Para onde vai a energia?

J. C. Romão,* J. Dias de Deus,† and P. Brogueira‡
Departamento de Física, Instituto Superior Técnico
Avenida Rovisco Pais 1, 1049-001 Lisboa, Portugal

I. INTRODUÇÃO

Um problema interessante em electrostática é o seguinte (ver Problemas 1.22 e 1.37 na Ref.[1])

Dois condensadores de capacidades C_1 e C_2, um carregado, outro não, são ligados em paralelo.

1) Mostre que no equilíbrio se verificam as seguintes relações:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad \frac{Q_2}{Q} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} ,$$

onde Q é a carga inicial do condensador carregado e Q_1 e Q_2 as cargas finais de cada um deles.

2) Mostre que a energia final armazenada no sistema é menor que a energia inicial e deduza uma expressão para a diferença entre as duas energias em termos de Q e de C_1 e C_2. Considere que o fio que liga os dois condensadores tem resistência R. Mostre que a diferença de energia é exactamente igual à energia dissipada por efeito de Joule, isto é,

$$U_{\rm J} = \int_0^\infty R I^2(t)\, dt .$$

3) Que acontece no caso em que R tende para zero?

A resposta à primeira questão é trivial. A segunda, embora faça sentido fisicamente por dever haver conservação de energia, já não é tão trivial. Em particular, a diferença de energias entre o estado inicial e final só depende das capacidades C_1 e C_2. Como pode então ser dissipada por efeito de Joule que depende da resistência? A terceira, embora académica por haver sempre alguma resistência nos fios, é muito interessante e não trivial. Para sermos capazes de responder à última pergunta não podemos desprezar a auto indutância L do circuito. Assim somos levados à análise dum circuito RLC em regime transitório.

II. O CIRCUITO RLC EM REGIME TRANSITÓRIO

Consideremos o circuito RLC da Fig. 1 com a condição inicial de termos uma carga Q_0 no condensador C_1 em $t = 0$. Vamos determinar a carga nos condensadores e a corrente no circuito em função do tempo.

*Electronic address: `jorge.romao@ist.utl.pt`
†Electronic address: `jdd@fisica.ist.utl.pt`
‡Electronic address: `pedro@fisica.ist.utl.pt`

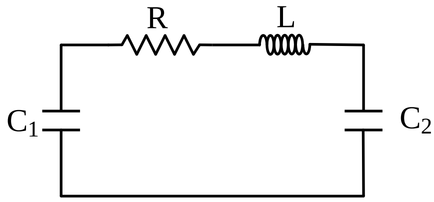

FIG. 1: Circuito RLC

A equação diferencial do circuito pode-se escrever em termos da carga $Q(t)$ no condensador C_2 na forma seguinte

$$\frac{Q_0}{C_1} = R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}, \tag{1}$$

onde C é a capacidade do conjunto dos dois condensadores, isto é

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{2}$$

A solução geral da Eq. (1) será a soma duma solução particular da equação ($Q = C/C_1 Q_0$) com a solução da equação homogénea,

$$R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \tag{3}$$

A solução da equação homogénea é da forma $e^{\alpha t}$. Substituindo na Eq. (3) obtemos a equação característica

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \tag{4}$$

com soluções

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \tag{5}$$

Vemos assim que a característica das soluções depende do sinal do discriminante

$$\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \tag{6}$$

O discriminante é nulo para um valor crítico da resistência dada por

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{7}$$

Vamos estudar separadamente as várias situações.

