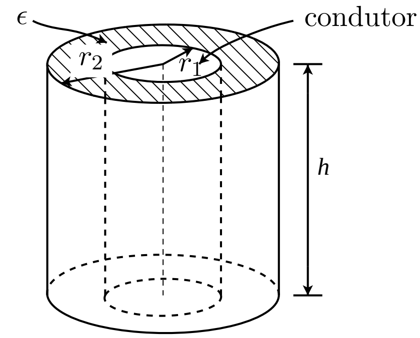
Exame de Electromagnetismo e Óptica

Cursos de Eng. Física Tecnológica e Eng. Aeropespacial

1ª Época – 22/6/2006

I (1.5+1+1+1=4.5 valores)



Considere um **condutor cilíndrico infinito** de raio r_1. Envolvendo o condutor, entre os raios r_1 e r_2, existe um dieléctrico linear, homógeneo e isótropo de permitividade ϵ, conforme indicado na figura. O condutor está carregado com densidade de carga uniforme $\lambda > 0$. Na figura encontra-se representada (para efeitos de visualização) uma secção de altura h deste **conjunto de altura infinita**.

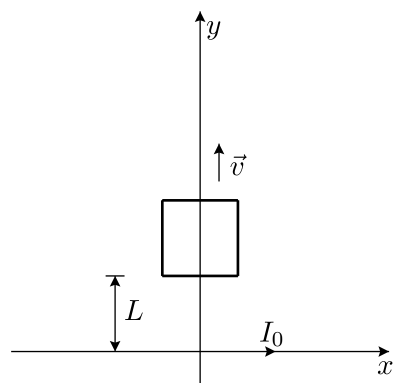
a) Determine o campo $\vec{E}$ em todos os pontos do espaço entre $0 < r < \infty$, onde r é a distância ao eixo.

b) Considere que o condutor está ao potencial zero. Determine o potencial electrostático em todos os pontos do espaço entre $0 < r < \infty$.

c) Determine as densidades de carga livre σ_1 na superfície ($r = r_1$) do condutor e a densidade de carga de polarização σ_1' na superfícies interior ($r = r_1$) do dieléctrico. Verifique a discontinuidade da componente normal de $\vec{D}$ na superfície $r = r_1$.

d) Faça um gráfico aproximado da variação de $|\vec{E}|$ e ϕ com r para $0 < r < \infty$.

II (1+1+1+1+0.5=4.5 valores)



Considere um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I_0 assente no eixo do x do referencial indicado na figura. No plano xy desloca-se uma espira quadrada de lado L com velocidade **constante** $\vec{v}$ segundo $\vec{e}_y$. No instante $t = 0$ a espira encontra-se na posição indicada na figura.

a) Calcule o campo $\vec{B}$ no semiplano $y > 0$ onde a espira se move, indicando a sua direcção e sentido.

b) Calcule o fluxo que atravessa a espira no instante t.

c) Sabendo que a espira tem uma resistência R determine a corrente induzida na espira e explicite o seu sentido.

d) Determine a resultante da força de Laplace que actua na espira. Qual a sua direcção e sentido? Este resultado seria afectado se a corrente I_0 invertesse o sentido?

e) Mostre que o trabalho por unidade de tempo ($dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$) que é necessário fornecer à espira para que a sua **velocidade se mantenha constante** é dissipado por efeito de Joule ($P_{\text{Joule}} = RI^2$).

III (1+1+1+0.5+1=4.5 valores)

