

Equação de Laplace com Dielétricos

Vamos estudar as soluções da equação de Laplace num condensador plano com dois dielétricos. Vamos ver que em casos mais complicados que os apresentados no livro de texto [1] no Exemplo 1.18 (página 55), as linhas de campo de \vec{E} deixam de ser perpendiculares aos dois condutores, mesmo admitindo condensadores infinitos. Para ver isto basta considerar situações só ligeiramente mais complicadas. As fronteiras entre os dois dielétricos que estamos a pensar são as apresentadas na Fig. 1:

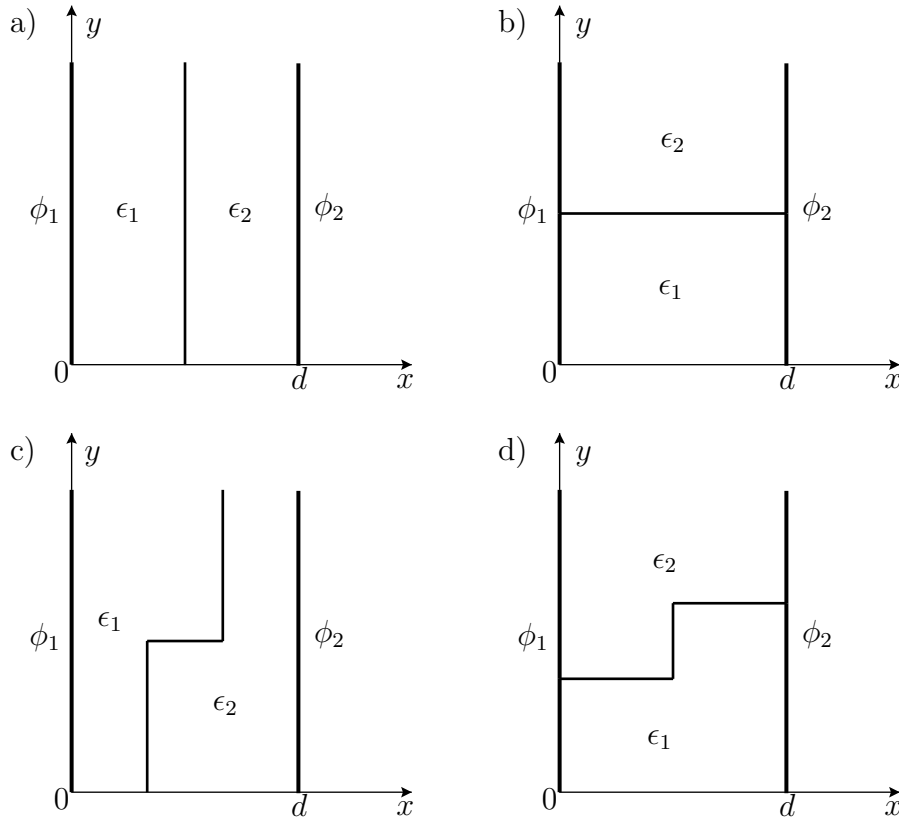


Figure 1: Tipos de Fronteira: a) Vertical, b) Horizontal, c) Escada Vertical, d) Escada Horizontal

As fronteiras a) e b) foram consideradas no Exemplo 1.18, conduzindo sempre a campos perpendiculares aos condutores. Vimos que a situação b) implicava que as cargas se iam redistribuir para que as condições na fronteira dos dielétricos fossem satisfeitas. No entanto os campos continuavam a ser perpendiculares aos condutores. O mesmo raciocínio aplicado aos casos c) e d) mostra que não é possível satisfazer as condições fronteira com campos perpendiculares aos condutores. Que fazer então para determinar a solução? A via analítica, embora possível, é complicada, pelo que vamos usar métodos numéricos que desenvolveremos na forma de problemas.

I

Na secção 1.6.5 e em particular no Exemplo 1.15 (página 44) discutiu-se a implementação da solução numérica da equação de Laplace em condutores no vazio. O resultado central, para problemas a duas dimensões, é dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (1)$$

onde o significado dos números está indicado na Fig. 2.

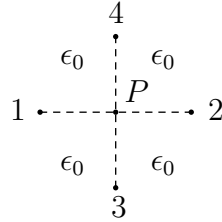


Figure 2: Potencial (aproximado) no ponto P como média de quatro pontos equidistantes no vazio.

