INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS
Parte 2

Jorge Crispim Romão

Departamento de Física

2005

Índice

Capítulo 1

Métodos Funcionais

1.1 Introdução

Vamos neste capítulo, genericamente designado por *Métodos Funcionais*, descrever a quantificação via integral de caminho. Para sistemas que não sejam teorias de gauge este método pode parecer desnecessário pois a quantificação canónica funciona sem problemas. Contudo, como veremos no capítulo seguinte, para teorias de gauge não abelianas a quantificação via integral de caminho é a maneira de resolver o problema. Para além deste aspecto fundamental, a quantificação usando métodos funcionais é muito elegante e permite obter, normalmente de uma forma mais rápida, os mesmos resultados do que a quantificação canónica mesmo quando esta é fácil de aplicar. Exemplos são as Identidade de Ward-Takahashi ou as equações de Dyson-Schwinger, como veremos no final deste capítulo.

Vamos admitir que o leitor está familiarizado com a quantificação via integral de caminho de sistemas de N partículas em mecânica quântica não relativista. Assim apenas uma breve revisão dos resultados será feita. Uma apresentação mais completa é dada no Apêndice A. A passagem da quantificação de sistemas de N partículas para a quantificação duma teoria de campo será feita dum modo heurístico deixando uma exposição mais rigorosa para o Apêndice B.

Antes de entrarmos propriamente no assunto, convém esclarecer algumas questões relacionadas com a notação. Vamos supor que temos um campo escalar real $\phi^a(x)$ onde $a = 1, ...N$. No seguimento aparecerão muitas vezes expressões do tipo

$$I_1 = \int d^4x \phi^a(x)\phi^a(x) \tag{1.1}$$

ou

$$I_2 = \int d^4x d^4y \phi^a(x) M^{ab}(x,y)\phi^b(y) \tag{1.2}$$

onde $M^{ab}(x,y)$ é normalmente um operador diferencial. De acordo com as regras de derivação funcional, temos por exemplo

$$\frac{\delta I_1}{\delta \phi^b(y)} = 2\phi^b(y) \tag{1.3}$$

onde se usou o resultado

$$\frac{\delta \phi^a(x)}{\delta \phi^b(y)} = \delta^{ab}\delta^4(x-y) \tag{1.4}$$

Se se conservarem todos os índices nas expressões anteriores (e noutras, como veremos, muito mais complicadas) rapidamente teremos uma grande confusão. Assim é conveniente usar uma notação mais compacta. Para isso fazemos

$$\phi_i \Longleftrightarrow \phi^a(x) \tag{1.5}$$

ou seja o índice i equivale ao índice discreto a e ao índice contínuo x, isto é,

$$i \Longleftrightarrow \{a, x\} \tag{1.6}$$

No caso dos campos possuírem mais índices, o índice i será sempre a colecção de todos eles. Além desta convenção, é ainda conveniente usar a convenção de soma de Einstein entendida como soma para índices discretos e integração para índices contínuos. Com estas convenções as Eqs. 1.1 e 1.4 podem ser reescritas na forma

$$\begin{aligned} I_1 = \phi_i\phi_i \quad I_2 = \phi_i M_{ij}\phi_j \\ \tfrac{\delta I_1}{\delta \phi_j} = 2\phi_j \qquad \tfrac{\delta \phi_i}{\delta \phi_j} = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{1.7}$$

No seguimento usaremos esta notação, voltando à notação usual sempre que conveniente, ou sempre que haja algum perigo de confusão.

1.2 Funcionais Geradores das funções de Green

1.2.1 Funções de Green

Os objectos básicos em Teoria Quântica dos Campos são as *funções de Green*. Para evitar complicações desnecessárias vamos aqui considerar quase exclusivamente campos escalares. As generalizações são no entanto imediatas. Assim a função de Green de ordem n é dada por

$$G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle \ . \tag{1.8}$$

As funções de Green definidas por 1.8 são, por vezes, designadas *completas* por oposição às chamadas funções de Green *conexas*, *truncadas* e *irredutíveis (ou próprias)* que passamos a definir.

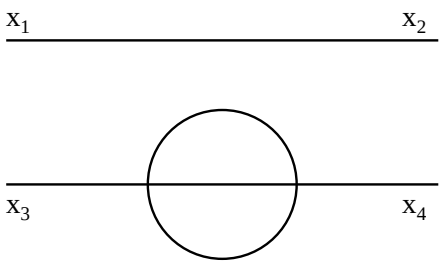


Figura 1.1:

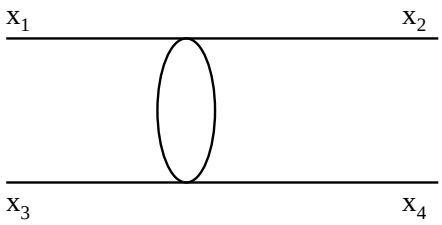


Figura 1.2:

1.2.2 Funções de Green conexas

Chamam-se funções de Green *conexas* aquelas em que nenhuma das linhas exteriores passa através do diagrama sem interagir. Por exemplo na Figura 1.1 está representada uma contribuição desconexa para $G^4(x_1, \ldots, x_4)$, enquanto que a Figura 1.2 representa uma contribuição conexa para a mesma função.

Está implícito que as funções de Green são calculadas em teoria das perturbações usando diagramas de Feynman. Assim as funções de Green conexas $G_c^{(4)}(x_1, \ldots, x_n)$, são obtidas somando todos os diagramas conexos. As funções de Green desconexas, correspondendo aos diagramas desconexos, podem ser obtidas a partir de funções de Green conexas de ordem mais baixa, pelo que as quantidades relevantes são as funções de Green conexas $G_c^n(x_1, \ldots, x_n)$. É claro que temos

$$G_c^n(x_1, \ldots, x_n) = G^n(x_1, \ldots, x_n) - \text{partes desconexas}, \tag{1.9}$$

e ainda

$$G_c^2(x_1, x_2) = G^2(x_1, x_2) \ . \tag{1.10}$$

Convencionalmente representamos $G_c^n(x_1, \ldots, x_n)$ pelo diagrama da Figura 1.3.

Por vezes interessa considerar as funções de Green no espaço dos momentos. Definimos então $G_c^n(p_1, \ldots, p_n)$ através da relação

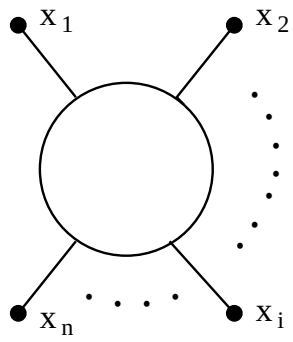


Figura 1.3:

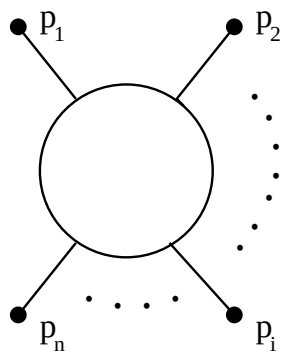


Figura 1.4:

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\cdots p_n)\; G_c^n(p_1,\ldots,p_n)\\
&\equiv \int d^4x_1\cdots d^4x_n e^{-i(p_1\cdot x_1+\cdots+p_n\cdot x_n)}\; G_c^n(x_1,\ldots,x_n)\;, \qquad (1.11)
\end{aligned}
$$

onde os momentos $p_1,\ldots,p_n$ estão a entrar no diagrama (*incoming momenta*), conforme indicado na Figura 1.4. Notar ainda que na definição 1.11 se factorizou a função delta que assegura a conservação de 4-momento. Com estas convenções $G^2(p,-p)\equiv G^2(p)$ é o propagador completo representado na Figura 1.5.

1.2.3 Funções de Green truncadas

Para $n>2$ definem-se as funções de Green *truncadas* através da relação

$$
G^n_{\text{trunc}}(p_1,\ldots,p_n)=\prod_{k=1}^{n}\left[G^2(p_k)\right]^{-1} G_c^n(p_1,\ldots,p_n) \qquad (1.12)
$$

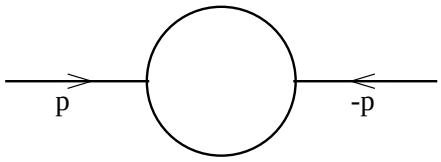


Figura 1.5:

isto é, multiplica-se cada linha exterior pelo inverso do propagador completo referente a essa linha. São estas funções que representam um papel fundamental na Teoria pois são elas que estão relacionadas com os elementos da matriz S. De facto a fórmula de redução LSZ para campos escalares é

$$\begin{aligned}
\langle p_1, \ldots, p_n \text{ out}|q_1, \ldots, q_\ell \text{ in}\rangle &= \langle p_1, \ldots, p_n \text{ in}|S|q_1, \ldots, q_\ell \text{ in}\rangle \\
&= \text{termos desconexos} \\
&+ \left(iZ^{-1/2}\right)^{n+\ell} \int d^4y_1 \cdots d^4x_\ell \ \exp\left[i\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot y_k - \sum_{k=1}^{\ell} q_k \cdot x_k\right)\right] \\
&\times (\Box_{y_1} + m^2) \cdots (\Box_{x_\ell} + m^2) \langle 0|T\phi(y_1) \cdots \phi(x_\ell)|0\rangle_c \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\langle p_1, \ldots, p_n \text{ out}|q_1, \ldots, q_\ell \text{ in}\rangle &= \langle p_1, \ldots, p_n \text{ in}|S|q_1, \ldots, q_\ell \text{ in}\rangle \\
&= \text{termos desconexos} \\
&+ Z^{-(n+\ell)/2} \ (2\pi)^4 \delta\left(\sum p_i - \sum q_j\right) \ G^{n+\ell}_{\text{trunc}}(-p_1, \ldots, -p_n, q_1, \ldots, q_\ell) \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

1.2.4 Diagramas irredutíveis

Vimos na Eq. 1.14 que os elementos da matriz S, relacionados com as secções eficazes, são expressos em termos dos diagramas truncados. De entre os diagramas truncados desempenha um papel importante o subconjunto dos diagramas *próprios* ou *irredutíveis* (em inglês *1-Particle Irreducible*), que são os diagramas truncados que permanecem ligados quando uma linha interna arbitrária é cortada. Por exemplo, o diagrama da Figura 1.6[1] é truncado mas não é próprio enquanto que o diagrama da

[1] As barras indicam que as linhas exteriores estão truncadas.