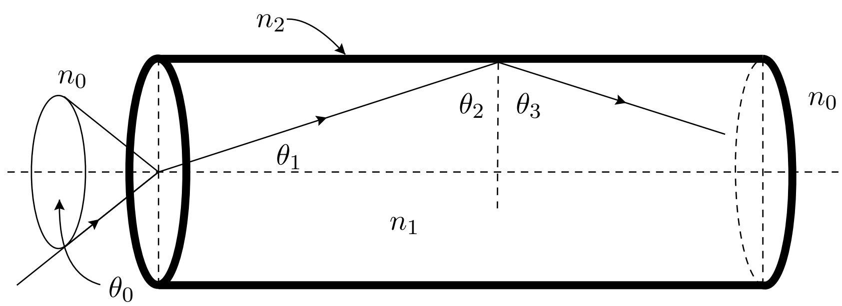
Uma onda plana electromagnética propaga-se num meio não condutor e não magnético ($\sigma = 0$, $\mu_r = 1$, $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$). Sabe-se que a frequência é $f = 1$ MHz, o índice de refracção do meio é $n = 2$ e $E_0 = 10^{-3}$ V/m. O campo $\vec{E}$ é dado por:

$$
\begin{cases}
E_x &= c_0 E_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha\, y + \beta\, z)\right] \\
E_y &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha\, y + \beta\, z)\right] \\
E_z &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\,(\alpha\, y + \beta\, z)\right]
\end{cases}
$$

a) Sabendo que $|\vec{k}|$ é o módulo do vector de onda, determine $\alpha > 0$ e β para que este campo $\vec{E}$ descreva de facto uma onda plana electromagnética.
b) Qual a direcção de propagação? Se não determinou α e β exprima o resultado en função destas constantes.
c) Qual a polarização da onda para $c_0 = 0$? Para outros valores de c_0 que tipos de polarização podemos ter? Justifique a resposta.
d) Determine o campo $\vec{H}$ da onda para $c_0 = 0$.
e) Qual o valor médio do vector de Poynting nas condições da alínea d).

IV (1.5+1+1+1=4.5 valores)

Uma fibra óptica é constituída por um núcleo central de índice n_1 revestida por um outro material (*cladding*) de índice $n_2 < n_1$, conforme indicado na figura onde se representa um troço de fibra cilíndrica.



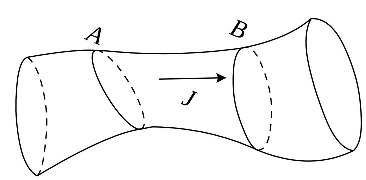
a) Designa-se por *cone de aceitância* (ver figura) duma fibra óptica, o cone de abertura $\theta_0^{\max}$, com eixo coincidente com o da fibra, tal que toda a luz incidente com ângulos $\theta_0 < \theta_0^{max}$ permanece dentro da fibra sendo, portanto, guiada para a outra extremidade. Determine $\theta_0^{\max}$ em função de n_0 (o meio exterior), n_1 (a fibra propriamente dita) e n_2 (o revestimento).
b) Determine $\theta_0^{\max}$ para a fibra com $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1.4$ imersa no vazio, isto é, $n_0 = 1$. Considere agora que mergulha a fibra em água ($n_0 = 1.33$) e faz incidir luz com $\theta_0 = \theta_0^{\max}(vazio)$. Que acontece? Justifique. Mesmo que não tenha resolvido a alínea a) pode responder qualitativamente.
c) Para poder dar uma característica da fibra óptica independente do meio exterior define-se a *Abertura Numérica* (AN) por

$$AN = n_0 \sin \theta_0^{max}$$

Determine AN e confirme que só depende de n_1 e n_2.
d) Considere luz polarizada linearmente, com polarização perpendicular ao plano de incidência, incidindo com $\theta_0 = 30°$ na situação em que $n_0 = 1$, $n_1 = 1.5$ e $n_2 = 1.4$. Calcule a percentagem de energia transmitida através da fibra óptica. Considere que a fibra não tem perdas e que, estando nas condições de transmissão, as únicas perdas são na entrada e saída da fibra.

V (2 valores)

Partindo da equação da continuidade em regime estacionário ($\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$), mostre que a **intensidade** da corrente que passa em duas secções arbitrárias A e B dum condutor é sempre a mesma independentemente da forma da secção, isto é $I_A = I_B$.



Constantes e Fórmulas

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \; ; \; \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{F/m} \; ; \; \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H/m} \; ; \; Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.8\Omega$$

$$R_\parallel = \frac{\tan^2(i-r)}{\tan^2(i+r)}, \qquad R_\perp = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)},$$