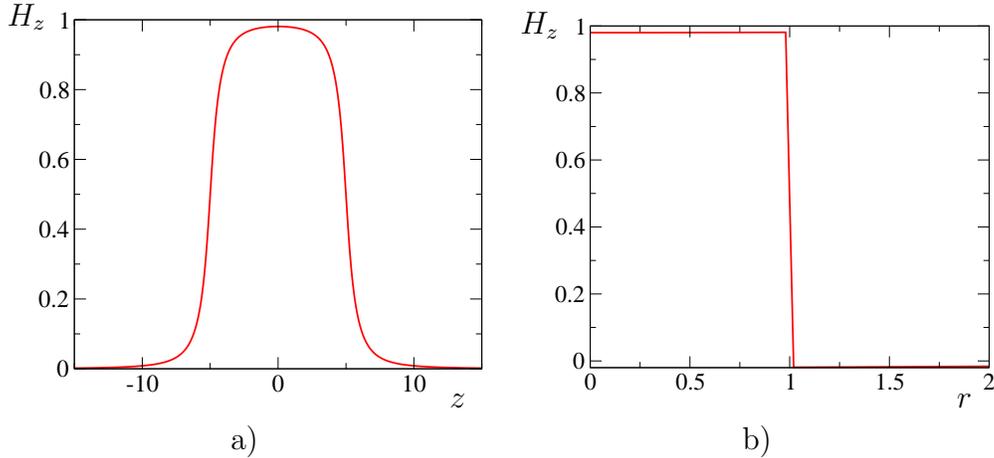


Figure 3: a)  $H_z$  em função de  $z$  para  $r = 0.5$ ; b)  $H_z$  em função de  $r$  para  $z = 0.5$ . Notar que a fronteira do solenóide se encontra em  $r = 1$  e  $z = \pm 5$ .

c) Faça o mesmo para a componente  $H_r$  e reproduza a Fig. 4. Notar as escalas diferentes. Comente os resultados.

d) Faça um programa para desenhar as linhas do campo  $\vec{H}$ .

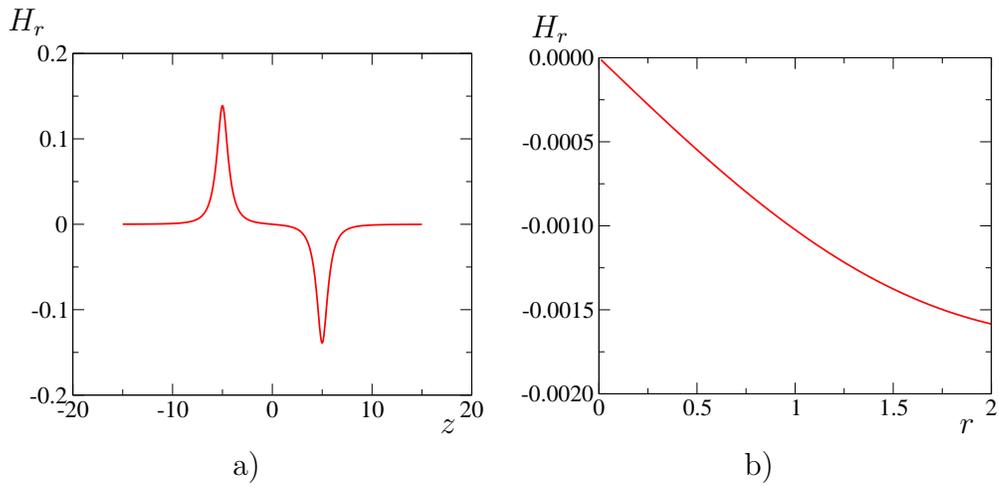


Figure 4: a)  $H_r$  em função de  $z$  para  $r = 0.5$ ; b)  $H_r$  em função de  $r$  para  $z = 0.5$ .