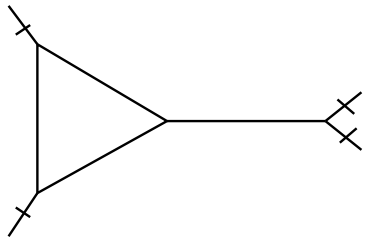


Figura 1.6:

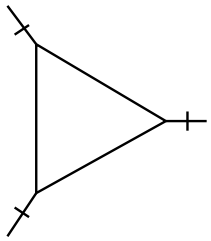


Figura 1.7:

Figura 1.7 é próprio (na teoria $\lambda\phi^3$). Nestas figuras as barras indicam que as linhas exteriores estão truncadas.

A razão pela qual os diagramas truncados não irredutíveis não são importantes é que estes se podem escrever sempre em termos de diagramas irredutíveis de ordem mais baixa (recordar a série que conduz à definição de *self-energy*). É conveniente introduzir uma notação para as funções de Green irredutíveis (soma de todos os diagramas irredutíveis para determinado número de pernas exteriores) onde o factor i é introduzido por conveniência. Na Figura 1.8 as pernas externas estão desenhadas para tornar a figura mais clara. Elas estão de facto truncadas. Dentro desta notação

$$i\Gamma^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) =$$

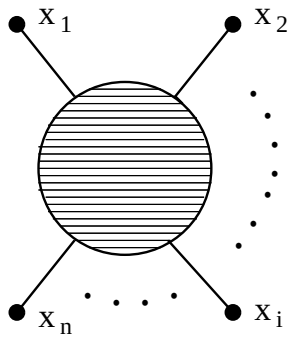


Figura 1.8:

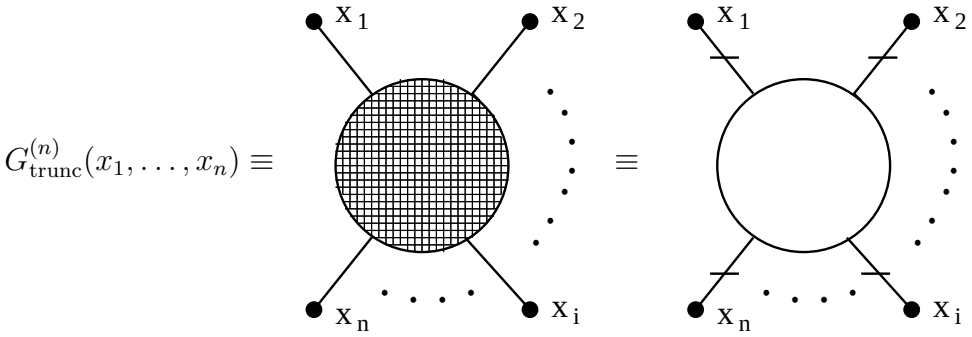


Figura 1.9:

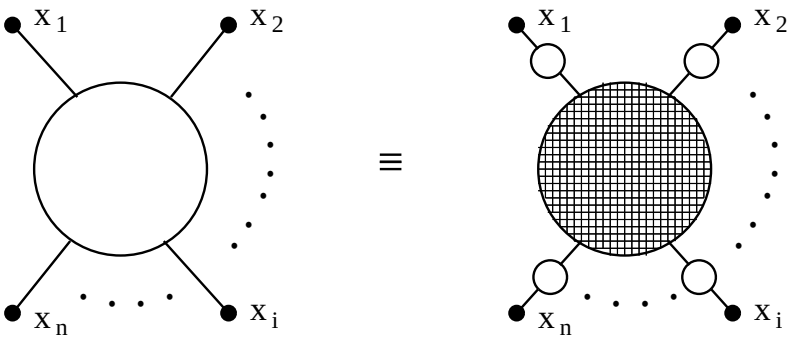


Figura 1.10:

pode por vezes ser conveniente definir um diagrama para as funções de Green truncadas de ordem n. Este está representado na Figura 1.9 ou doutra forma na Figura 1.10. Diagramas semelhantes podem-se definir no espaço dos momentos.

1.3 Funcionais geradores para as funções de Green

Os *funcionais geradores* (FG) das funções de Green representam um papel muito importante em teoria quântica dos campos. De facto a partir deles, por derivação funcional em relação a fontes exteriores podem-se obter todas as funções de Green. Permitem assim tratar ao mesmo tempo um número infinito de funções de Green. O FG das funções de Green completas é dado por

$$Z(J) \equiv \left\langle 0 | T e^{iJ_i\phi_i} | 0 \right\rangle \ , \tag{1.15}$$

onde estamos a usar a notação condensada explicada na introdução

$$J_i\phi_i \equiv \int d^4x \ J(x)\phi(x) \ . \tag{1.16}$$

É fácil de ver que $Z(J)$ gera todas as funções de Green. Se expandirmos a exponencial em 1.15 obtemos

$$\begin{aligned} Z(J) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J_{i_1} \cdots J_{i_n} \langle 0|T\phi_{i_1} \cdots \phi_{i_n}|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} J_{i_1} \cdots J_{i_n} G^n_{i_1 \cdots i_n} \end{aligned} \tag{1.17}$$

As funções de Green são então dadas por

$$G^n_{i_1 \cdots i_n} = \left. \frac{\delta^4 Z}{i\delta J_{i_1} \cdots i\delta J_{i_n}} \right|_{J_i=0} \tag{1.18}$$

O FG das funções de Green conexas é definido através da relação

$$Z(J) = e^{iW(J)} \tag{1.19}$$

ou ainda

$$W(J) = -i \ln Z(J) \ . \tag{1.20}$$

As funções de Green conexas são então obtidas por derivação funcional

$$G^n_{c\ i_1 \cdots i_n} = i \left. \frac{\delta^4 W}{i\delta J_{i_1} \cdots i\delta J_{i_n}} \right|_{J_i=0} \tag{1.21}$$

Antes de mostrarmos que isto é de facto verdade, vamos definir o funcional gerador das funções de Green irredutíveis. Este é definido através da primeira transformada da Legendre de $W(J)$, isto é

$$\Gamma(\phi) \equiv W(J) - J_i \phi_i \tag{1.22}$$

onde

$$\begin{cases} \phi_i &\equiv \frac{\delta W(J)}{\delta J_i} \\ J_i &= -\frac{\delta \Gamma(\phi)}{\delta \phi_i} \end{cases} \tag{1.23}$$

As funções de Green próprias são então dadas por

$$\Gamma^n_{i_1 \cdots i_n} = \left. \frac{\delta^n \Gamma(\phi)}{\delta \phi_{i_|} \cdots \delta \phi_{i_n}} \right|_{\phi=0} . \tag{1.24}$$

Dadas as definições falta-nos agora mostrar que $W(J)$ e $\Gamma(\phi)$ geram efectivamente as funções de Green conexas e próprias. Comecemos por $W(J)$. A demonstração faz-se calculando $G^n_{c\ i_1 \cdots i_n}$ dada por 1.21 e usando a relação 1.20. Vamos fazer somente para $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. As generalizações são imediatas.

- $n = 2$

$$\begin{aligned} G^2_{c\ i_1 i_2} &= i\,\frac{\delta^2 W}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} = \frac{\delta^2 \ln Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} = \frac{\delta}{i\delta J_{i_1}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} \\ &= \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} - \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} \\ &= \frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}}\bigg|_{J_i=0} \end{aligned} \tag{1.25}$$

ou seja

$$G^2_{c\ i_1 i_2} = G^2_{i_1 i_2} \tag{1.26}$$

Para se obter 1.25 fez-se uso dos seguintes resultados

$$\begin{aligned} Z(0) &= 1 \qquad \text{O vácuo está normalizado} \\ \frac{\delta Z}{i\delta J_i} &= \langle 0|T\phi_i|0\rangle = 0 \qquad \text{Não há quebra de simetria} \end{aligned} \tag{1.27}$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned} G^3_{c\ i_1 i_2 i_3} = \Bigg[& \frac{1}{Z}\frac{\delta^3 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2} i\delta J_{i_3}} - \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_2}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_3}} \\ & - \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_2} i\delta J_{i_3}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}} - \frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J_{i_1} i\delta J_{i_3}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}} \\ & + 2\,\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_1}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_2}}\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta J_{i_3}}\Bigg]_{|J_i=0} \end{aligned} \tag{1.28}$$

logo

$$G^3_{i_1 i_2 i_3} = G^3_{c\ i_1 i_2 i_3} \tag{1.29}$$

O caso $n = 4$ é deixado como problema (ver Problema 1.1) A extensão a $n > 4$ é imediata. Mostrámos assim que $W(J)$ dado por 1.20 é o funcional gerador das funções de Green conexas. Mostremos agora que $\Gamma(\phi)$ é o funcional gerador das funções de Green próprias, ou irredutíveis. Para isto necessitamos de dois resultados prévios que passamos a demonstrar. O primeiro baseia-se na relação

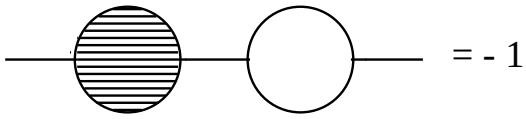


Figura 1.11:

$$\frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \delta_{ik} \tag{1.30}$$

Esta relação é evidente mas podemos obter a partir dela uma relação importante. De facto

