Equação de Laplace em Magnetostática

Embora a equação de Laplace desempenhe um papel central em electrostática, vamos mostrar que ela também é útil para resolver problemas em magnetostática. Como anteriormente apresentaremos os resultados na forma de problemas.

I

a) Nas regiões do espaço onde $\vec{J} = 0$ mostre que pode definir um potencial magnético **escalar** através de

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{M}} \tag{1}$$

b) Mostre que numa tal região, o potencial escalar Φ_{M} obedece à equação de Laplace, isto é

$$\nabla^2\Phi_{\mathrm{M}} = 0\ . \tag{2}$$

c) Utilizando as condições na fronteira adequadas, mostre que a solução numérica da Eq. (2) para a situação a duas dimensões indicada na Fig. 1

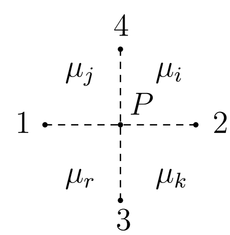

Figure 1: Potencial (aproximado) no ponto P como média de quatro pontos equidistantes em meios magnéticos.

é

$$\Phi_{\mathrm{M}}(P) = \frac{1}{W}\left(w_1\Phi_{\mathrm{M}1} + w_1\Phi_{\mathrm{M}2} + w_1\Phi_{\mathrm{M}3} + w_1\Phi_{\mathrm{M}4}\right) \tag{3}$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^{4} w_i \tag{4}$$

e os pesos w_i são definidos da forma seguinte:

$$\begin{cases} w_i = \mu_1 & \text{Se } i \text{ no meio com } \mu_1 \\ w_i = \mu_2 & \text{Se } i \text{ no meio com } \mu_2 \\ w_i = \dfrac{\mu_1+\mu_2}{2} & \text{Se } i \text{ na fronteira entre os dois meios} \end{cases} \tag{5}$$

II

Queremos agora calcular o campo $\vec{H}$ no interior dum solenóide infinito, com n espiras por unidade de comprimento percorrido com uma corrente estacionária I, conforme indicado na Fig. 2. a) Mostre que o campo $\vec{H}$ e o potencial $\Phi_{\rm M}$, são dados por

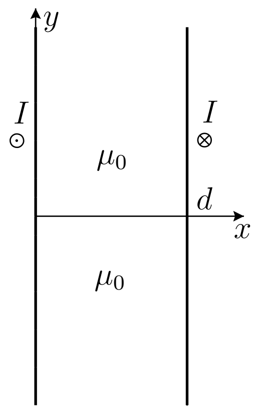

Figure 2: Bobina percorrida por corrente I no vazio

$$\vec{H} = nI\,\vec{e}_y, \quad \Phi_{\rm M} = -nI\,y\ . \tag{6}$$

b) Para resolver o problema numericamente tem que impor as condições na fronteira adequadas. Mostre que deverá ter

$$\Phi_{\rm M}(0,y) = -nI\,y \qquad \Phi_{\rm M}(d,y) = -nI\,y \tag{7}$$

$$\Phi_{\rm M}(x,-\tfrac{L}{2}) = -nI\,\tfrac{L}{2} \quad \Phi_{\rm M}(x,\frac{L}{2}) = -nI\,\frac{L}{2} \tag{8}$$

onde L é a altura da bobina.

c) Utilize os resultados do problema I e da alínea c) para resolver o problema numericamente. Reproduza a Fig. 3.

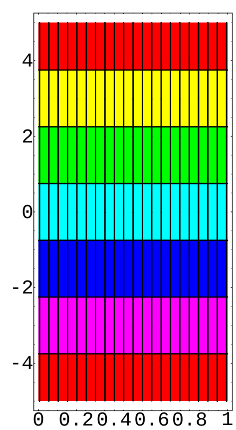

Figure 3: Equipotencias e linhas do campo $\vec{H}$ para uma bobina percorrida por corrente I no vazio.

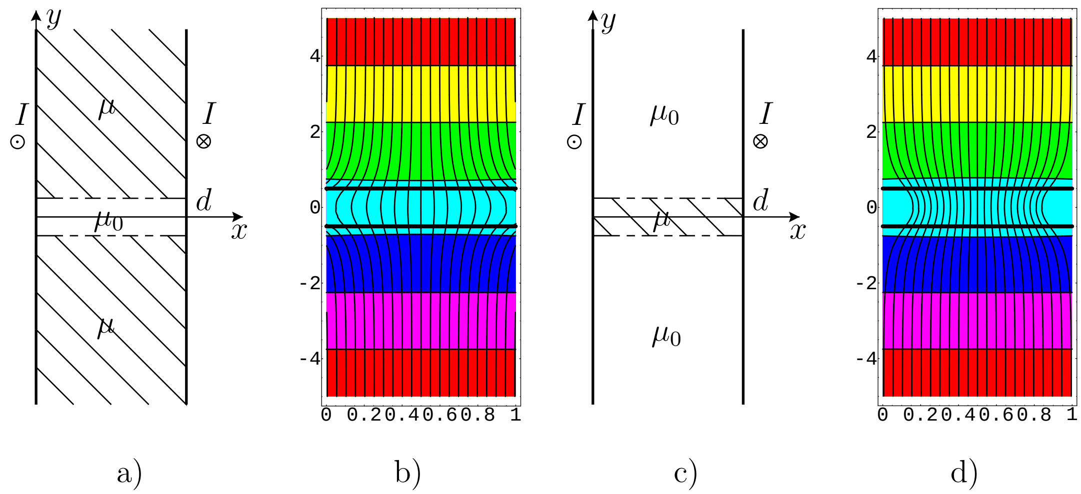

Figure 4: Bobinas com meios magnéticos.

d) Considere agora os casos indicados na Fig. 4 a) e c). Utilize os mesmos métodos para encontrar as equipotenciais de Φ_{M} e as linhas do campo $\vec{H}$. Verifique os resultados apresentados na Fig. 4 b) e d).