

# Duas Esferas Conductoras a Distância Finita

## I. INTRODUÇÃO

Consideremos o seguinte problema. *Dois condutores esféricos de raios  $R_1$  e  $R_2$  têm os seus centros à distância  $r_0 > R_1 + R_2$ , conforme indicado na Fig. 1. Inicialmente o condutor de raio  $R_1$  tem uma carga  $Q$  e o outro está descarregado. Ligam-se os dois condutores por um fio condutor e espera-se que o sistema atinja o equilíbrio electrostático. Pretende-se saber as cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  nos condutores de raios  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, desprezando as cargas no fio que as liga.*

Este problema interessou os pais do electromagnetismo, Poisson, Kirchoff, Thomson e o próprio Maxwell[1]. Vamos aqui apresentar uma solução em termos duma série e usar o Mathematica para

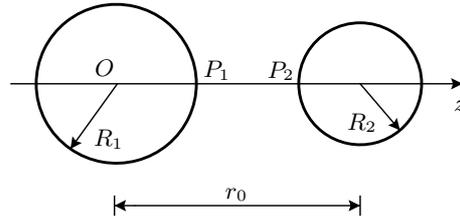


Figura 1: Duas esferas condutoras a distância finita e ligadas por um fio condutor.

verificar os resultados.

## II. O MÉTODO DAS IMAGENS

Comecemos por recordar o problema duma esfera de raio  $R$  ligada à Terra,  $V = 0$ , na presença duma carga  $q$ , conforme indicado na Fig. 2. Como se sabe (ver por exemplo a Ref.[2]), o potencial para todos

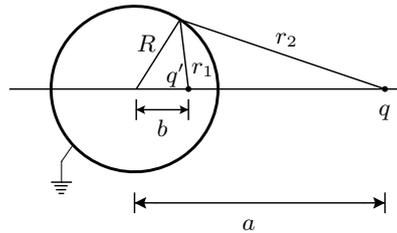


Figura 2: Imagem duma carga numa esfera ligada à Terra.

os pontos exteriores à esfera é dado pela soma dos potenciais criados pela carga  $q$  e pela sua imagem  $q'$  colocada à distância  $b$  do centro da esfera, tais que

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad b = \frac{R^2}{a} \quad (1)$$

Usando coordenadas esféricas com centro na esfera e com o eixo dos  $z$  na linha que une as cargas, a expressão do potencial válida para  $r \geq R$  é

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[ -\frac{R}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} + \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} \right] \quad (2)$$

que conduz ao potencial nulo quando  $r = R$  (ver Ref.[2]). De facto

$$\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \left( -\frac{R}{ar_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{R} \left( -\frac{R^2}{ar_1} + \frac{R}{r_2} \right) = \frac{q}{R} \left( -\frac{b}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) = 0 \quad (3)$$

onde a última igualdade resulta da semelhança dos dois triângulos. Definindo a distribuição de carga sobre a esfera

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(R, \theta) = \frac{q}{4\pi} \left[ -\frac{R(R - b \cos \theta)}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos \theta)^{3/2}} + \frac{a(R - a \cos \theta)}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \right] \quad (4)$$

podemos calcular a carga total sobre a esfera,

$$\begin{aligned} Q^{\text{esfera}} &= 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sigma(\theta) \\ &= \frac{q R^2}{2 a} \left[ -\int_{-1}^1 dx \frac{R(R - bx)}{(R^2 + a^2 - 2Rbx)^{3/2}} + \int_{-1}^1 dx \frac{a(R - ax)}{(R^2 + a^2 - 2Rax)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q R^2}{2 a} \left( -\frac{2}{R} + 0 \right) = -q \frac{R}{a} = q' \end{aligned} \quad (5)$$

que é igual à carga da imagem  $q'$ . Na Fig. 3 mostramos a densidade de carga,  $\sigma(\theta)$ , em unidades de  $q/R^2$  em função de  $\theta$ , para dois casos.

