Exame de Electromagnetismo e Óptica
Curso de Eng. Biológica -29/1/2004

I (4.5 valores)

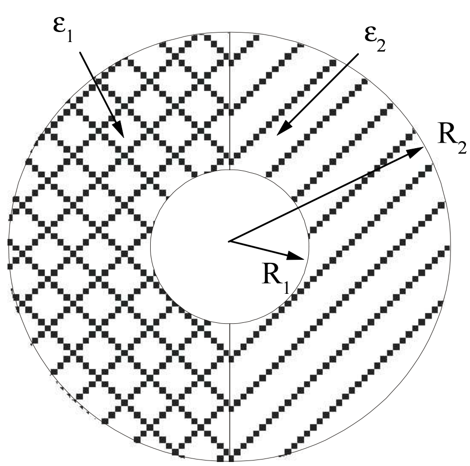
Considere o condensador esférico representado na figura. O espaço entre as armaduras encontra-se preenchido por dois materiais dieléctricos, de constantes ε_1 e ε_2. O condutor interior está carregado com carga total Q.

a) Mostre que os campos electrostáticos são iguais nos dois meios, $\vec{E}_1(r) = \vec{E}_2(r)$.

b) Calcule os campos $\vec{D}$, $\vec{E}$ e $\vec{P}$ no interior do condensador.

c) Determine as cargas de polarização em cada dieléctrico, junto à superfície de raio R_1.

d) Calcule a capacidade do condensador.



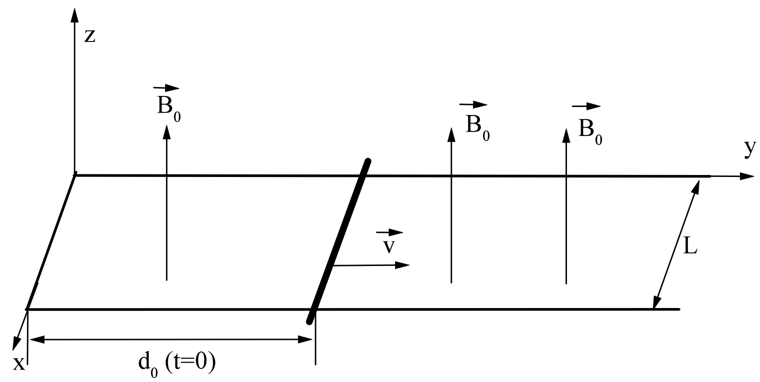
II (4 valores)

Considere uma barra condutora que se desloca com velocidade $\vec{v}$ sobre dois carris condutores unidos numa das extremidades por um troço também condutor (ver figura). A resistência da barra é R e a das restantes partes do circuito é negligenciável. Perpendicularmente ao circuito existe um campo magnético $\vec{B}$ variável no espaço de acordo com a expressão $\vec{B} = (B_0 + c_1 y)\vec{u}_z$. Considere que no instante $t = 0$ a barra condutora se encontra à distância d_0 da origem do eixo dos yy.

a) Com base na lei de Faraday, justifique se no caso $c_1 = 0$ há ou não corrente induzida no circuito.

b) Calcule a corrente induzida na espira para o caso geral $c_1 \neq 0$, indicando graficamente o seu sentido.

c) Determine a força de Laplace que actua na barra condutora.



III (4.5 valores)

Uma onda plana monocromática propaga-se num meio não magnético ($\mu \simeq \mu_0$). Sabe-se a expressão do campo $\vec{H}$:

$$\begin{cases} H_x &= H_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right] \\ H_y &= \alpha H_0 \sin\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right] \\ H_z &= \beta H_0 \cos\left[\omega t - |\vec{k}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)\right] \end{cases}$$

onde $\omega = 10^6\ rad/s$, $|\vec{k}| = 5 \times 10^{-3}\ m^{-1}$

a) Determine o índice de refração do meio onde a onda se propaga.

b) Determine a direcção de propagação.

c) Determine β para que a expressão descreva uma onda plana electromagnética.

d) Determine α para que a onda descreva uma polarização circular direita.

e) Determine o valor de H_0 sabendo que o valor médio do vector de Poynting é $\left\langle|\vec{S}|\right\rangle = 10^{-3}\ W/m^2$. Se não determinou α e β apresente o resultado em função destes parâmetros.

IV (5 valores)

Seja um electrão no poço de potencial **simétrico**, isto é, $V = 0$ para $-a < x < a$ e $V = \infty$ para $x < -a$ e $x > a$. Como sabe, as funções próprias do operador hamiltoneano H (i.e. da energia) são ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\chi_n^-(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\ \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \qquad E_n^- = E_0\ n^2$$

$$\chi_n^+(x) = \sqrt{\frac{1}{a}}\ \cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}x\right] \qquad E_n^+ = E_0\ \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\ .$$

Considere o estado

$$\psi(x,0) = A\ \chi_1^+(x) + B\ \chi_2^-(x)$$

a) Qual a probabilidade de encontrar o sistema no estado $\chi_1^-(x)$? Justifique.

b) Determine as constantes A e B (reais e positivas), sabendo que o valor médio da Energia no estado ψ é $\langle E\rangle = E_0$.

c) No instante $t = 0$ diga se é mais provável encontrar a partícula no intervalo $[-a, 0]$ ou $[0, a]$? Justifique a resposta.

d) Encontre uma expressão para $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Mostre que oscila no tempo. Com que frequência?

V (2 valores)

Para uma onda electromagnética propagando-se num meio linear, homogéneo e isótropo, encontre a relação entre o vector de Poynting $\vec{S}$ e a densidade de energia electromagnética.

Formulário e Constantes

$$\int \sin^2(y)\ dy = \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\ \sin(2y)$$

$$\int \cos^2(y)\ dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}\ \sin(2y)$$

$$\int \sin(2y)\cos\left(\frac{y}{2}\right)\ dy = -\frac{1}{3}\ \cos\left(\frac{3y}{2}\right) - \frac{1}{5}\ \cos\left(\frac{5y}{2}\right)$$

$$c = 3\times10^8\ \text{m/s}\ ;\ \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\text{F/m}\ ;\ \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\text{H/m}\ ;\ Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.8\Omega$$