A. $R > R_c$

Neste caso ambas as raízes são reais e negativas. A solução geral da equação é então

$$Q(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\left(1 + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2}\right) \tag{8}$$

com

$$\tau_1 = \frac{2L}{R}\frac{1}{1+\sqrt{1-\left(\frac{R_c}{R}\right)^2}}, \quad \tau_2 = \frac{2L}{R}\frac{1}{1-\sqrt{1-\left(\frac{R_c}{R}\right)^2}} \tag{9}$$

É fácil de ver que as soluções com as condições na fronteira do problema, $Q(0) = 0$ e $i(0) = 0$ são,

$$Q(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\left[1 - e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)\right] \tag{10}$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\left[\frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\left(\frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2} - \frac{1}{\tau_1}e^{-t/\tau_1}\right)\right] \tag{11}$$

Para referência futura notemos que

$$\tau_1 + \tau_2 = RC \tag{12}$$

B. $R = R_c$

Neste caso temos uma raiz dupla

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{2L}{R} = \frac{1}{2}RC \tag{13}$$

onde se usou o facto que $R = R_c$. A solução geral da Eq. (1) é agora

$$Q(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right] \tag{14}$$

o que dá para a corrente,

$$I(t) = \frac{C}{C_1}\,Q_0\,\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau} \tag{15}$$

C. $R < R_c$

Este é o caso mais interessante e vai conduzir a oscilações pois as raízes são complexas. Para fixar notação escrevemos

$$\alpha = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega \tag{16}$$

onde

$$\tau = \frac{2L}{R}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{17}$$

As soluções gerais são agora,

$$Q(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\left[1 - \left(\cos\omega t + \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega t\right)e^{-t/\tau}\right] \tag{18}$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1}Q_0\frac{1+\omega^2\tau^2}{\omega\tau^2}\sin\omega t\; e^{-t/\tau} \tag{19}$$

III. ANÁLISE DA ENERGIA

A questão que motivou este estudo era saber qual a diferença entre a energia inicial com o condensador C_1 com carga Q_0 e a situação final com os dois condutores atingindo o equilíbrio electrostático. Excluindo o caso $R = 0$, ao qual voltaremos mais à frente, em todos os outros casos obtemos,

$$\lim_{t\to\infty} Q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 = \frac{C_2}{C1 + C_2} Q_0, \quad \lim_{t\to\infty} Q_1 = Q_0 - \frac{C}{C_1} Q_0 = \frac{C_1}{C1 + C_2} Q_0 \tag{20}$$

Portanto

$$W_i = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1}, \quad W_f = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} \tag{21}$$

e

$$W_i - W_f = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} > 0 \tag{22}$$

A questão era saber para onde ia esta diferença de energia. Vamos mostrar que em todos os casos em que $R > 0$ esta diferença corresponde exactamente à energia dissipada por efeito de Joule, independentemente do valor de R e do tipo de solução, amortecida, ou periódica amortecida.

A. $R > R_c$

Para mostrarmos o que acima dissemos basta calcular

$$W_{Joule} = \int_0^\infty R I^2(t) dt \tag{23}$$

Para vermos como a resistência R desaparece das contas vamos fazer este caso em detalhe (os outros serão semelhantes). Usando a Eq. (11) obtemos facilmente

$$\begin{aligned} W_{Joule} &= R\frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \right) \right]^2 dt \\ &= R\frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{\tau_1^2} e^{-2t/\tau_1} \right. \\ &\qquad + 2\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} - \frac{2}{\tau_1 \tau_2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 e^{-t(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \\ &\qquad \left. - \frac{2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \right] dt \end{aligned} \tag{24}$$

Agora usando

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \tag{25}$$

obtemos

$$\begin{aligned} W_{Joule} &= R\frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \left[\frac{1}{2\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{2\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{2\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{\tau_2} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 - \frac{2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \right] \\ &= \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \frac{1}{2} \frac{R}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} = W_i - W_f \end{aligned} \tag{26}$$

onde se usou a Eq. (2) e a Eq. (12).

B. $R = R_c$

Agora obtemos

$$W_{Joule} = \frac{C^2}{C_1^2}\, Q_0^2\, \frac{1}{4}\, \frac{R}{\tau} = \frac{1}{2}\, Q_0^2\, \frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)} = W_i - W_f \tag{27}$$

onde se usou a a Eq. (2) e a Eq. (13).