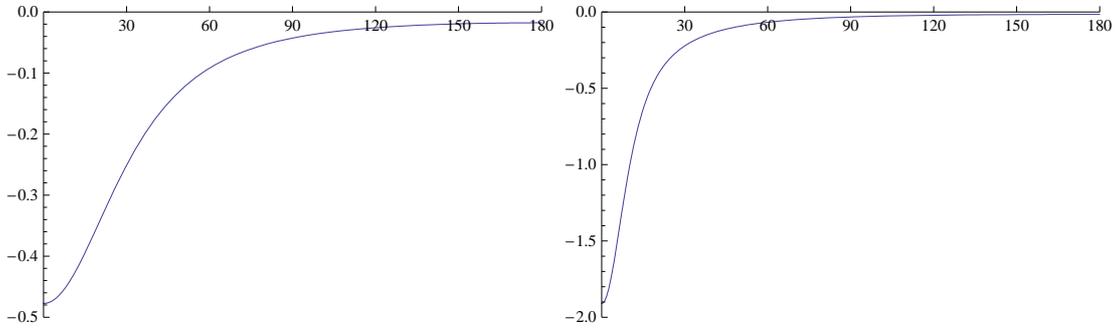


Figura 3: Densidade de carga na superfície da esfera,  $\sigma(\theta)$ , em unidades de  $q/R^2$  em função de  $\theta \in [0, 180]$ . No gráfico da esquerda  $b/R = 0.5$  e  $a/R = 2$ . No gráfico da direita  $b/R = 0.5$  e  $a/R = 1.25$ .

O caso geral da esfera estar a um potencial  $V$  arbitrário, é obtido adicionando uma carga na origem da esfera e de valor dado por  $q'' = 4\pi\epsilon_0 RV$ .

### III. O MÉTODO DAS IMAGENS NO PROBLEMA DAS DUAS ESFERAS

#### A. As imagens e a sua localização

Vamos agora usar o método das imagens para resolver o problema das duas esferas. Se as esferas estivessem muito afastadas, o problema era muito fácil (ver [2]),

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}, \quad \text{com} \quad Q_1 + Q_2 = Q \quad (6)$$

Vamos então começar por imaginar que colocamos uma carga  $q_1$  no centro da esfera de raio  $R_1$  e uma carga  $q_2$  no centro da esfera de raio  $R_2$ . A carga  $q_1 \equiv q_{11}$  vai ter uma imagem na esfera de raio  $R_2$ , que designamos por  $q_{22}$ , e a carga  $q_2 \equiv q_{21}$  vai ter uma imagem na esfera de raio  $R_1$  que designamos por  $q_{12}$ . Com os resultados da secção anterior temos

$$q_{12} = -q_{21} \frac{R_1}{z_{21}}, \quad q_{22} = -q_{11} \frac{R_2}{r_0 - z_{11}} \quad (7)$$

onde

$$z_{11} = 0, \quad z_{21} = r_0 \quad (8)$$

são as coordenadas das cargas  $q_{11}$  e  $q_{21}$  no referencial definido na Fig. 1. Agora cada uma destas imagens vai dar origem a outra imagem e assim sucessivamente. É fácil de verificar que o resultado final para as imagens dentro da esfera de raio  $R_1$  é

$$q_{1,n+1} = -q_{2,n} \frac{R_1}{z_{2,n}}, \quad z_{1,n+1} = \frac{R_1^2}{z_{2,n}} \quad (9)$$

e para as cargas dentro da esfera de raio  $R_2$

$$q_{2,n+1} = -q_{1,n} \frac{R_2}{r_0 - z_{1,n}}, \quad z_{2,n+1} = \frac{R_2^2}{r_0 - z_{1,n}} \quad (10)$$

com as condições iniciais

$$q_{11} = q_1, \quad q_{21} = q_2, \quad z_{11} = 0, \quad z_{21} = r_0 \quad (11)$$

As cargas finais nas duas esferas deverão ser dadas por

$$Q_1 = \sum_1^{\infty} q_{1,i}, \quad Q_2 = \sum_1^{\infty} q_{2,i}, \quad Q = Q_1 + Q_2 \quad (12)$$

### B. A igualdade dos potenciais

Se pensarmos um pouco e olharmos a Eq. (12), verificamos que o problema ainda não está bem definido. De facto temos duas quantidades,  $q_1$  e  $q_2$  que não conhecemos e só uma equação que as relaciona,