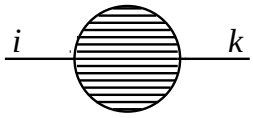
$$\frac{\delta J_i}{\delta J_k} = \frac{\delta J_i}{\delta \phi_\ell}\frac{\delta \phi_\ell}{\delta J_k} = -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_i \delta \phi_\ell}\frac{\delta^2 W}{\delta J_\ell \delta J_k} = -i\Gamma_{i\ell} G_{\ell k} \tag{1.31}$$

ou ainda

$$\Gamma_{i\ell} G_{\ell k} = i\delta_{ik} \tag{1.32}$$

Esta relação fundamental exprime que Γ^2 é o inverso do propagador G^2 (à parte o factor i que tem que ver com convenções). É também útil escrevê-la duma forma diagramática conforme indicado na Figura 1.11. Notar que

$$i\Gamma^{(2)}_{ik} \equiv \tag{1.33}$$



o que explica o desaparecimento do i na equação 1.32.
O segundo resultado diz respeito à seguinte derivada funcional

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} \ . \tag{1.34}$$

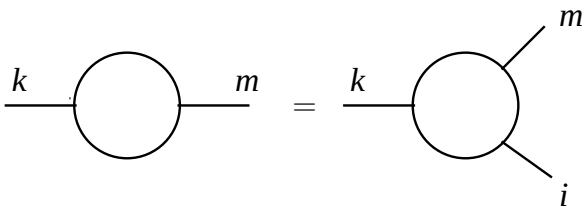
Pretende-se derivar em ordem a J_i quantidades que dependem de J_i indirectamente através de ϕ_k (ver definições 1.23). Obtemos então

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} = \frac{\delta \phi_k}{i\delta J_i}\frac{\delta}{\delta \phi_k} = \frac{\delta^2 W}{\delta J_k i\delta J_i}\frac{\delta}{\delta \phi_k} = G^{(2)}_{ik}\frac{\delta}{\delta \phi_k} \tag{1.35}$$

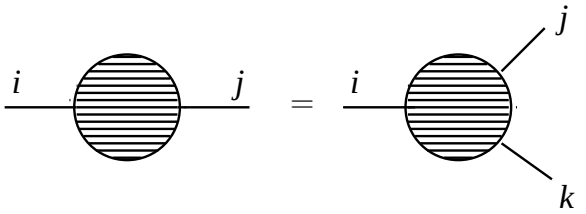
e portanto

$$\frac{\delta}{i\delta J_i} = G_{ik}\frac{\delta}{\delta \phi_k} \tag{1.36}$$

As equações 1.32 e 1.36 permitem obter todas as relações entre as funções de Green próprias e as funções de Green conexas. Esta análise é mais fácil em termos de diagramas desde que se notem as seguintes identidades

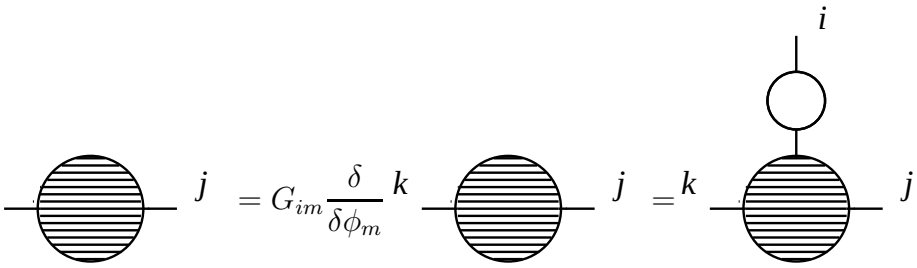
$$\frac{\delta}{i\delta J_i}$$ 

(1.37)

$$\frac{\delta}{\delta\phi_k}$$ 

(1.38)

e

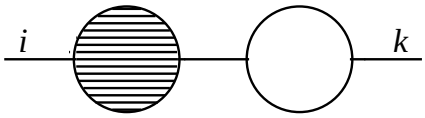
$$\frac{\delta}{i\delta J_i}$$ 

(1.39)

onde se usou 1.36 para estabelecer 1.39. Em todas estas manipulações está subentendido que no final se faz $J = 0$ e $\phi = 0$ nos sítios convenientes. Usemos agora estes métodos para relacionar as funções de Green próprias e conexas para $n = 3$ e $n = 4$.

- $n = 3$

O ponto de partida é a equação 1.32. Aplicamos $\frac{\delta}{i\delta J_\ell}$ a 1.32 e obtemos

$$\frac{\delta}{i\delta J_\ell}$$ 

$= 0$ (1.40)

Usando as equações 1.37 e 1.39 obtemos então o diagrama da Figura 1.12. Multiplicando à esquerda por $G^{(2)}_{mi}$ e usando 1.32 obtemos

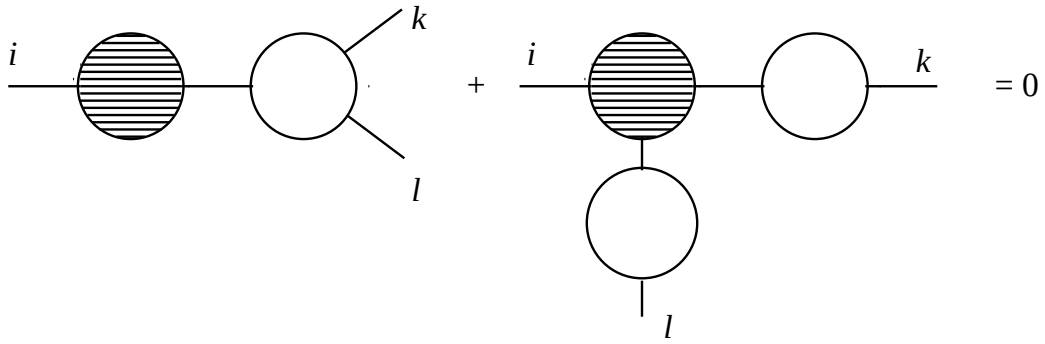
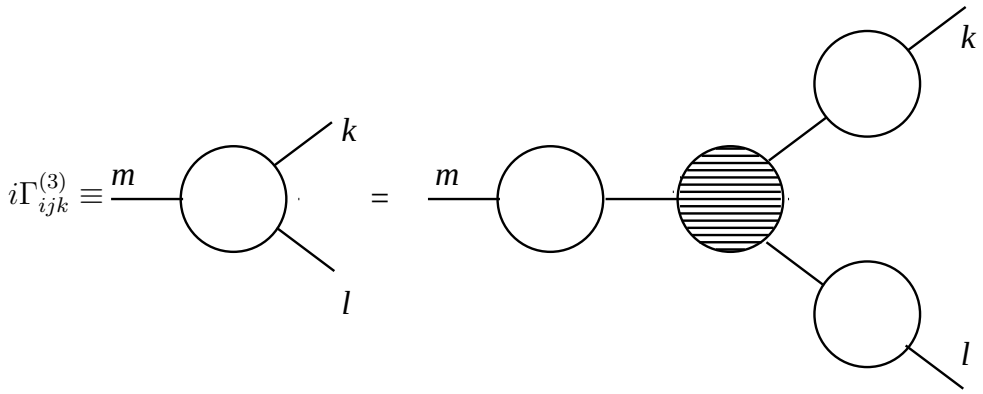


Figura 1.12:



(1.41)

o que mostra que $\Gamma^{(3)}_{ijk}$ é de facto a função de Green própria com 3 pernas exteriores porque para 3 pernas as funções próprias e truncadas coincidem. Para se ver que se trata de facto de funções próprias e não somente truncadas, é preciso ir para $n = 4$ pois aí é que começa a diferença.

- $n = 4$

Partimos da equação 1.41 e derivamos em relação a $\frac{\delta}{i\delta J_n}$. Usando os métodos anteriores obtemos a equação representada na Figura 1.13.

Se usarmos 1.41 para expressar $G^{(3)}_{ijk}$ em termos de $\Gamma^{(3)}_{ijk}$ obtemos a equação diagramática da Figura 1.14 que mostra claramente que $\Gamma^{(4)}_{ijk\ell}$ é de facto a função de Green própria ou irredutível de 4 pernas.

- $n > 4$

É agora trivial continuar o processo para $n > 4$. Para um dado n parte-se da relação para $n-1$ e aplicam-se as equações 1.37 e 1.39. Estes resultados mostram de facto que os objectos mais importantes são as funções de Green irredutíveis, todas

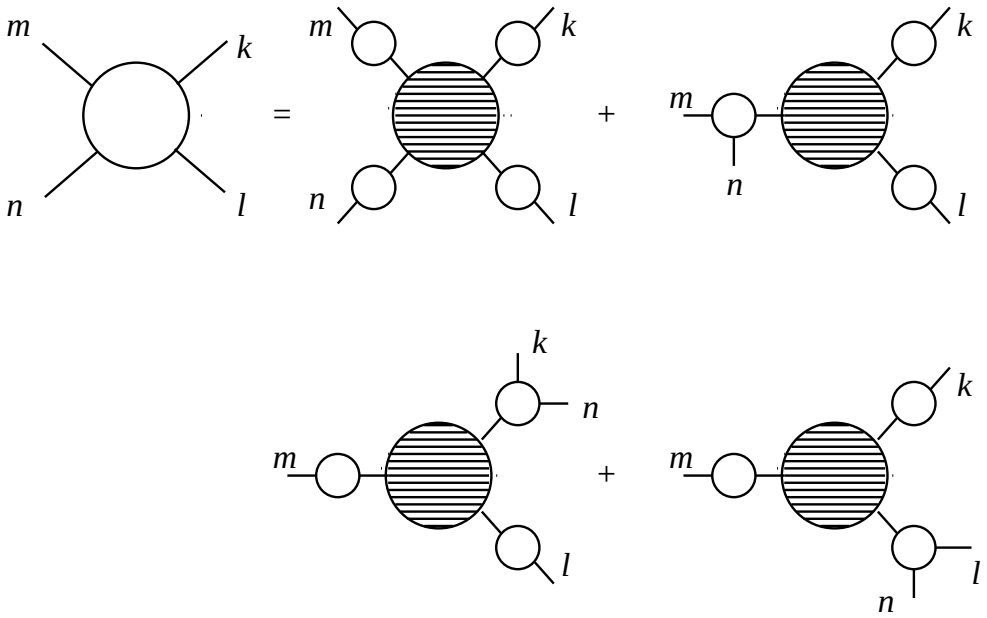


Figura 1.13:

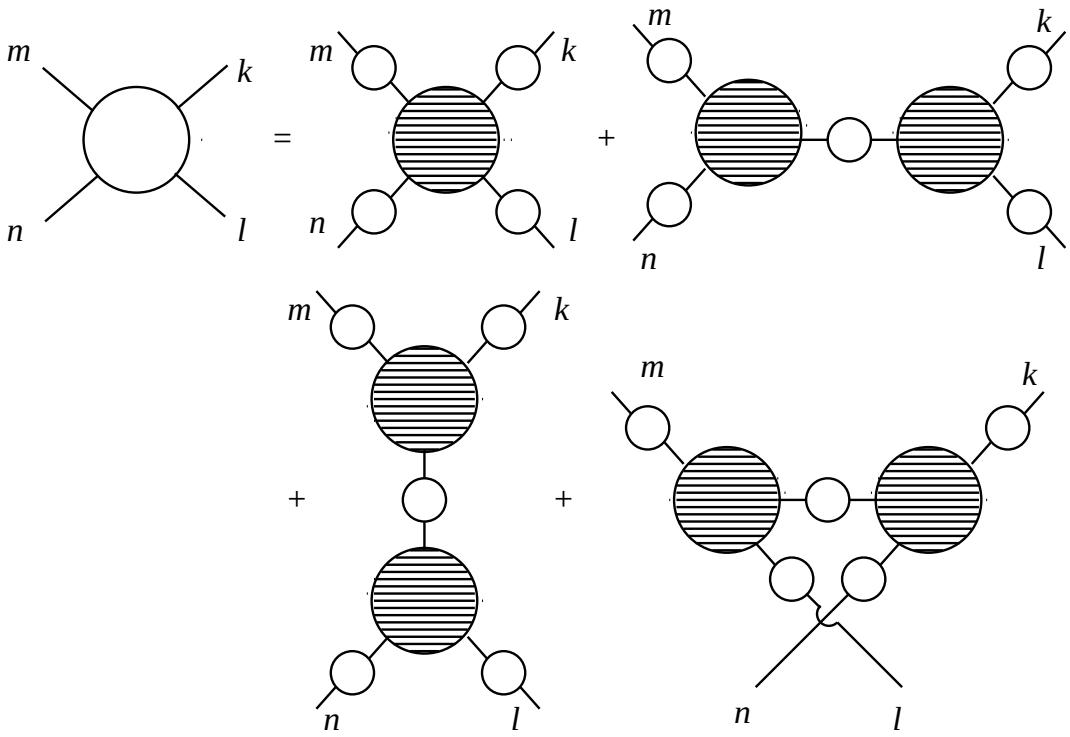


Figura 1.14:

as outras se podem obter a partir delas. Isto é um resultado importante porque reduz imenso o número de diagramas de Feynman que têm que ser calculados.

1.4 Regras de Feynman

O formalismo dos funcionais geradores permite-nos obter facilmente as regras de Feynman para os propagadores e vértices de qualquer teoria com todas as convenções de sinais e factores i correctos. Para isso é necessário mostrar que em ordem mais baixa (diagramas árvore, isto é, sem *loops*) temos

$$\Gamma_{\text{árvore}}(\phi) = \int d^4x \mathcal{L}[\phi] \equiv \Gamma_0(\phi) \tag{1.42}$$

Para os termos de interacção ($n > 2$) esta afirmação é evidente basta lembrar que, por exemplo[2]

$$i\Gamma^{(3)} = G^{(3)}_{\text{árvore}} \tag{1.43}$$

O factor i está de acordo com as convenções usuais para as regras de Feynman (vem do termo $\exp\left(i\int d^4x\mathcal{L}_{int}\right)$ no cálculo das funções de Green). Para o termo quadrático temos, Eq. 1.32,

$$\Gamma^{(2)}_{\text{árvore}}(p) = p^2 - m^2 \tag{1.44}$$

logo

$$\Gamma^{(2)}_{\text{árvore}}(x,y) = \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1\cdot x + p_2\cdot y)}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\ (p_1^2 - m^2) \tag{1.45}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\ \int\ d^4x d^4y \phi(x)\Gamma^{(2)}_{\text{árvore}}(x,y)\phi(y) = \\
&= \frac{1}{2}\ \int\ d^4x d^4y \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{i(p_1\cdot x + p_2\cdot y)}(2\pi)^4\delta(p_1+p_2)(p_1^2-m^2)\phi(x)\phi(y) \\
&= \frac{1}{2}\ \int\ d^4x \phi(x)(-\Box - m^2)\phi(x) = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - m^2\phi^2\right)
\end{aligned} \tag{1.46}$$

o que mostra que $\Gamma_{\text{árvore}}$ é de facto a acção. Daqui resultam as *receitas* seguintes para encontrar as regras de Feynman duma teoria qualquer da qual se conhece o Lagrangeano.

[2]Para n=4 temos $i\Gamma^{(4)}=G^{(4)}-$ *partes irredutíveis* e é claro que $i\Gamma^{(4)}_{\text{árvore}}$ gera os vértices.

1.4.1 Propagadores

i) Calcular

$$\Gamma_0^{(2)}(x_i, x_j) = \frac{\delta^2 \Gamma_0(\phi)}{\delta\phi(x_i)\delta\phi(x_j)} \tag{1.47}$$

ii) Calcular a Transformada de Fourier (TF) e obter $\Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j)$ através da definição

$$(2\pi)^4 \delta(p_i + p_i)\Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j) = \int d^4x_i d^4x_j e^{-i(p_i \cdot x_i + p_j \cdot x_j)} \Gamma_0^{(2)}(x_i, x_j) \tag{1.48}$$

onde os momentos são *incoming*.

iii) O propagador de Feynman G_F^0 é então obtido através de

$$G_{Fij}^{(0)} = i[\Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j)]^{-1} \tag{1.49}$$

1.4.2 Vértices

i) Calcular

$$\Gamma_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma_0}{\delta\phi(x_1) \cdots \delta\phi(x_n)} \tag{1.50}$$

ii) Calcular a TF definida por

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_n)\Gamma_0^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{-i(p_1 \cdot x_1 \cdots p_n x_n)} \Gamma_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.51}$$

iii) O vértice é dado por

$$i\Gamma_0^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \tag{1.52}$$

1.4.3 Exemplo: Electrodinâmica escalar

A electrodinâmica escalar é a teoria que descreve um campo escalar carregado em interacção com o campo electromagnético. É definida pelo Lagrangeano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + ieA^n)\phi - m\phi^*\phi + \mathcal{L}_{em} - V(\phi) \\ &= \mathcal{L}_{escalar} + \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int} - V(\phi) \end{aligned} \tag{1.53}$$

onde

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{escalar} &= \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \\
\mathcal{L}_{em} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
\mathcal{L}_{int} &= -ie(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) A^\mu + e^2 \phi^* \phi A_\mu A^\mu \\
V(\phi) &= \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2
\end{aligned} \tag{1.54}
$$

Os propagadores são os habituais, vejamos somente que tipos de vértices aparecem. Há dois vértices entre os escalares e o fotão que passamos a estudar.

• *Vértice triplo*

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}_\mu(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\delta^3 \Gamma_0}{\delta\phi^*(x_1)\delta\phi(x_2)\delta A^\mu(x_3)} \\
&= -ie \int d^4x \delta^4(x - x_1)(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)\delta^4(x - x_2)\delta^4(x - x_3)
\end{aligned} \tag{1.55}
$$

logo

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^4 \delta^4(p + q + k) \qquad & \Gamma_\mu(p, q, k) = -ie \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 e^{-i(p\cdot x_1 + q\cdot x_2 + k\cdot x_3)} \\
& \delta^4(x - x_1)(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)\delta^4(x - x_2)\delta^4(x - x_3) \\
& = -ie \int d^4x d^4x_2 e^{-i[(p+k)\cdot x + q\cdot x_2]} \partial_\mu \delta^4(x - x_2) \\
& + ie \int d^4x d^4x_1 e^{-i[p\cdot x_1 + (q+k)\cdot x]} \partial_\mu \delta^4(x - x_1) \\
& = -ie[i(p + k)_\mu - i(q + k)_\mu](2\pi)^4 \delta^4(p + k + q) \\
& = -ie[ip_\mu - iq_\mu](2\pi)^4 \delta^4(p + k + q)
\end{aligned} \tag{1.56}
$$

logo o vértice[3] é

$$
i\Gamma_\mu(p, q, k) = ie[p_\mu - q_\mu] = -ie(q_\mu - p_\mu) \tag{1.57}
$$

e está representado na Figura 1.15

• *Vértice quártico (seagull)*

De acordo com a definição obtemos

[3]Deste exemplo podemos abstrair a seguinte *regra Prática* para interacções que contenham derivadas. Um termo $\partial_\mu \phi(x)$ no Lagrangeano é equivalente a $-ip^\mu$ onde p^μ é o momento *incoming* associado a ϕ.