Quando se introduzem dielétricos a situação pode complicar-se. Quando temos só um dielétrico a situação é como no vazio com a substituição $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. No entanto quando temos dois (ou mais) dielétricos com fronteiras entre eles o problema é mais complicado.

a) Considere a situação representada na Fig. 3, onde os eixos dos x e y estão definidos como na Fig. 1. Use $\epsilon_1 E_x(1) = \epsilon_2 E_x(2)$ e $E_y(3) = E_y(4)$ para mostrar que o potencial no

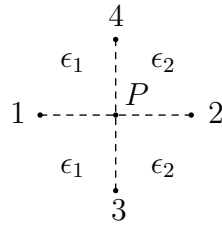


Figure 3: Potencial no ponto P na separação (vertical) entre dois dielétricos.

ponto P deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} \left(\frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_1 + \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \right) \quad (2)$$

b) Considere agora a situação representada na Fig. 4. Use agora $E_x(1) = E_x(2)$ e

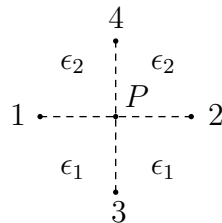


Figure 4: Potencial no ponto P na separação (horizontal) entre dois dielétricos.

$\epsilon_1 E_y(3) = \epsilon_2 E_y(4)$ para mostrar que o potencial no ponto P deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} \left(\phi_1 + \phi_2 + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_3 + \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_4 \right) \quad (3)$$

c) Considere agora a situação representada na Fig. 5. Mostre que o potencial no ponto P

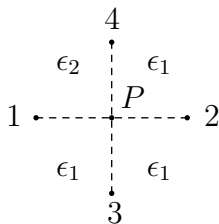


Figure 5: Potencial no ponto P na separação (horizontal) entre dois dielétricos.

deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{3\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \phi_1 + \epsilon_1 \phi_2 + \epsilon_1 \phi_3 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \phi_4 \right) \quad (4)$$

d) Use os resultados anteriores para mostrar que em geral o potencial no ponto P se pode escrever como

$$\phi_P = \frac{1}{W} (w_1 \phi_1 + w_2 \phi_2 + w_3 \phi_3 + w_4 \phi_4) \quad (5)$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^4 w_i \quad (6)$$

e os pesos w_i são definidos da forma seguinte:

$$\begin{cases} w_i = \epsilon_1 & \text{Se } i \text{ no meio com } \epsilon_1 \\ w_i = \epsilon_2 & \text{Se } i \text{ no meio com } \epsilon_2 \\ w_i = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} & \text{Se } i \text{ na fronteira entre os dois meios} \end{cases} \quad (7)$$

II

Estamos agora em posição de resolver numericamente os exemplos de fronteira vertical e horizontal apresentados no livro [1] no Exemplo 1.18 (página 55). Considere que $\phi_1 = 100$ V e $\phi_2 = 0$ V. Considere ainda $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$.

a) Para reproduzir as condições dum condensador infinito force $\phi(x, 0)$ e $\phi(x, 1)$ a tomar os valores que o potencial tomaria se o condensador fosse de facto infinito segundo o eixo dos y . Quais são esses valores?

b) Resolva numericamente a equação de Laplace para o caso da Fig. 1 a) (fronteira vertical) e mostre que as linhas de campo são de facto perpendiculares aos condutores, isto é paralelas ao eixo do x . Reproduza os resultados da Fig. 6.

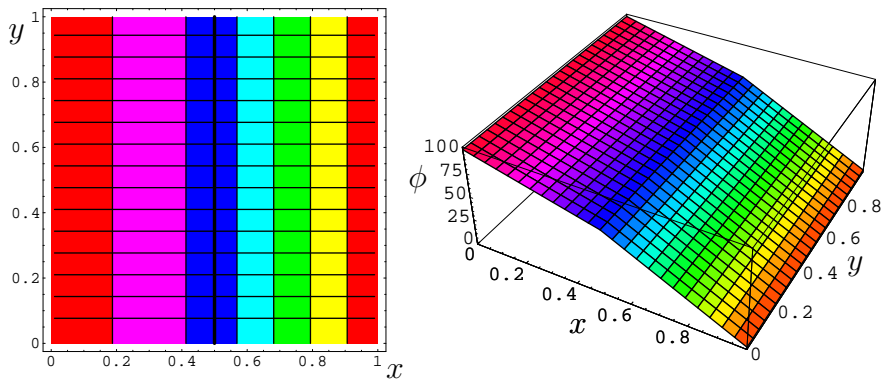


Figure 6: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

c) Mostre que a densidade de carga à superfície do condutor ao potencial ϕ_1 é uniforme. Para isso notar que

$$\sigma = -\epsilon_1 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (8)$$