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (q_{1,i} + q_{2,i}) \quad (13)$$

Mas o enunciado do problema diz-nos que as esferas estão ao mesmo potencial. Assim, usando os pontos  $P_1$  e  $P_2$  da Fig. 1 devemos ter

$$\phi(P_1) = \phi(P_2) \quad (14)$$

Comecemos por calcular o potencial em  $P_1$ , isto é sobre a esfera de raio  $R_1$  no ponto  $P_1 = (0, 0, R_1)$ . Obtemos

$$\begin{aligned} \phi(P_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}}{R_1 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - R_1} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i+1}}{R_1 - z_{1,i+1}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - R_1} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \end{aligned} \quad (15)$$

onde a última igualdade resulta do facto de que a carga  $q_{1,i+1}$  ser a imagem na esfera de raio  $R_1$  da carga  $q_{2,i}$  e o ponto estar sobre a esfera de raio  $R_1$  donde a contribuição para o potencial da soma na Eq. (15) é nula.

Da mesma forma sobre em  $z = r_0 - R_2$  (sobre a esfera de raio  $R_2$ ) temos

$$\begin{aligned} \phi(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}}{r_0 - R_2 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - (r_0 - R_2)} \right] \\ &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}}{r_0 - R_2 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i+1}}{z_{2,i+1} - r_0 + R_2} \right] \\ &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned} \quad (16)$$

e portanto a igualdade dos potenciais diz-nos que

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \quad (17)$$

### C. O Resultado final para as cargas

Para determinar as cargas  $q_1$  e  $q_2$ , as nossas incógnitas, definimos as cargas *reduzidas*

$$\begin{aligned} \hat{q}_{1,i} &= \frac{q_{1,i}}{q_1}, & \text{com} & \quad \hat{q}_{1,1} = 1 \\ \hat{q}_{2,i} &= \frac{q_{2,i}}{q_1}, & \text{com} & \quad \hat{q}_{2,1} = \frac{R_2}{R_1} \end{aligned} \quad (18)$$

Então obtemos

$$q_1 = \frac{Q}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})}, \quad q_2 = q_1 \frac{R_2}{R_1} \quad (19)$$

e

$$Q_1 = Q \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_{1,i}}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})}, \quad Q_2 = Q \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_{2,i}}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})} \quad (20)$$

## IV. O POTENCIAL E O CAMPO ELÉCTRICO

### A. O Potencial

Consideremos um ponto genérico no referencial definido na Fig. 1. Em coordenadas esféricas o potencial só depende de  $r$  e  $\theta$  e é dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}}{\sqrt{r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta}} + \frac{q_{2,i}}{\sqrt{r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta}} \right] \quad (21)$$

### B. O campo eléctrico

O campo eléctrico obtém-se facilmente em coordenadas esféricas com o resultado ( $E_\varphi = 0$ ),

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}(r - z_{1,i} \cos \theta)}{(r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q_{2,i}(r - z_{2,i} \cos \theta)}{(r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta)^{3/2}} \right] \quad (22)$$

e

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{q_{1,i}z_{1,i} \sin \theta}{(r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta)^{3/2}} + \frac{q_{2,i}z_{2,i} \sin \theta}{(r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta)^{3/2}} \right] \quad (23)$$