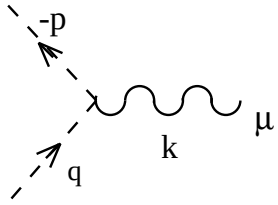


Figura 1.15:

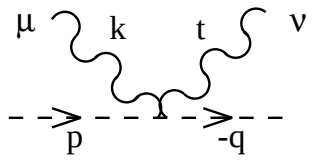


Figura 1.16:

$$\begin{aligned}\Gamma^{(4)}_{\mu}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{\delta^4\Gamma_0}{\delta\phi^*(x_1)\delta\phi(x_2)\delta A^{\mu}(x_3)\delta A^{\nu}(x_4)} \\ &= 2e^2\delta^4(x_-x_1)\delta^4(x_-x_2)\delta^4(x-x_3)\delta^4(x-x_4)g_{\mu\nu} \quad (1.58)\end{aligned}$$

e fazendo a TF obtemos finalmente

$$\Gamma^{(4)}_{\mu\nu}(p,q,k,t) = 2e^2 g_{\mu\nu} \quad (1.59)$$

a que corresponde o diagrama da Figura 1.16

1.5 Representação dos FG em termos de integrais de caminho

1.5.1 Mecânica Quântica de Sistemas de n graus de liberdade

Comecemos por recordar os resultados conhecidos para sistemas com 1 grau de liberdade. No Apêndice A faz-se uma introdução à quantificação via integral de caminho. Lá poderão ser encontradas as justificações para os resultados que usaremos no seguimento. O resultado fundamental é para a amplitude de transição

$$\langle q';t'|q;t\rangle = N\int \mathcal{D}(q)e^{i\int_t^{t'} dtL(q,\dot{q})} = N\int \mathcal{D}(q)e^{iS} \quad (1.60)$$

onde N é um factor de normalização e $\mathcal{D}(q)$ é uma forma simbólica de representar a medida de integração que é de facto um limite complicado (ver Apêndice A). Outro resultado importante diz respeito aos elementos de matriz do produto ordenado no tempo de operadores. Seja

$$O(t_1, \ldots, t_n) = T[O_1^H(t_1)O_2^H(t_2)...O_n^H(t_n)] \tag{1.61}$$

tal que

$$t' \geq (t_1, t_2, \ldots, t_n) \geq t \tag{1.62}$$

Então

$$\langle q'; t'| \, O(t_1, \ldots, t_n) \, |q; t\rangle = N \int \mathcal{D}(q) O_1(q(t_1)) \cdots O_n(q(t_n)) e^{iS} \tag{1.63}$$

onde se admitiu que os operadores O_i são diagonais no espaço das coordenadas. Para a generalização à Teoria do Campo os objectos importantes não são as amplitudes de transição mas as funções de Green e os seus funcionais geradores. Consideremos por exemplo a função de Green

$$G(t_1, t_2) \equiv \langle 0| \, T(Q^H(t_1)Q^H(t_2)) \, |0\rangle \tag{1.64}$$

onde $|0\rangle$ é o estado de base e $Q^H(t)$ é o operador coordenada na representação de Heisenberg. Para escrevermos 1.57 em termos dum integral de caminho introduzimos conjuntos completos de estados e escrevemos

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2) &= \int dq \; dq' \, \langle 0|q'; t'\rangle \, \langle q; t'| \, T(Q^H(t_1)Q^H(t_2)) \, |q; t\rangle \, \langle q; t|0\rangle \\ &= \int dq dq' \phi_0(q't') \phi_0^*(q, t) \int \mathcal{D}(q) q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} L d\tau} \end{aligned} \tag{1.65}$$

onde

$$\phi_0(q, t) = \langle 0|q; t\rangle = \phi_0(q) e^{-iE_0 t} \tag{1.66}$$

A presença na expressão 1.65 das funções onde do estado base torna a expressão pouco prática. Podemos removê-los do modo seguinte. Consideremos o elemento de matriz

$$\begin{aligned} &\langle q'; t'| \, O(t_1 t_2) \, |q; t\rangle \\ &= \int dQ \; dQ' \, \langle q'; t'|Q'; T'\rangle \, \langle Q'; T'| \, O(t_1, t_2) \, |Q; T\rangle \, \langle Q; T|q; t'\rangle \end{aligned} \tag{1.67}$$

onde

$$O(t_1, t_2) = T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))$$
$$t' \geq T' \geq (t_1, t_2) \geq T \geq t \tag{1.68}$$

Sejam $|n\rangle$ os estados próprios com energia E_n e função de onda $\phi_n(q)$ isto é

$$\begin{aligned} H\,|n\rangle &= E_n\,|n\rangle \\ \langle q|n\rangle &= \phi_n^*(q) \end{aligned} \tag{1.69}$$

Então

$$\begin{aligned} \langle q';t'|Q';T'\rangle &= \langle q'|\, e^{iH(t'-T')}\,|Q'\rangle \\ &= \sum_n \langle q'|n\rangle\,\langle n|\, e^{iH(t'-T')}\,|Q'\rangle \\ &= \sum_n \phi_n^*(q')\phi_n(Q')e^{-iE_n(t'-T')} \end{aligned} \tag{1.70}$$

Consideremos agora o limite $t' \to -i\infty$. Então

$$\lim_{t'\to -i\infty} \langle q';t'|Q';T'\rangle = \phi_0^*(q')\phi_0(Q')e^{-E_0|t'|}e^{iE_0T'} \tag{1.71}$$

De modo semelhante

$$\lim_{t\to i\infty} \langle Q;T|q;t\rangle = \phi_0(q)\phi_0^*(Q)e^{-E_0|t|}e^{-iE_0T} \tag{1.72}$$

Aplicando estes limites a 1.61 obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t'\to -i\infty} \quad & \lim_{t\to i\infty} \langle q';t'|\, O(t_1t_2)\,|q;t\rangle \\ = & \int dQdQ'\phi_0^*(q')\phi_0(Q')e^{-E_0|t'|}e^{it_0T'} \\ & \qquad \langle Q';T'|\, O(t_1,t_2)\,|Q;T\rangle\, \phi_0(q)\phi_0^*(Q)e^{-E_0|t|}e^{-it_0T} \\ = & \phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{-E_0|t'|}e^{-E_0|t|} \\ & \int dQdQ'\phi_0(Q',T')\phi_0^*(Q,T)\,\langle Q';T'|\, O(t_1,t_2)\,|Q;T\rangle \end{aligned} \tag{1.73}$$

Usando 1.65 obtemos o resultado importante

$$\lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty} \langle q';t'|\, O(t_1t_2)\,|q;t\rangle = \phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{-E_0|t'|}e^{-E_0|t|}G(t_1,t_2) \tag{1.74}$$

Por outro lado

$$\lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}\langle q';t'|q;t\rangle = \phi_0^*(q')\phi_0(q)e^{-E_0|t'|}e^{t_0|t|} \tag{1.75}$$

pelo que finalmente podemos escrever

$$G(t_1,t_2) = \lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}\left[\frac{\langle q';t'|\,T(Q^H(t_1)Q^H(t_2))\,|q;t\rangle}{\langle q';t'|q;t\rangle}\right] \tag{1.76}$$

Usando agora a expressão 1.63 podemos finalmente escrever $G(t_1,t_2)$ em termos dum integral de caminho

$$G(t_1,t_2) = \lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}\frac{1}{\langle q';t'|q;t\rangle}\int \mathcal{D}(q)q(t_1)q(t_2)e^{i\int_t^{t'}Ld\tau} \tag{1.77}$$

Este resultado é facilmente generalizado para funções de Green com *n-pontos*,

$$\begin{aligned} G(t_1,\ldots,t_n) &= \langle 0|\,T(q(t_1)\cdots q(t_n))\,|0\rangle \\ &= \lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}\frac{1}{\langle q';t'|q;t\rangle}\int \mathcal{D}(q)q(t_1)\cdots q(t_n)e^{i\int_t^{t'}Ld\tau} \end{aligned} \tag{1.78}$$

É agora fácil de ver que todas as funções de Green podem ser obtidos a partir do funcional gerador

$$Z[J] = \lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}\frac{1}{\langle q';t'|q;t\rangle}\int \mathcal{D}(q)e^{i\int_t^{t'}[L(q,\dot{q})+Jq]d\tau} \tag{1.79}$$

por derivação funcional

$$G(t_1,\ldots,t_n) = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{i\delta J(t_1)\cdots i\delta J(t_n)}\right|_{J=0} \tag{1.80}$$

A expressão 1.79 para o funcional gerador mostra que ele é a amplitude de transição entre o estado base no instante t e o estado base no instante t' na presença duma fonte exterior

$$Z[J] = \langle 0|0\rangle_J \tag{1.81}$$

com a normalização $Z[J=0]=1$.

Para um sistema com N graus de liberdade temos a generalização de 1.79

$$Z[J_1,\ldots,J_n] = \lim_{t'\to -i\infty}\lim_{t\to i\infty}N\int \mathcal{D}(q_i)e^{i\int_t^{t'}d\tau[L(q_i,\dot{q}_i)+\sum_{i=1}^N J_iq_i]} \tag{1.82}$$

Notas

- Na equação anterior os limites nos tempos t e t' são imaginários. Isto quer dizer que as funções de Green bem definidas são as funções de Green Euclidianas. Para a teoria de campos isto corresponde à prescrição $m^2 - i\epsilon$.

- Na equação 1.82 não escrevemos explicitamente a normalização. Ela é obviamente escolhida para que $Z[0, \ldots, 0] = 1$ mas como veremos, para as funções de Green conexas em teoria dos campos a normalização não é relevante pelo que não nos vamos preocupar mais com ela.

1.5.2 Teoria do Campo

Para obter o funcional gerador das funções de Green em Teoria dos Campos procedemos da forma heurística usual

$$\begin{aligned} t &\rightarrow x^\mu \\ q(t) &\rightarrow \phi(x) \\ \mathcal{D}(q) &\rightarrow \mathcal{D}(\phi) \\ L(q_i, \dot{q}_i) &\rightarrow \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \end{aligned} \tag{1.83}$$

Então obtemos

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}(\phi) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J(x)\phi(x)]} \tag{1.84}$$

O limite em 1.82 recorda-nos que os integrais têm que se continuar analiticamente para o espaço euclidiano ou equivalentemente que se tem que fazer a prescrição $m^2 - i\epsilon$.