## VII

Considere agora que em vez do solenóide tem a situação descrita na Fig. 5. Nesta figura existem duas folhas de corrente perpendiculares ao plano  $xy$  e estendendo-se até ao infinito na direcção do eixo dos  $z$ . A corrente superficial é  $\vec{J}_S = \mp J_S \vec{e}_z$  em  $x = \pm d$ , respectivamente. Este problema destina-se a mostrar que, qualitativamente, esta situação é muito semelhante à do problema anterior (solenóide). Por outro lado os cálculos podem ser feitos analiticamente até ao fim.

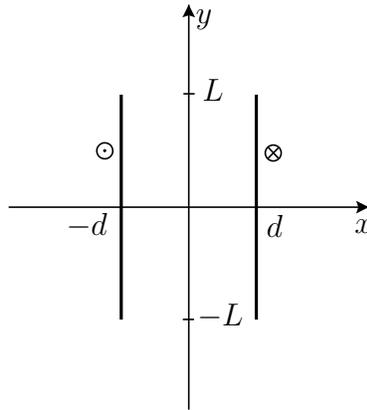


Figure 5: Folhas de corrente

a) Mostre que o potencial vector tem componente só segundo o eixo do  $z$  e que se pode escrever

$$A_z = \lim_{L_z \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{-L}^L dy' \int_{-L_z}^{L_z} dz' \left[ \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y-y')^2 + z'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-y')^2 + z'^2}} \right]$$

$$= \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{-L}^L dy' \left[ \ln \left( \frac{d^2 + y'^2}{(x+d)^2 + (y-y')^2} \right) - \ln \left( \frac{d^2 + y'^2}{(x-d)^2 + (y-y')^2} \right) \right] \quad (42)$$

b) Mostre que as componentes do campo magnético são dadas por

$$H_x = \frac{J_S}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{(d+x)^2 + (-L+y)^2}{(d+x)^2 + (L+y)^2} \right) - \ln \left( \frac{(d-x)^2 + (-L+y)^2}{(d-x)^2 + (L+y)^2} \right) \right] \quad (43)$$

e

$$H_y = \frac{J_S}{2\pi} \left[ -\tan^{-1} \left( \frac{y-L}{x+d} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{y+L}{x+d} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{y-L}{x-d} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{y+L}{x-d} \right) \right] \quad (44)$$

**Sugestão:** Em vez de fazer primeiro o integral da Eq. (42), faça as derivadas ( $B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$  e  $B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$ ) e o integral em  $z'$  depois.

c) Faça gráficos de  $H_x$  e  $H_y$  e mostre que reproduz o comportamento do problema VI.

d) Mostre que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ .

e) Mostre que  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$  fora das correntes, isto é, para  $x \neq \pm d$ . Obter a expressão correcta

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J_S \left[ \delta(x+d) - \delta(x-d) \right] \vec{e}_z \quad (45)$$

não é fácil a partir das equações anteriores devido à presença das funções  $\delta$ . No entanto é fácil de mostrar que o rotacional não é nulo através do cálculo da circulação de  $\vec{H}$ . Considere o contorno da Fig. 6.

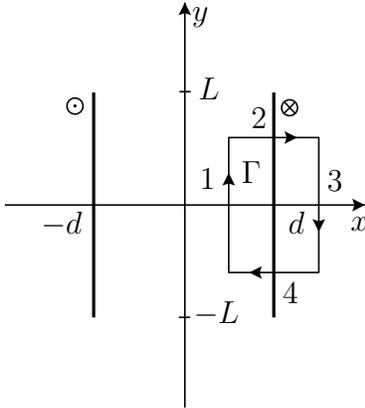


Figure 6: Contorno  $\Gamma$ .

Usando as expressões explícitas para  $H_x$  e  $H_y$ , mostre que

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = J_S l \quad (46)$$

onde  $l$  é a altura do rectângulo, em acordo com a Eq. (45) e aplicando o teorema de Stokes.

- f) Obtenha  $H_x$  e  $H_y$  no limite  $L \rightarrow \infty$  e mostre que  $H_x = 0$  e  $H_y = J_S$ .
- g) Desenhe as linhas de campo de  $\vec{H}$ .

## References

- [1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).
- [2] H. A. Wheeler, Proceedings of the I.R.E. , 412 (1942).