C. $R < R_c$

Neste caso o integral é ligeiramente mais complicado mas o resultado é o mesmo,

$$W_{Joule} = \frac{C^2}{C_1^2}\, Q_0^2\, R\, \frac{1}{4}\, \frac{\omega^2\tau^2+1}{\tau} = \frac{1}{2}\, Q_0^2\, \frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)} = W_i - W_f \tag{28}$$

onde se usou a Eq. (17) para obter

$$R\, \frac{1}{4}\, \frac{\omega^2\tau^2+1}{\tau} = \frac{1}{2C} \tag{29}$$

IV. QUE ACONTECE QUANDO $R = 0$?

Este é o caso mais interessante. Se usarmos as expressões na Eq. (17) obtemos

$$\lim_{R\to 0} \tau = \infty \tag{30}$$

e portanto

$$\lim_{R\to 0} e^{-t/\tau} = 1 \tag{31}$$

isto é, neste limite a atenuação desaparece. As soluções são então

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0\, (1 - \cos\omega t) \tag{32}$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \omega \sin\omega t \tag{33}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{34}$$

O sistema vai oscilar, nunca atingindo o estado de equilíbrio electrostático (e portanto não violando o teorema de Thomson). É fácil calcular as várias parcelas da energia nas várias componentes do circuito (neste limite não há resistência). Obtemos

$$W_{C_1} = \frac{1}{2} Q_0^2\, \frac{1}{C_1}\, \frac{(C_1 + C_2\cos\omega t)^2}{(C_1+C_2)^2} \tag{35}$$

$$W_{C_2} = \frac{1}{2} Q_0^2\, \frac{C_2}{(C_1+C_2)^2}\, (1-\cos\omega t)^2 \tag{36}$$

$$W_L = \frac{1}{2} Q_0^2\, \frac{1}{C_1}\, \frac{C_2}{C_1+C_2}\, \sin^2\omega t \tag{37}$$

Podemos então mostrar que a energia é conservada, pois

$$W_{C_1} + W_{C_2} + W_L = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1} = W_i \tag{38}$$

V. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Vamos agora ver para valores típicos dos parâmetros dos circuitos o que vai acontecer. Para isso tomemos dois condensadores com $C_1 = C_2 = 2\,\mu$F. Temos então

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1\,\mu\text{F} \tag{39}$$

Temos agora que estimar R e L. Para isso admitimos que o circuito tem a forma da Figura e que as ligações

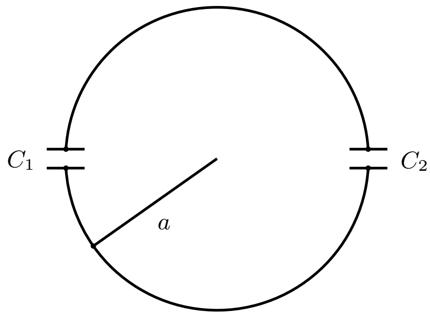

FIG. 2: Circuito RLC

são feitas com fio de cobre com condutividade $\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^7\,$S/m, secção com raio $b = 2.5 \times 10^{-4} m$ e o circuito forma uma circunferência de perímetro $l = 0.3\,$m. Então

$$a = 4.77 \times 10^{-2}\,\text{m}, \quad R = 25.5 \times 10^{-3}\,\Omega, \quad L = 32\,\mu\text{H} \tag{40}$$

Como $R < R_c = 2\sqrt{L/C} = 11.3\,\Omega$, o circuito vai entrar em regime oscilatório amortecido. No entanto a constante de tempo de amortecimento é muito pequena

$$\tau = \frac{2L}{R} = 2.5 \times 10^{-3} s \tag{41}$$

pelo que o estado de equilíbrio é atingido muito rapidaemnte. No laboratório convém encontrar valores de R, L e C que ilustrem os 3 regimes. O caso de $R = 0$ é, claro, um caso académico, a menos que se utilizem supercondutores.

---

[1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).