A expressão 1.78 é a expressão fundamental que procurávamos para o funcional gerador das funções de Green completas. É fácil de ver que para o funcional gerador das funções de Green conexas

$$W(J) = -i \ln Z(J) \tag{1.85}$$

a normalização é irrelevante (pois não depende de J). Uma demonstração mais rigorosa da expressão 1.84 pode ser encontrada no Apêndice B.

1.5.3 Aplicações

Uma vez conhecido o funcional gerador $Z(J)$ são conhecidas todas as funções de Green e portanto qualquer problema em Teoria dos Campos. Pode-se então perguntar em que condições é possível calcular 1.84. Como só se sabem fazer exactamente integrais gaussianos a resposta é que só se pode calcular 1.78 em situações triviais,

sem interacções no Lagrangeano. Contudo as vantagens de 1.84 resultam de dois aspectos:

- *Manipulações formais*
  Relações entre funções de Green que tenham a ver com propriedades de simetria (identidades de Ward) são muito facilmente deduzidas por manipulações dos funcionais geradores. Aqui a forma 1.78 é particularmente útil como veremos nas secções 4 e 5.

- *Teoria de perturbações*
  A expressão 1.84 permite imediatamente desenvolver a teoria de perturbações.

Como exemplo do ponto *ii)* consideremos o Lagrangeano para um campo escalar que por simplicidade tomaremos real,

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_I(\phi) \tag{1.86}$$

onde $\mathcal{L}_0(\phi)$ é quadrático, isto é

$$\mathcal{L}_0(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{1.87}$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}(\phi) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_I(\phi)+J\phi]} \\ &= \int \mathcal{D}(\phi) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_I(\phi)]}\ e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_0(\phi)+J\phi]} \\ &= e^{i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)} Z_0[J] \end{aligned} \tag{1.88}$$

ou ainda

$$Z[J] = \exp\left[i\int d^4x\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right]\ Z_0[J] \tag{1.89}$$

onde

$$Z_0[J] = N\int \mathcal{D}(\phi) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_0+J\phi]}\ . \tag{1.90}$$

A utilidade desta expressão resulta do facto de que por um lado $Z_0[J]$ pode ser calculado exactamente, porque é quadrático nos campos, e por outro se $\mathcal{L}_I(\phi)$ tiver um parâmetro pequeno a exponencial pode ser desenvolvida em série nesse parâmetro e o funcional gerador $Z[J]$ obtido até à ordem que se pretender em teoria das perturbações.

1.5.4 Exemplo: Teoria de perturbações para $\lambda\phi^4$

Para se ver a ligação com os resultados usuais vamos considerar como exemplo a teoria dum campo escalar em que a interacção é

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\,\phi^4\ . \tag{1.91}$$

O funcional gerador $Z[J]$ é dado por

$$Z[J] = \mathcal{N}\exp\left\{(-i\lambda)\frac{1}{4!}\int d^4x\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)^4\right\}Z_0[J] \tag{1.92}$$

onde (ver problema 1.2)

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta(x,y)J(y)\right\} \tag{1.93}$$

A normalização $\mathcal{N}$ é escolhida para que $Z[0] = 1$, como veremos adiante. Desenvolvemos a exponencial em série na constante de acoplamento:

$$Z[J] = \mathcal{N}Z_0[J]\left\{1 + (-i\lambda)Z_1'[J] + (-i\lambda)^2 Z_2'[J] + \cdots\right\} \tag{1.94}$$

onde

$$Z_1'[J] \equiv Z_0^{-1}[J]\left\{\frac{1}{4!}\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4\right\}Z^0[J] \tag{1.95}$$

e

$$\begin{aligned}
Z_2'[J] &\equiv \frac{1}{2}Z_0^{-1}[J]\left\{\frac{1}{4!}\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4\right\}^2 Z^0[J] \\
&= \frac{1}{2}Z_0^{-1}[J]\left\{\frac{1}{4!}\int d^4x\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)^4\right\}(Z_0 Z_1') \\
&= \frac{1}{2}\left(Z_1'[J]\right)^2 + \frac{1}{2}Z_0^{-1}[J]\,\frac{1}{4!}\int d^4x\left\{4\frac{\delta^3 Z_0}{\delta J^3(x)}\frac{\delta Z_1'}{\delta J(x)}\right. \\
&\qquad \left. +6\frac{\delta^2 Z_0}{\delta J^2(x)}\frac{\delta^2 Z_1'}{\delta J^2(x)} + 4\frac{\delta Z_0}{\delta J(x)}\frac{\delta^3 Z_1'}{\delta J^3(x)} + \frac{\delta^4 Z_1'}{\delta J^4(x)}\right\}
\end{aligned} \tag{1.96}$$

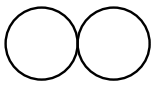
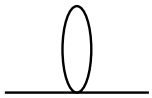
Obtemos

$$Z_1'[J] =$$

$$= \frac{1}{4!}\int d^4x \Big[3\Delta(x,x)\Delta(x,x) - 3!\Delta(x,x)\int d^4y_1 d^4y_2 \Delta(x,y_1)\Delta(x,y_2)J(y_1)J(y_2)$$

$$+ \int d^4y_1 \cdots d^4y_4 \Delta(x,y_1)\Delta(x,y_2)\Delta(x,y_3)\Delta(x,y_4)J(y_1)J(y_2)J(y_3)J(y_4)\Big] \tag{1.97}$$

Este resultado pode ser representado diagramaticamente na forma seguinte

$Z_1' = \frac{1}{8}$  $- \frac{1}{4}$  $+ \frac{1}{4!}$  (1.98)

Para Z_2' virá

$$\begin{aligned}
& Z_2'[J] \\
= \; & \frac{1}{2}\left(Z_1'[J]\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}\right)^2 4! \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2) \\
& + \left(\frac{1}{4!}\right)^2 \Big[-72 \int d^4x_2 \int d^4x_1 \Delta(x_1,x_2) \int d^4y_1 \Delta(x_1,y_1)J(y_1) \\
& \qquad \Delta(x_1x_2)\Delta(x_2,x_2)\int d^4y_2 \Delta(x_2,y_2)J(y_2) \\
& \quad +24 \int d^4x_2 d^4x_1 \Delta(x_1,x_1) \int d^4y_1 \Delta(x_1,y_1)J(y_1)\Delta(x_1,y_2) \\
& \qquad \int d^4y_2 \Delta(x_2,y_1)J(y_2) \int d^4y_3 \Delta(x_2,y_3)J(y_2) \int d^4y_4 \Delta(x_1,y_4)J(y_4) \\
& \quad +24 \int d^4x_2 \int d^4x_1 \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_4 \Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,y_1) \\
& \qquad \Delta(x_1,y_2)\Delta(x_1,y_2)\Delta(x_2,x_2)\Delta(x_2,y_4)J(y_1)\cdots J(y_4) \\
& \quad -8 \int d^4x^2 \int d^4x_1 \int d^4y_1 \cdots d^4y_6 \Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,y_1)\Delta(x_1y_2) \\
& \qquad \Delta(x_1,y_3)\Delta(x_2,y_4)\Delta(x_2,y_5)\Delta(x_2,y_6)J(y_1)\cdots J(y_6) \\
& \quad +36 \int d^4x_2 d^4x_1 \Delta(x_1,x_1)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_2) \\
& \quad -36 \int d^4x_2 d^4x_1 \Delta(x_1,x_1)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2) \int d^4y_1 d^4y_2 \Delta(x_2,y_1)
\end{aligned}$$

$$\Delta(x_2,y_2)J(y_1)J(y_2)$$

$$-36\int d^4x_2d^4x_1d^4y_1d^4y_2\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_1)$$

$$\Delta(x_1,y_1)\Delta(x_1,y_2)J(y_1)J(y_2)$$

$$+36\int d^4x_2d^4x_1d^4y_1\cdots d^4y_4\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,y_1)$$

$$\Delta(x_1,y_2)\Delta(x_2,y_3)\Delta(x_2,y_4)J(y_1)\cdots J(y_4)$$

$$-48\int d^4x_2dy_1d^4y_1d^4y_2\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_1,x_2)$$

$$\Delta(x_1,y_1)\Delta(x_2,y_2)J(y_1)J(y_2)\Big] \tag{1.99}$$

ou seja:

$$Z_2'[J]$$

$$=\frac{1}{2}\left(Z_1'[J]\right)^2+\frac{1}{2\cdot 4!}\int d^4x_1d^4x_2\Delta^4(x_1,x_2)$$

$$+\frac{3}{2\cdot 4!}\int d^4x_1d^4x_2\Delta(x_1,x_1)\Delta^2(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_2)$$

$$-\frac{1}{2\cdot 3!\cdot 3!}\int d^4x_1d^4x_2d^4y_1\cdots d^4y_6\Delta(y_1,x_1)\Delta(y_2,x_1)\Delta(y_3,x_1)$$

$$\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_2,y_4)\Delta(x_2,y_5)\Delta(x_2,y_6)J(y_1)\cdots J(y_6)$$

$$+\frac{1}{2\cdot 4!}\int d^4x_1d^4x_2d^4y_1\cdots d^4y_4\Delta(y_1,x_1)\Delta(x_1,x_1)\Delta(x_1,x_2)$$

$$\Delta(x_2,y_2)\Delta(x_2,y_3)\Delta(x_2,y_4)J(y_1)\cdots J(y_4)$$

$$+\frac{3}{2\cdot 4!}\int d^4x_1d^4x_2d^4y_1\cdots d^4y_4\Delta(y_1,x_1)\Delta(y_2,x_1)\Delta^2(x_1,x_2)$$

$$\Delta(x_2,y_3)\Delta(x_2,y_4)J(y_1)\cdots J(y_4)$$

$$-\frac{1}{8}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1,x_1)\Delta(x_1,x_1)\Delta(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_2)$$

$$\Delta(x_2,y_2)J(y_1)J(y_2)$$

$$-\frac{1}{8}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1,x_1)\Delta^2(x_1,x_2)\Delta(x_2,x_2)\Delta(x_1,y_2)J(y_1)J(y_2)$$

