Exame de Electromagnetismo e Óptica
Cursos de Química, Eng. Química e Eng. Biológica -14/2/2004

I (4.5 valores)

Suponha que o espaço compreendido entre os planos $z = -d$ e $z = +d$ se encontra uniformemente electrizado em volume com densidade ρ_1.

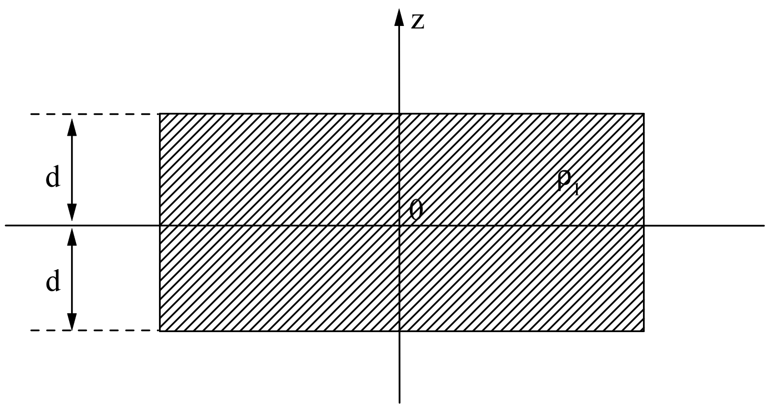
a) Indique, justificando, como são as linhas do campo electrostático $\vec{E}$ em todos os pontos do espaço.

b) Determine o campo $\vec{E}$ em todos os pontos do espaço.

c) Calcule o potencial em todos os pontos do espaço, supondo $\phi(z = 0) = 0$. Desenhe os gráficos de $\vec{E}$ e $\phi(z)$ em função de z.

d) Calcule o trabalho necessário para transportar uma carga Q de $z = -2d$ até $z = 2d$.

e) Verifique a equação de Poisson (equação para a divergência de $\vec{E}$).



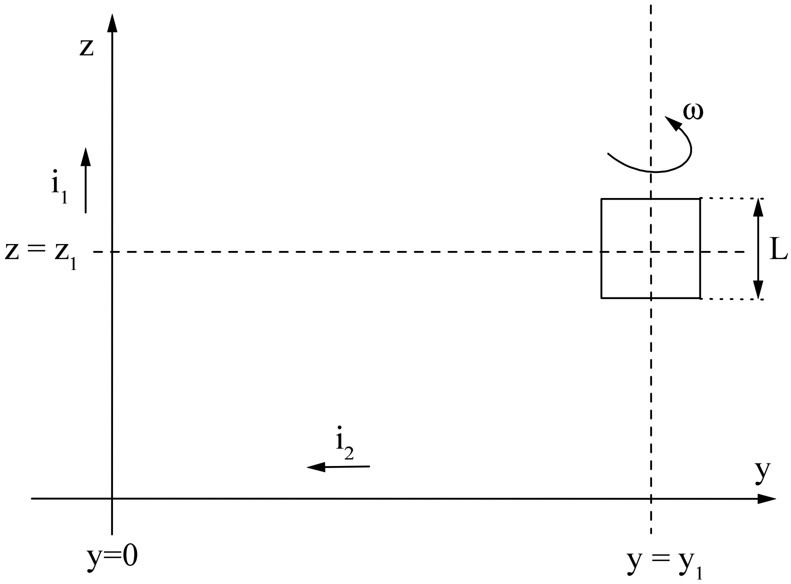
II (4 valores)

Considere dois fios infinitos, coincidentes com os eixos dos zz e dos yy, percorridos por correntes estacionárias i_1 e i_2 como indicado na figura. Suponha que no plano zOy se encontra uma espira quadrada de resistência R e lado L, com centro em (y_1, z_1), send $y_1, z_1 \gg L$. Determine.

a) O campo magnético $\vec{B}(y, z)$ para um ponto genérico do plano yOz.

b) O coeficiente de indução mútua entre cada um dos fios e a espira quadrada.

c) A corrente induzida na espira, supondo que esta roda com velocidade angular ω constante em torno do eixo $y = y_1$.



III (4.5 valores)

Considere uma onda plana monocromática com frequência $f = 10^9$ Hz e comprimento de onda $\lambda = 15\ cm$. O campo $\vec{E}$ da onda é dado por

$$\begin{cases} E_x &= E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right] \\ E_y &= -\sqrt{3}E_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right] \\ E_z &= 0 \end{cases}$$

com $E_0 = 10^{-3}\ V/m$. Determine:

a) A direcção de propagação da onda.

b) Índice de refracção do meio.

c) A polarização da onda.

d) O campo magnético da onda.

e) O valor médio do vector de Poynting.

IV (5 valores)

Seja um electrão no poço de potencial $V = 0$ para $0 < x < a$ e $V = \infty$ para $x < 0$ e $x > a$.

Como sabe, as funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são:

$$\chi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad , \qquad E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ n^2\ .$$

Considere que o electrão se encontra no estado

$$\psi_a(x,0) = A\chi_2(x)$$

a) Para o estado ψ_a determine A e o valor médio da energia $\langle E\rangle$.

b) Determine o $\langle x\rangle$ para o estado ψ_a.

c) Considere agora o estado

$$\psi_b(x,0) = B\,\chi_1(x) + C\,\chi_2(x) + B\,\chi_3(x)$$

Sabe-se que uma medida da energia do sistema neste estado dá E_2 com probabilidade 1/2. Determine B e C (reais e positivos).

d) Seja agora o estado

$$\psi_c(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_1(x) + D\,\chi_2(x)$$

Determine a constante real D sabendo que a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $[0, a/2]$ é menor que a de a encontrar no intervalo $[a/2, a]$.

V (2 valores)

Considere um estado do poço de potencial, $\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\chi_n(x)$, onde $\chi_n(x)$ são as funções próprias ortonormadas do operador Hamiltoneano (Energia). Mostre que se tem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = 1\ .$$

Formulário e Constantes

$$\int \sin^2(y)\ dy = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y)$$

$$\int \sin(ny)\sin(my)\ dy = \frac{1}{2(m-n)}\ \sin[y(m-n)] - \frac{1}{2(m+n)}\ \sin[y(m+n)] \quad ; \quad m \neq n$$

$$\int y\sin^2(y)\ dy = \frac{y^2}{4} - \frac{\cos(2\,y)}{8} - \frac{y\,\sin(2\,y)}{4}$$

$$c = 3\times10^8\ \text{m/s}\ ;\ \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\text{F/m}\ ;\ \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\text{H/m}\ ;\ Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.8\Omega$$