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS

### A. O Potencial nas esferas de raio $R_1$ e $R_2$

O potencial sobre a esfera de raio  $R_1$  calcula-se facilmente fazendo  $r = R_1$  na Eq. (21). Para isso usamos o seguinte programa de Mathematica

```
(***** Programa para calcular as cargas nas esferas *****)
Remove["Global`*"]
(* Input Data *)
k1=0.9 (* Constante para o potencial: Carga em pC e distâncias em cm *)
k2=90 (* Constante para o campo: Carga em pC e distâncias em cm *)
k3= 1./(36 Pi) (* Constante para a densidade de carga vir em nC/m^2 *)

Q=10 (* pC = pico Coulomb *)
q1hat=1
r0=4. (* cm *)
R1=2 (* cm *)
R2=1 (* cm *)
x1=R1/r0
x2=R2/r0
nmax=10

(* Calculo das imagens. As distancias estao em unidades de r0 *)
z1=Function[n,If[n>1,x1^2/z2[n-1],0]]
z2=Function[n,If[n>1,1-x2^2/(1-z1[n-1]),1]]

q1aux=Function[n,If[n>1,-q2aux[n-1]*x1/z2[n-1],q1hat]]
q2aux=Function[n,If[n>1,-q1aux[n-1]*x2/(1-z1[n-1]),q1hat*x2/x1]]

(* Calculo das cargas Q1 e Q2 *)

Sum1=Sum[q1aux[n],{n,1,nmax}]
Sum2=Sum[q2aux[n],{n,1,nmax}]

Q1=Q Sum1/(Sum1+Sum2)
Q2=Q Sum2/(Sum1+Sum2)

q1=Function[n,Q/(Sum1+Sum2) q1aux[n]]
q2=Function[n,Q/(Sum1+Sum2) q2aux[n]]

(* Potencial e Campo Electrico. Coordenadas Esfericas na primeira esfera *)
V=Function[{r,teta},Sum[k1*q1[n]/Sqrt[r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]* \
Cos[teta]] \
+k1*q2[n]/Sqrt[r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]* \
Cos[teta]],{n,1,nmax}]];

plot1=Plot[V[R1, teta], {teta, 0, Pi}, PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 5}},
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
AxesLabel -> {"\[Theta]",
"V(\!\(\*\SubscriptBox[\"R\", \"1\"]\)) (Volt)"}]
```

Com este programa é fácil de mostrar que o potencial é constante sobre a esfera de raio  $R_1$ , basta colocar  $r = R_1$  e variar  $\theta \in [0, \pi]$ . Para a esfera de raio  $R_2$  temos de escrever as coordenadas sobre a esfera em

termos das variáveis  $(r, \theta)$ . Da Fig. 4 resulta,

$$r = \sqrt{r_0^2 + R_2^2 + 2r_0R_2 \cos \alpha}, \quad \theta = \arctan \left( \frac{R_2 \sin \alpha}{r_0 + R_2 \cos \alpha} \right) \quad (24)$$

e variar agora  $\alpha \in [0, \pi]$ .

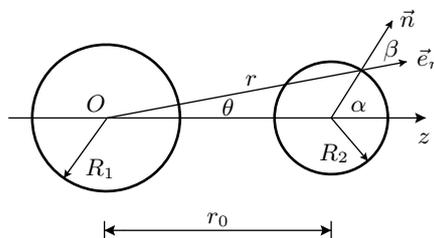


Figura 4: Definição das coordenadas sobre a esfera de raio  $R_2$ .

```

(***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) *****)
(* Potencial na Esfera 2 *)

V2=Function[teta2,V[Sqrt[R2^2+r0^2+2*r0*R2*Cos[teta2]], \
  ArcTan[R2*Sin[teta2]/(r0+R2*Cos[teta2])]]]

plot2=Plot[V2[alpha], {alpha, 0, Pi}, PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 5}},
  Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
  AxesLabel -> {"\[Alpha]",
  "V(\!\(\!*SubscriptBox[\\"R\", \"2\"]\)) (Volt)"}]

```

Os resultados estão na Fig. 5 para  $Q = 10$  pC,  $r_0 = 4$  cm,  $R_1 = 2$  cm e  $R_2 = 1$  cm.