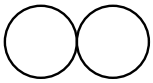
$$-\frac{1}{12}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \Delta(y_1,x_1)\Delta^3(x_1,x_2)\Delta(x_2,y_2)J(y_1)J(y_2) \tag{1.100}$$

Vamos agora calcular a normalização até à segunda ordem em teoria de perturbações. Para isso a condição $Z[0]=1$ dá:

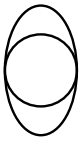
$$1 = \mathcal{N}\left[1 + (-i\lambda)n_1 + (-i\lambda)^2 n_2 + \cdots\right] \tag{1.101}$$

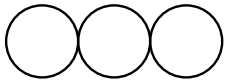
onde

$$n_1 = \frac{1}{8} \tag{1.102}$$



$$n_2 = \frac{1}{2}n_1^2 + \frac{1}{2\cdot 4!} + \frac{3}{2\cdot 4!} \tag{1.103}$$





Obtemos portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \frac{1}{1+(-i\lambda)n_1+(-i\lambda)^2 n_2+\cdots}\\ &= 1-(-i\lambda)n_1-(-i\lambda)^2(n_2-n_1^2)+\cdots\end{aligned} \tag{1.104}$$

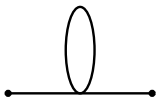
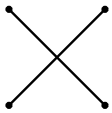
Então

$$\begin{aligned}Z[J] &= Z_0[J]\left\{1-(-i\lambda)n_1-(-i\lambda)^2(n_2-n_1^2)+\cdots\right\}\\ &\qquad \left\{1+(-i\lambda)Z_1'+(-i\lambda)^2 Z_2'+\cdots\right\}\\ &= Z_0[J]\left\{1+(-i\lambda)(Z_1'-n_1)+(-i\lambda)^2(Z_2'-n_2+n_1^2-n_1Z_1')+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{1.105}$$

Definindo agora

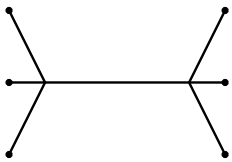
$$
\begin{aligned}
Z_1 &\equiv Z_1' - n_1 \\
Z_2 &\equiv Z_2' - n_2 + n_1^2 - n_1 Z_1' = Z_2' - n_2 - n_1 Z_1
\end{aligned}
\tag{1.106}
$$

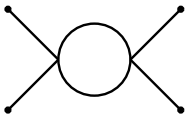
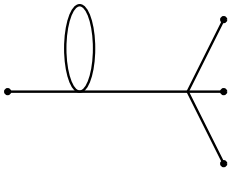
obtemos

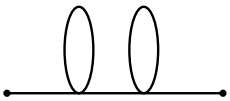
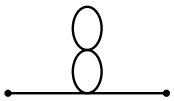
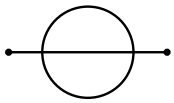
$$Z_1[J] = -\frac{1}{4}$$  $$+\frac{1}{4!}$$  (1.107)

e

$$Z_2[J]$$

$$= \frac{1}{2}\left(Z_1[J]\right)^2 + \frac{-1}{2!\ 3!\ 3!}$$ 

$$+\frac{1}{2!\ 4!}$$  $$+\ \frac{3}{2!\ 4!}$$ 

$$-\frac{1}{8}$$  $$-\ \frac{1}{8}$$  $$-\ \frac{1}{12}$$  (1.108)

com $Z_1[J] = Z_2[0] = 0$. Logo o funcional gerador

$$Z[J] = Z_0[J]\left\{1 + (-i\lambda)Z_1[J] + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \cdots\right\} \tag{1.109}$$

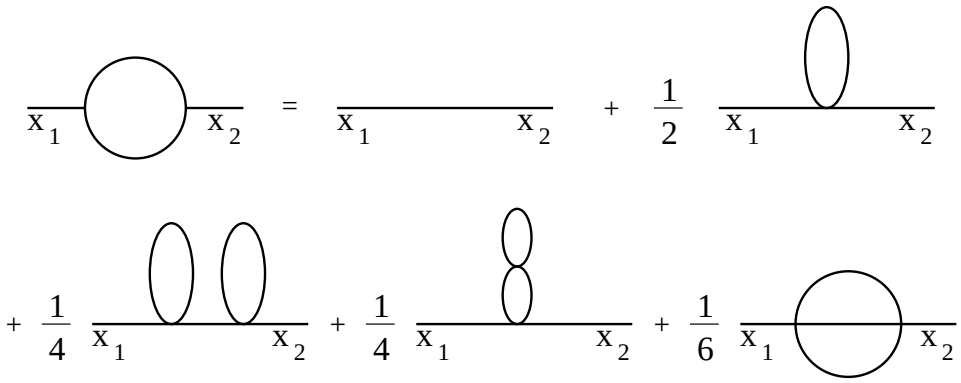


Figura 1.17:

é automaticamente normalizado se desprezarmos todas as amplitudes vácuo-vácuo, designadas por *bubles*. Para verificarmos que a expressão anterior reproduz os resultados da teoria de perturbações usual calculemos como exemplo o propagador até à ordem λ^2. Obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta'(x_1,x_2) &= \left.\frac{\delta^2 Z[J]}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)}\right|_{J=0} \\
&= -\left.\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} - (-i\lambda)\left.\frac{\delta^2 Z_1[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} - (-i\lambda)^2\left.\frac{\delta^2 Z_2[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} \\
&= \Delta(x_1,x_2) \;+\; (-i\lambda)\frac{1}{2}\int d^4y\Delta(x_1,y)\Delta(x_2,y)\Delta(y,y) \\
&+(-i\lambda)^2\int d^4y_1 d^4y_2\left[\frac{1}{4}\Delta(x_1,y_1)\Delta(y_1,y_1)\Delta(y_1,y_2)\Delta(y_2,y_2)\Delta(y_2,x_2)\right. \\
&\left.+\frac{1}{4}\Delta(x_1,y_1)\Delta^2(y_1,y_2)\Delta(y_2,y_2)\Delta(y_1,x_2)+\frac{1}{6}\Delta(x_1,y_1)\Delta^3(y_1,y_2)\Delta(y_2,x_2)\right]
\end{aligned}
\tag{1.110}
$$

Em termos diagramáticos temos a situação da Figura 1.17

Continuando a estudar o exemplo da teoria $\lambda\phi^4$ passemos a analisar o funcional gerador das funções de Green conexas $W[J]$. É fácil de ver que termos do tipo $Z_1^2[J]$ correspondem a diagramas disconexos contidos em $Z[J]$. Vamos ver que elas desaparecem no funcional $W[J]$. Temos

$$
\begin{aligned}
iW[J] &= \ln Z[J] = \\
&= \ln Z_0[J] + \ln\left\{1 + (-i\lambda)Z_1[J] + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= iW_0[J] + (-i\lambda)Z_1[J] - \frac{1}{2}(-i\lambda)^2\left(Z_1[J]\right)^2 + (-i\lambda)^2 Z_2[J] + \cdots \\
&= iW_0[J] + (-i\lambda)Z_1[J] + \left\{-i\lambda)^2(Z_2[J] - \frac{1}{2}\left(Z_1[J]\right)^2\right\} + \cdots \\
&\equiv i\left\{W_0[J] + (-i\lambda)W_1[J] + (-i\lambda)^2 W_2[J] + \cdots\right\} \qquad (1.111)
\end{aligned}
$$

com

$$
\begin{aligned}
iW_1[J] &= Z_1[J] \\
iW_2[J] &= Z_2[J] - \frac{1}{2}\left(Z_1[J]\right)^2 \qquad (1.112)
\end{aligned}
$$

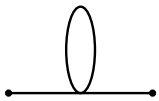
Portanto os diagramas disconexos contidos em $Z_2[J]$ são subtraídos e W_1 e W_2 contém somente diagramas conexos como seria de esperar.

1.5.5 Factores de simetria

Depois de efectuar as derivadas em ordem a J para obter numa dada função de Green os números que resultam são os chamados factores de simetria. Por exemplo para a correcção a *1-loop* ao propagador obtemos

$$
\begin{aligned}
\Delta'(x_1, x_2) &= \left.\frac{\delta^2 Z}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)}\right|_{J=0} = \\
&= \left.\frac{\delta^2 Z_0}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)}\right|_{J=0} + (-i\lambda)\left.\frac{\delta^2 Z_1}{i\delta J(x_1) i\delta J(x_2)}\right|_{J=0} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$= \Delta(x_1, x_2) + \frac{1}{2}$$



$$+ \cdots \qquad (1.113)$$

O factor $\frac{1}{2}$ é o factor de simetria correspondente àquele diagrama. Como vimos o método de obter as funções de Green a partir do funcional gerador *automaticamente* dá os estes factores correctos. Contudo na maior parte das aplicações é mais fácil aplicar directamente as regras de Feynman e então uma regra para os factores de simetria deve ser fornecida.

Regra para os factores de simetria: O factor de simetria S dum dado diagrama

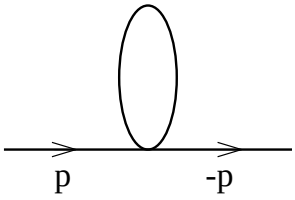


Figura 1.18:

é dado por

$$S = \frac{N}{D} \tag{1.114}$$

onde N é o # de maneiras diferentes de formar o diagrama e D é o produto dos factores de simetrias de cada vértice e do número de permutações de vértices iguais.

Como exemplo consideremos o diagrama que contribui para o propagador a *1-loop*, representado na Figura 1.18.

