

## “Paradoxo” do disco de Feynman

No capítulo 17 do volume II do curso **Feynman Lectures on Physics** [1] é apresentado um aparente *paradoxo*. Digo aparente, pois não se trata de facto dum paradoxo mas de um problema que vai aumentar o nosso conhecimento do campo electromagnético. A questão é a seguinte.

Considere a situação representada na figura (copiada do referido livro). Há uma corrente estacionária na bobina e o disco, que pode rodar livremente sem atrito, está parado.

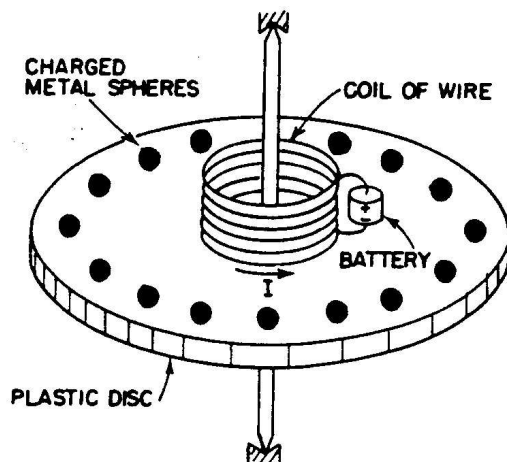


Fig. 17-5. Will the disc rotate if the current  $I$  is stopped?

Suponha que num certo instante a corrente na bobina é interrompida sem intervenção exterior. Enquanto havia corrente existia um campo  $\vec{B}$  mais ou menos paralelo ao eixo da bobina e portanto existia um fluxo magnético que atravessava o plano do disco. Quando a corrente vai para zero o fluxo também irá para zero. Esta variação de fluxo vai dar origem a um campo eléctrico induzido que circulará em circunferências com centro no eixo. As esferas carregadas vão sentir este campo eléctrico tangencial ao perímetro do disco. A força é no mesmo sentido para todas as cargas e portanto haverá um binário resultante aplicado ao disco que começará a rodar. Em princípio poderíamos calcular a velocidade angular de rotação conhecendo as cargas, o momento de inércia do disco e a corrente da bobina.

No entanto, daí o paradoxo, poderíamos fazer outro argumento. Usando o princípio de conservação de momento angular podemos dizer que o momento angular do conjunto disco, bobina e cargas é nulo e que portanto deverá permanecer nulo depois da corrente ir para zero. Assim não deverá haver rotação. Qual dos dois argumentos é válido?

Para compreender a solução do problema são necessárias alguns conceitos que normalmente não são dados num curso elementar de electromagnetismo. Vamos expor esses conceitos em forma de problemas.

# I

Comecemos por recordar o teorema de Poynting sobre a conservação de energia em electromagnetismo. Na forma integral pode-se escrever

$$-\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (1)$$

onde a energia electromagnética é dada por

$$U_{\text{em}} = \int_V u_{\text{em}} dV \quad (2)$$

e a densidade  $u_{\text{em}}$  é (meios lineares)

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (3)$$

Vimos ainda que o último termo da Eq. (1) corresponde à taxa de variação da energia mecânica das partículas actuadas pelos campos, isto é,

$$\frac{dU_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (4)$$

Podemos então escrever uma lei de conservação para o sistema campo electromagnético mais partículas carregadas na forma,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (U_{\text{mec}} + U_{\text{em}}) = - \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS \quad (5)$$

com uma interpretação óbvia. Vimos portanto que o sistema campo electromagnético mais partículas carregadas obedece a uma lei da conservação da energia. Vamos neste problema mostrar que algo de semelhante se passa para o momento linear.

a) Parta da expressão da força de Lorentz para partículas carregadas

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6)$$

para mostrar que a taxa de variação do momento linear das partículas, descritas como distribuições de carga e corrente, se pode escrever

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (7)$$

b) Use as equações de Maxwell (considere uma interpretação microscópica em que as partículas se movem no vazio com  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ ) para substituir  $\rho$  e  $\vec{J}$  e obter

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \vec{G}(t) \quad (8)$$

onde

$$\vec{G}(t) = \int_V \left[ \epsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \epsilon_0 \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] dV \quad (9)$$

c) Mostre que se tem

$$G_i(t) = \int_V \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik} dV = \int_S \sum_{k=1}^3 T_{ik} n_k dS \quad (10)$$

onde se usou o teorema da divergência e o tensor  $T_{ik}$  (designado por tensor das tensões de Maxwell) é dado por

$$T_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - u_{\text{em}} \delta_{ik} \quad (11)$$

d) Use os resultados das alíneas b) e c) para, comparando com a alínea a), mostrar que é consistente interpretar

$$\vec{P}_{\text{em}} = \int_V \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \int_V \frac{1}{c^2} \vec{S} dV \quad (12)$$

como o momento linear do campo electromagnético. Verifique que as unidades estão correctas.