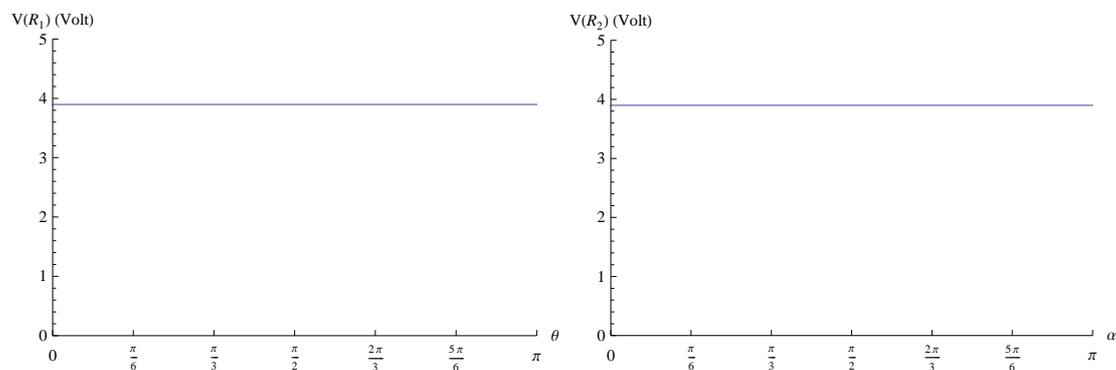


Figura 5: Potenciais sobre as esferas. No painel esquerdo para a esfera de raio  $R_1$  e no painel direito para a esfera de raio  $R_2$ . As figuras correspondem a  $Q = 10$  pC,  $r_0 = 4$  cm,  $R_1 = 2$  cm e  $R_2 = 1$  cm.

## B. O Campo Eléctrico e as distribuições de carga nas esferas

As distribuições de carga nas esferas podem ser obtidas facilmente a partir da definição,

$$\sigma = \epsilon_0 E_r \quad (25)$$

Para a esfera de raio  $R_1$  usamos o programa seguinte do Mathematica,

```

(***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) *****)
(* Distribuicao de carga na primeira esfera *)

Er=Function[{r,teta},Sum[k2*q1[n]*(r-r0*z1[n]*Cos[teta])/ \
(r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]*Cos[teta])^(3/2)
+k2*q2[n]*(r-r0*z2[n]*Cos[teta])/ \
(r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]*Cos[teta])^(3/2),{n,1,nmax}]];

Eteta=Function[{r,teta},Sum[k2*q1[n]*r0*z1[n]*Sin[teta]/ \
(r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]*Cos[teta])^(3/2)
+k2*q2[n]*r0*z2[n]*Sin[teta]/ \
(r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]*Cos[teta])^(3/2),{n,1,nmax}]];

Sigma1=Function[teta,k3*Er[R1,teta]];

plot3 = Plot[Sigma1[teta], {teta, 0, Pi},
PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 2}},
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
AxesLabel -> {"\[Theta]",
"\[Sigma] (\[SubscriptBox["R", \
"1"]]) (nC/[SuperscriptBox["m", \
"2"]])"}];

```

Para a segunda esfera temos que usar a Eq. (24) para relacionar as coordenadas em relação ao referencial da Fig. 1. Além disso, a direcção normal à segunda esfera é

$$\vec{n} = \cos \beta \vec{e}_r + \sin \beta \vec{e}_\theta, \quad \beta = \alpha - \theta \quad (26)$$

pelo que a componente normal do campo será

$$E_n = E_r \cos \beta + E_\theta \sin \beta \quad (27)$$

Usamos o seguinte programa

```

(***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) *****)
(* Distribuicao de carga na segunda esfera *)

Sigma2=Function[alfa,r=Sqrt[R2^2+r0^2+2*r0*R2*Cos[alfa]];
teta=ArcTan[R2*Sin[alfa]/(r0+R2*Cos[alfa])];
beta=alfa-teta; k3*(Er[r,teta]*Cos[beta]+Eteta[r,teta]*Sin[beta])];

plot4 = Plot[Sigma2[alfa], {alfa, 0, Pi},
PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 3}},
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
AxesLabel -> {"\[Alpha]",
"\[Sigma] (\[SubscriptBox["R", \
"2"]]) (nC/[SuperscriptBox["m", \
"2"]])"}];

```

e obtemos o resultado da Fig. 6. Podemos ainda verificar que estas distribuições reproduzem as cargas totais nas esferas, isto é,

$$Q_1 = 2\pi R_1^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sigma_1(\theta), \quad Q_2 = 2\pi R_2^2 \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \sigma_2(\alpha) \quad (28)$$

onde usámos a simetria azimutal do problema.