Reproduza o gráfico da Fig. 7.

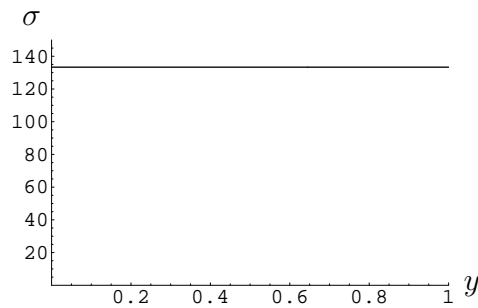


Figure 7: σ no condutor 1.

d) Considere agora a fronteira horizontal da Fig. 1 b). Repita as alíneas a) e b) mostrando que agora se obtém a situação da Fig. 8 e da Fig. 9.

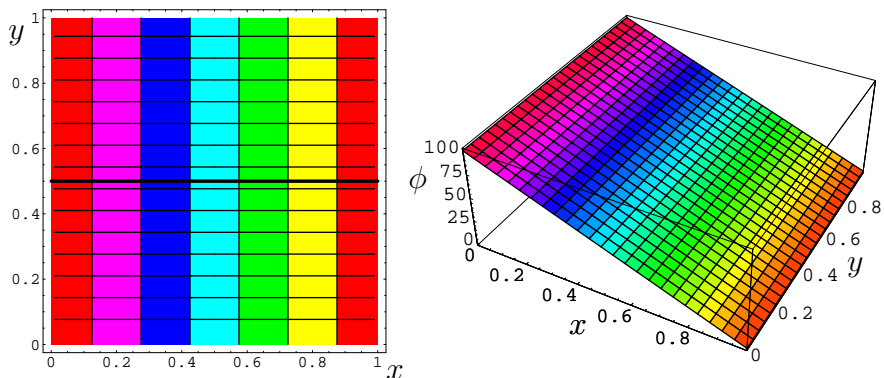


Figure 8: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

e) Considere agora um dielétrico com permitividade muito elevada, $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$, no caso da fronteira vertical (Fig. 1 a). Verifique que se aproxima dum condutor. Reproduza a Fig. 10.

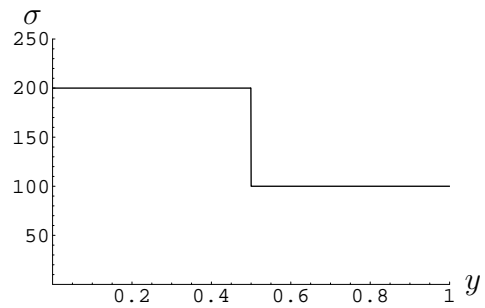


Figure 9: σ no condutor 1, para fronteira horizontal entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

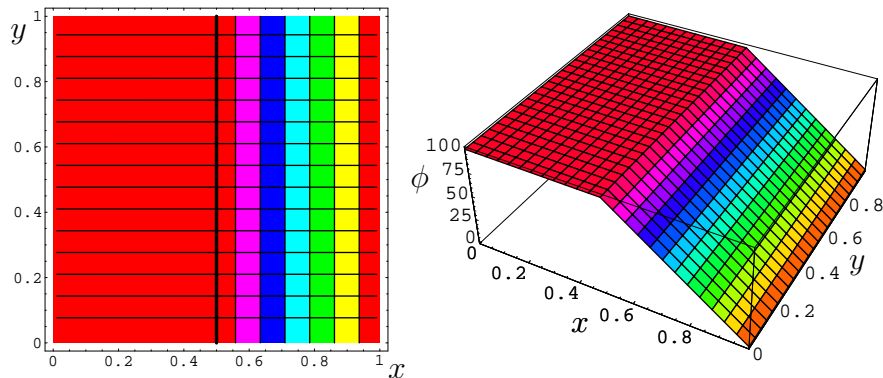


Figure 10: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

III

Vamos agora estudar agora a fronteira em escada vertical da Fig. 1 c).

a) Refaça as alíneas a) e b) do problema anterior para esta fronteira. Verifique que as linhas de campo já não são perpendiculares aos planos condutores. Mostre que se obtém a situação da Fig. 11.