## II

Neste problema vamos identificar o momento angular associado ao campo electromagnético.

a) Use o tensor completamente antisimétrico no espaço a 3 dimensões  $\epsilon_{ijk}$  com a definição

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação par de } 123 \\ \epsilon_{ijk} &= -1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação ímpar de } 123 \\ \epsilon_{ijk} &= 0 && \text{em todos os outros casos} \end{aligned} \quad (13)$$

para mostrar que o produto externo de dois vectores se pode escrever

$$\left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (14)$$

muitas vezes simplesmente escrito como

$$\left( \vec{A} \times \vec{B} \right)_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (15)$$

onde se usou a convenção de Einstein (índices repetidos estão somados).

b) Partindo da equação da mecânica

$$\frac{d\vec{L}_{\text{mec}}}{dt} = \vec{N} = \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (16)$$

mostre que

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{L}_{\text{mec}} + \vec{L}_{\text{em}} \right)_i = \int_S M_{ik} n_k dS \quad (17)$$

onde

$$\vec{L}_{\text{em}} = \int_V \vec{r} \times \vec{P}_{\text{em}} dV \quad (18)$$

e

$$M_{in} = \sum_{k,j=1}^3 \epsilon_{ikj} r_k T_{jn} \quad (19)$$

Estamos agora em condições de atacar o problema do disco de Feynman. Antes de mais, a resposta é que o disco vai rodar. Para isso é preciso compreender que o momento angular do campo electromagnético tem que ser tomado em conta na lei de conservação. Em vez de tratar directamente o problema proposto por Feynman, vamos antes usar uma variante, proposta por Kirk McDonald nos problemas da disciplina de electromagnetismo da Universidade de Princeton <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/>. A ideia é substituir a bobina por um pequeno dipolo colocado na origem e as cargas por anel carregado uniformemente. Com estas modificações é possível encontrar expressões explícitas para os campos e resolver o problema analiticamente. No entanto, como veremos, o grau de dificuldade é elevado.

### III

Considere uma bobina pequena centrada na origem percorrida por uma corrente que dá origem a um momento magnético  $\vec{m} = m \vec{e}_z$ . No plano do disco existe um anel de raio  $a$  carregado uniformemente com carga total  $Q$ . O anel está solidário com o disco e bobina e o conjunto pode rodar livremente em torno do eixo dos  $z$  sem atrito, como no problema inicial do Feynman. Vamos primeiro calcular o momento angular inicial, que será somente o associado ao campo electromagnético.

a) Mostre que o potencial electrostático do anel de carga se pode escrever, em coordenadas esféricas, para um ponto sobre o eixo dos  $z$  como

$$\phi(r, 0, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(0) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(0) & r > a \end{cases} \quad (20)$$

onde se usaram os resultados do Problema III dos Problemas Extra de Electroestática.

b) Use os resultados da alínea a) e os métodos do Problema III dos Problemas Extra de Electroestática para mostrar que em qualquer ponto, com simetria azimutal, se tem

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (21)$$

c) Usando os resultados da alínea b) e o facto que

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = P_n^1(\cos \theta) \quad (22)$$

mostre que o campo eléctrico devido ao anel de carga tem a expressão geral

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r^{n-1}}{a^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^n}{r^{n+2}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (23)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{a^{n+1}} P_n(0) P_n^1(\cos \theta) & r < a \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+2}} P_n(0) P_n^1(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (24)$$

$$E_\varphi = 0 \quad (25)$$

Nestas expressões  $P_n^m(x)$  são os polinómios associados de Legendre e para referência futura

$$\begin{cases} P_{2l}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-1)^l \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + l)}{l!} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} & l = 0, 1, 2, 3, \dots \\ P_{2l+1}(0) = 0 & l = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (26)$$

onde se definiu

$$(2l-1)!! = (2l-1)(2l-3)(2l-5) \cdots 1 \quad \text{com} \quad (-1)!! \equiv 1 \quad (27)$$

d) Mostre que o campo  $\vec{B}$  do dipolo magnético  $\vec{m} = m \vec{e}_z$ , colocado na origem, se pode escrever em coordenadas esféricas na forma