### C. O poder das pontas

Este exemplo é por vezes utilizado para mostrar que o campo eléctrico é muito intenso nas *pontas*, isto é em regiões com um raio de curvatura muito pequeno. Podemos mostrar isso escolhendo as seguintes

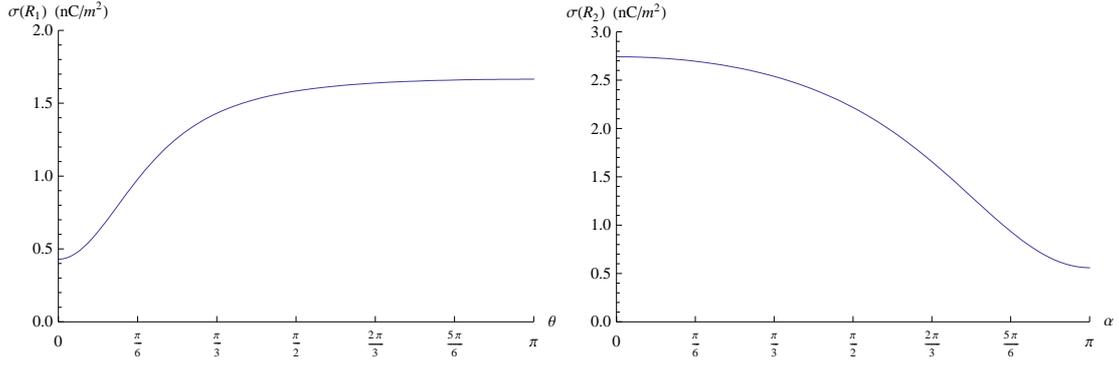


Figura 6: Densidade de carga nas esferas de raio  $R_1$  ( $R_2$ ) no painel esquerdo (direito), para as condições da Fig. 5.

quantidades

$$Q = 10 \text{ pC}, R_1 = 2 \text{ cm}, R_2 = 0.01 \text{ cm}, r_0 = 2.15 \text{ cm} \quad (29)$$

Obtemos então a situação da Fig. 7, onde vemos que o campo  $\vec{E}$  é cerca de 15 vezes mais intenso à superfície da esfera de raio  $R_2$  na *ponta*, isto é para  $\alpha = 0$ , do que na esfera de raio  $R_1$ .

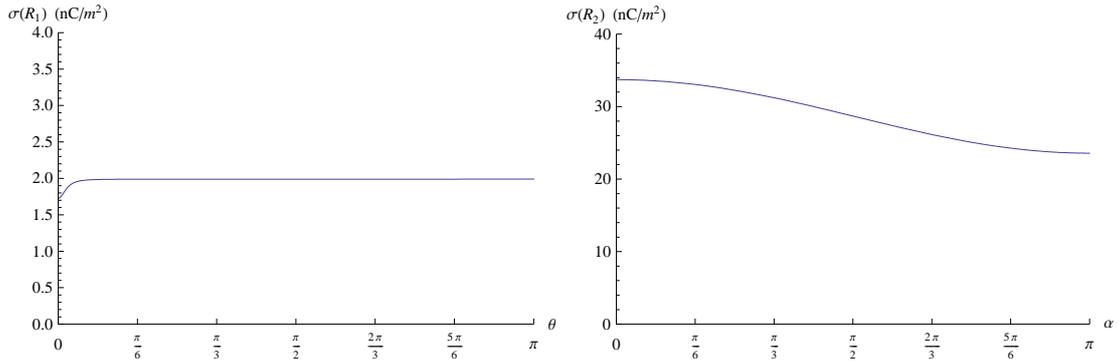


Figura 7: Densidade de carga nas esferas de raio  $R_1$  ( $R_2$ ) no painel esquerdo (direito), para as condições da Eq. (29). Notar as diferentes escalas nas duas figuras.

## VI. A FORÇA ENTRE AS DUAS ESFERAS

Podemos finalmente calcular a força resultante entre as duas esferas. A força será necessariamente repulsiva e dirigida segundo o eixo dos  $z$ . Obtemos

$$F_z = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,n}q_{2,m}}{(z_{1,n} - z_{2,m})^2} \quad (30)$$

Para as condições da Fig. 5 obtemos, com a ajuda do *Mathematica*, que  $F_z = 0.87 \text{ pN}$ .

## VII. CONCLUSÕES

Mostrámos, num exemplo não trivial, como o uso do método das imagens combinado com as modernas possibilidades do programa *Mathematica* podem levar a resoluções simples para problemas muito

complexos.

- 
- [1] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover Publications, 1954).  
[2] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (IST Press, 2006).