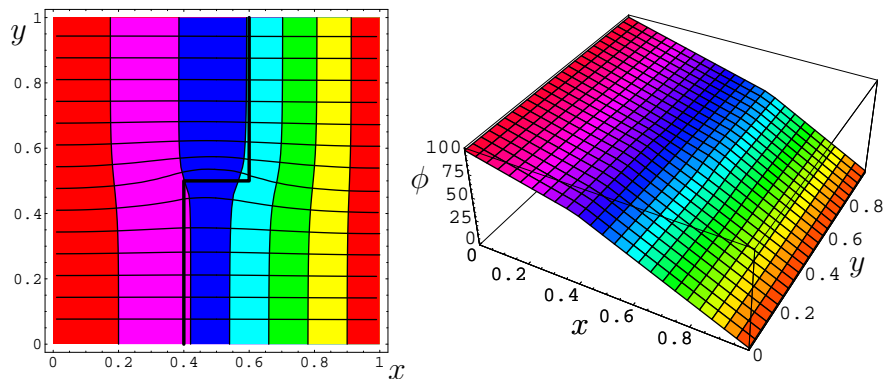


Figure 11: Fronteira em escada vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

b) Determine a densidade de carga superficial no condutor ao potencial ϕ_1 . Mostre que se obtém a situação da Fig. 12, indicando uma variação do campo ao longo do condutor.

c) Tome $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$ e compare com os resultados do problema anterior.

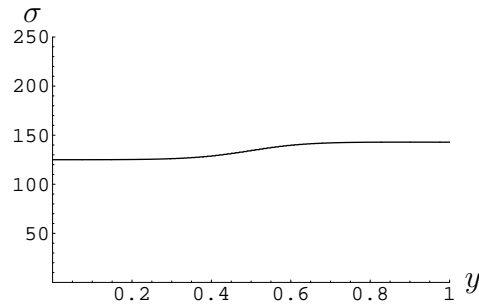


Figure 12: σ no condutor 1, para fronteira em escada vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

d) Calcule numericamente o campo \vec{E} ao longo da fronteira e verifique com que aproximação as condições na fronteira são satisfeitas. Veja em que medida o tamanho da grelha é importante.

IV

Vamos agora estudar agora a fronteira em escada horizontal da Fig. 1 d).

a) Refaça as alíneas a) e b) do problema II para esta fronteira. Verifique que as linhas de campo já não são perpendiculares aos planos condutores. Mostre que se obtém a situação da Fig. 13. b) Determine a densidade de carga superficial no condutor ao potencial ϕ_1 .

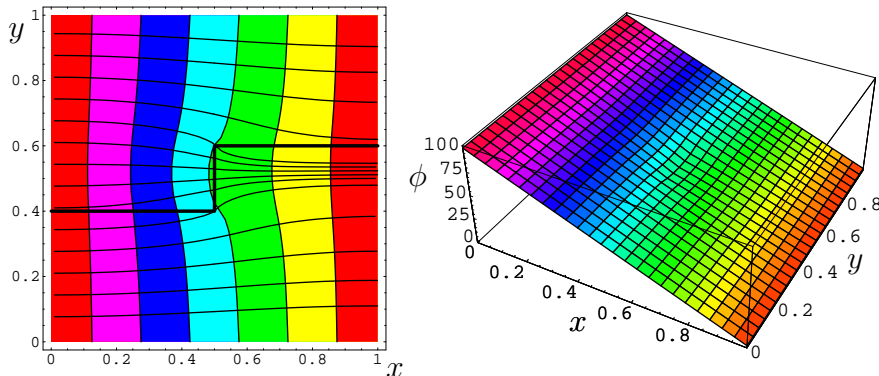


Figure 13: Fronteira em escada horizontal entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