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m P_1(\cos \theta)}{r^3}, \quad B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m P_1^1(\cos \theta)}{r^3}, \quad B_\varphi = 0 \quad (28)$$

onde

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta \quad (29)$$

e) Usando os resultados das alíneas anteriores e do Problema II, comece por mostrar que o momento angular do campo  $\vec{L}_{\text{em}}$  só tem componente segundo o eixo dos  $z$ . Mostre em seguida que

$$\left[ \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right]_z = r \sin \theta (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \quad (30)$$

Isto quer dizer que para calcularmos o momento angular inicial temos de efectuar o seguinte integral

$$L_{em,z,\text{inicial}} = 2\pi\epsilon_0 \int_0^\infty r^3 dr \int_{-1}^1 d \cos \theta \sin \theta (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \quad (31)$$

f) Use a relação

$$\sin \theta P_n^1(\cos \theta) = \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)] \quad (32)$$

para escrever

$$\begin{cases} 2\pi\epsilon_0 E_r \sin \theta B_\theta = \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r) P_n(0) P_n(\cos \theta) \frac{2}{3} [P_2(\cos \theta) - P_0(\cos \theta)] \\ -2\pi\epsilon_0 \sin \theta E_\theta B_r = \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P_n(0) P_1(\cos \theta) \frac{n^2+n}{2n+1} [P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)] \end{cases} \quad (33)$$

onde definimos

$$g_n(r) = \begin{cases} \frac{n r^{n-1}}{2 a^n} & r < a \\ -\frac{n+1 a^{n+1}}{2 r^{n+2}} & r > a \end{cases} \quad (34)$$

e

$$f_n(r) = \begin{cases} \frac{r^{n-1}}{a^n} & r < a \\ \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} & r > a \end{cases} \quad (35)$$

Agora use a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) = \frac{2 \delta_{nm}}{2n+1} \quad (36)$$

para obter

$$\begin{aligned} L_{\text{em,z, inicial}} &= \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \int_0^\infty dr \left[ -\frac{2}{15} g_2(r) - \frac{4}{3} g_0(r) + \frac{2}{5} f_2(r) \right] \\ &= \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \left( 0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \end{aligned} \quad (37)$$

Como  $L_{\text{mec,z, inicial}} = 0$  devemos ter para o momento angular total no instante inicial (antes de interromper a corrente)

$$L_{z, \text{inicial}} = \frac{\mu_0 Qm}{4\pi a} \quad (38)$$

## IV

Vamos agora calcular o momento angular depois da corrente ter completamente desaparecido da bobina. Nessa situação não existe campo magnético (nesta variante do problema devemos ter  $m = 0$ ) e portanto não há momento angular associado ao campo, só associado

ao sistema mecânico. Vamos neste problema calculá-lo e mostrar que é igual ao calculado no problema anterior, havendo portanto conservação de momento angular e havendo rotação do sistema quando a corrente se anula.

a) A variação de fluxo vai dar origem a um campo eléctrico azimutal que obedece (em cada instante) a

$$\oint E_\varphi dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (39)$$

Mostre que se tem

$$\frac{dL_{\text{mec},z}}{dt} = aQE_\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} \quad (40)$$

b) Integre a equação para obter

$$L_{\text{mec},z,\text{final}} = \frac{Q}{2\pi} \Phi_{\text{inicial}} \quad (41)$$

c) Calcule  $\Phi_{\text{inicial}}$ . Para isso repare que  $B_z$  diverge quando  $r \rightarrow 0$ . De facto a expressão do momento do dipolo é aproximada e só válida para  $r > a$ . No entanto note que

$$\Phi_{\text{inicial}} = 2\pi \int_0^a dr r B_z = -2\pi \int_a^\infty dr r B_z \quad (42)$$

onde

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m P_2(\cos \theta)}{r^3} \quad (43)$$

Justifique.

d) Faça o integral final para mostrar que

$$L_{\text{mec},z,\text{final}} = L_{\text{em},z,\text{inicial}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \quad (44)$$

## References

- [1] R. P. Feynman, Leighton and Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Volumes 1 e 2* (Addison-Wesley, 1964).