Mostre que se obtém a situação da Fig. 14, o que mostra que as densidades deixaram de

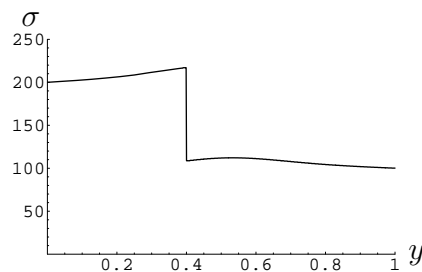


Figure 14: σ no condutor 1, para fronteira em escada horizontal com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

ser constantes ao longo do condutor em cada lado da fronteira em $x = 0$.

c) Tome $\epsilon_1 = 100 \epsilon_0$ e compare com os resultados do problema anterior.

V

Estamos agora em posição de estudar fronteiras mais complicadas, tais como a da Fig. 15.

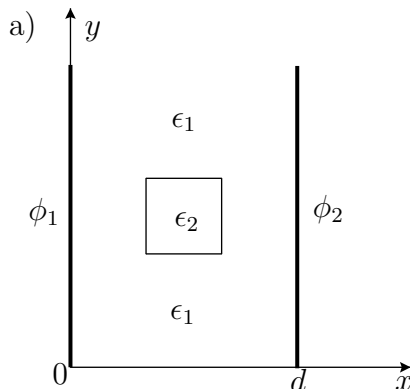


Figure 15: Novo tipo de fronteira.

a) Utilize os métodos dos problemas anteriores para resolver este problema. Experimente para vários valores de ϵ_i e para várias dimensões do domínio. Reproduza os resultados da Fig. 16.

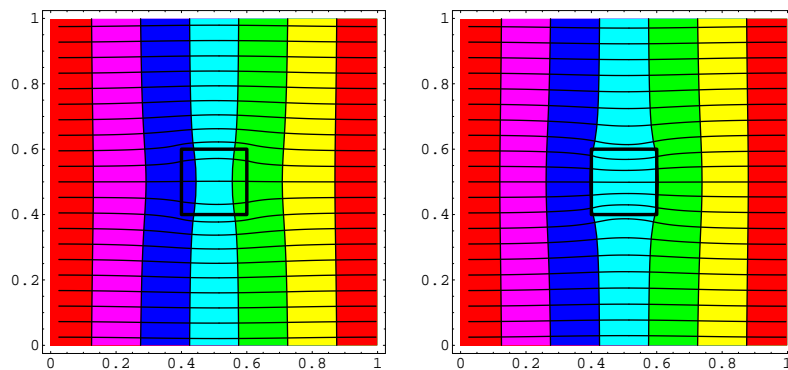


Figure 16: a) $\epsilon_1 = 2 \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$, b) $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2 \epsilon_0$.

b) Verifique as condições na fronteira.

c) Estude o caso de $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$. Que conclui?

d) Estude outros casos de fronteiras. Em particular estude o caso em que a fronteira é uma circunferência. Verifique que obtém os resultados da Fig. 17. Compare com a discussão do Exemplo 1.19 da página 57. Verifique que o campo é uniforme no interior do círculo.

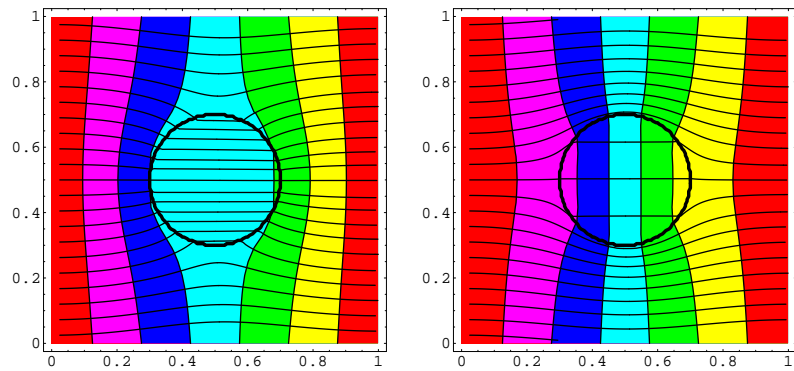


Figure 17: a) $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 5 \epsilon_0$, b) $\epsilon_1 = 5 \epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

References

- [1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).