Então de acordo com a regra obtemos

$$S = \frac{4 \times 3}{4!} = \frac{1}{2} \tag{1.115}$$

1.5.6 Nota sobre o ordenamento normal

No exemplo anterior diagramas como o da Figura 1.18, designados por *tadpoles*, aparecem enquanto que no formalismo canónico usual estão excluídos devido ao ordenamento normal. Esta diferença deve-se ao facto de não termos sido muito rigorosos na definição do integral de caminho. Se o tivéssemos feito chegaríamos à conclusão que para obter a expressão do Lagrangeano a incluir em $e^{i\int d^4x\mathcal{L}(\phi)}$ teríamos primeiro que ordenar normalmente o Lagrangeano Quântico e só então efectuar a transcrição para os campos clássicos do integral de caminho. Isto faz com que o Lagrangeano $\mathcal{L}(\phi)$ usado no integral de caminho seja diferente do Lagrangeano para a teoria clássica. Vejamos o exemplo de ϕ^4. Vamos usar as relações[4]

$$\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) =: \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) : + \langle 0| \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x) |0\rangle \tag{1.116}$$

ou, mais simbolicamente,

$$: \hat{\phi}^2 := \hat{\phi}^2 - \langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle \ . \tag{1.117}$$

De modo semelhante

[4]Usaremos nesta secção a notação $\hat{\phi}$ para o campo quântico (operador) para o distinguir do campo clássico ϕ.

$$\hat{\phi}^4 =: \hat{\phi}^4 : +6 : \hat{\phi}^2 : \ \langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle + 6 \langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle \ \langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle \tag{1.118}$$

e portanto obtemos

$$: \hat{\phi}^4 := \hat{\phi}^4 - 6 : \hat{\phi}^2(x) : \ \langle 0| \hat{\phi}^2(x) |0\rangle - 6 \left(\langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle \right)^2 \tag{1.119}$$

ou ainda

$$: \hat{\phi}^4 := \hat{\phi}^4 - 6 \ \hat{\phi}^2 \langle 0| \hat{\phi}^2 |0\rangle \tag{1.120}$$

Isto quer dizer que o Lagrangeano quântico se escreve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^Q_{Int} &= -\frac{\lambda}{4!} : \hat{\phi}^4 : \\ &= -\frac{\lambda}{4!}\hat{\phi}^4 + \frac{\lambda}{4}\hat{\phi}^2 I \end{aligned} \tag{1.121}$$

onde

$$\begin{aligned} I &\equiv \langle 0| \hat{\phi}^2(x) |0\rangle \\ &= \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \langle 0| \left(a^+(k_1) e^{ik_1\cdot x} + a(k_1) e^{-ik_1\cdot x} \right) \left(a^+(k_2) e^{ik_2\cdot x} + a(k_2) e^{-ik_2\cdot x} \right) |0\rangle \\ &= \int d\tilde{k}_1 d\tilde{k}_2 \langle 0| a(k_1) a^+(k_2) |0\rangle \, e^{i(k_2-k_1)\cdot x} \\ &= \int d\tilde{k}_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \end{aligned} \tag{1.122}$$

Na expressão anterior usámos as relações

$$\left[a(k), a^+(k') \right] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \tag{1.123}$$

$$\omega_k = \sqrt{k_0^2 + |\vec{k}|^2} \tag{1.124}$$

O integral I é divergente e é igual ao integral do *loop* da Figura 1.18. De facto

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \ \frac{i}{(k_0 - \omega_k)(k_0 + \omega_k)} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} = I \end{aligned} \tag{1.125}$$

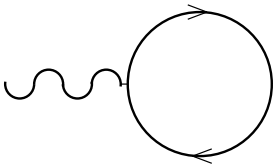
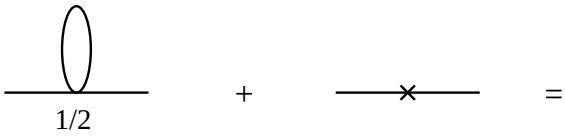


Figura 1.19:

Portanto se tivéssemos sido cuidadosos teríamos que incluir o termo $\frac{\lambda}{4}\phi^2 I$ na interacção. O Lagrangeano a introduzir na exponencial do integral de caminho seria então

$$\mathcal{L}_{Int}^{IC} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \frac{\lambda}{4}\phi^2 I \tag{1.126}$$

É fácil de ver que o termo adicional cancela o *tadpole*. De facto temos



$$\begin{aligned} &= \frac{i}{p^2 - m^2}\left[-i\frac{\lambda}{2}\ I + i\frac{\lambda}{2}\ I\right]\frac{i}{p^2 - m^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.127}$$

e portanto os *tadpoles* não apareceriam. Contudo muitas vezes não nos preocupamos em usar o Lagrangeano correcto e usamos simplesmente o Lagrangeano clássico pois a contribuição do *tadpole* é uma renormalização da massa (infinita) e pode assim ser sempre reabsorvida no processo de renormalização.

Para QED o mesmo se passa, isto é, devíamos usar como Lagrangeano de interacção

$$\mathcal{L}_{Int}^{IC} = -e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + eA_\mu \langle 0|\, \overline{\psi}\gamma^\mu\psi\, |0\rangle \tag{1.128}$$

e o segundo termo removeria o *tadpole* representado na Figura 1.19,

No entanto, devido à invariância de Lorentz da teoria, pode-se mostrar que este *tadpole* é zero em todas as ordens e portanto não nos temos que preocupar.

1.5.7 Funcionais geradores para fermiões

Para sistemas de fermiões introduzimos variáveis de Grassman. Estas variáveis anticomutativas são de alguma forma o limite clássico dos campos quânticos fermiónicos. Os detalhes desta construção estão explicados nos Apêndices A e B. Aqui apenas recordamos as nossas convenções. Devido ao carácter anticomutativo é necessário explicitar a ordem da derivação. Assim

- As derivadas são esquerdas

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)}\int d^4y\overline{\eta}(y)\psi(y) &= \psi(x) \\
\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\int d^4y\overline{\psi}(y)\eta(y) &= -\psi(x)
\end{aligned} \tag{1.129}$$

- Nas funções de Green a ordem de derivação é

$$\begin{aligned}
G^{2n}(x_1,\ldots,y_n) &= \langle 0|\, T\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\overline{\psi}(y_1)\cdots\overline{\psi}(y_n)\,|0\rangle \\
&\equiv \frac{\delta^{2n}Z[\eta,\overline{\eta}]}{i\delta\eta(y_n)\cdots i\delta\eta(y_1)i\delta\overline{\eta}(x_n)\cdots i\delta\overline{\eta}(x_1)} \\
&\equiv \frac{\delta}{i\delta\eta(y_n)}\cdots\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x_1)}Z[\eta,\overline{\eta}]
\end{aligned} \tag{1.130}$$

onde

$$\begin{aligned}
Z[\eta,\overline{\eta}] &= \langle 0|\, Te^{i\int d^4x\left[\overline{\eta}(x)\psi(x)+\overline{\psi}(x)\eta(x)\right]}\,|0\rangle \\
&= \int \mathcal{D}(\psi,\overline{\psi})e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}+\overline{\eta}(x)\psi(x)+\overline{\psi}(x)\eta(x)\right]}
\end{aligned} \tag{1.131}$$

Exemplos de aplicação destes resultados serão dados nos problemas.

1.6 Transformações de variáveis em integrais de caminho. Aplicações

1.6.1 Introdução

Uma das grandes vantagens de ter uma expressão para o funcional gerador $Z(J)$ em termos dum integral de caminho é que um grande número de manipulações familiares para integrais usuais (mudança de variáveis de integração, integração por partes ...) podem agora ser aqui aplicadas. Vamos ver as consequências da mudança de variáveis de integração.

Consideremos uma transformação infinitesimal da forma

$$\phi_i \to \phi_i + \varepsilon F_i(\phi) \tag{1.132}$$

onde

$$F_i(\phi) = f_i + f_{ij}\phi_j + \cdots \tag{1.133}$$

Então devemos ter

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\phi) \to & \quad \mathcal{D}(\phi) \det \left| \delta_{ij} + \varepsilon \tfrac{\delta F_i}{\delta \phi_j} \right| \\ = & \quad \mathcal{D}(\phi) \left(1 + \varepsilon \tfrac{\delta F_i}{\delta \phi_i} \right) \end{aligned} \tag{1.134}$$

e

$$e^{i(S(\phi)+J_i\phi_i)} \to e^{i(S(\phi)+J_i\phi_i)} \left[1 + i\varepsilon \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} + J_i \right) F_i(\phi) \right] \tag{1.135}$$

Como $Z(J)$ deverá ser independente de transformação de variáveis obtemos

$$0 = \int \mathcal{D}(\phi) \left[i \left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i} + J_i \right) F_i + \frac{\delta F_i}{\delta \phi_i} \right] e^{i(S[\phi]+J_i\phi_i)} \tag{1.136}$$

Usando $\phi_i \to \frac{\delta}{i\delta J_i}$ obtemos a expressão mais compacta

$$\left\{ \left[\frac{\delta S}{\delta \phi_i} \left(\frac{\delta}{i\delta J_i} \right) + J_i \right] F_i \left(\frac{\delta}{i\delta J_i} \right) + \frac{\delta F_i}{\delta \phi_i} \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right\} Z(J) = 0 \tag{1.137}$$

Esta é a expressão geral que vamos aplicar a dois casos particulares importantes, as equações de Dyson-Schwinger e as identidades de Ward.

1.6.2 Equações de Dyson-Schwinger

Seja $F_i = f_i$ independente de ϕ_i, isto é uma simples translação dos campos. Então a equação anterior escreve-se

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_i}\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] + J_i\right) Z(J) = 0 \tag{1.138}$$

que, como veremos, é a expressão da equação de Dyson-Schwinger (DS) para o funcional gerador das funções de Green completas. Assim as equações de DS não são mais do que uma consequência da invariância dos integrais de caminho para translações. A equação 1.138 pode-se ainda escrever

$$J_k = -\frac{1}{Z} E\left[\frac{\delta}{i\delta J_k}\right] Z[J] \tag{1.139}$$

onde o funcional $E[\phi]$ é a equação de movimento,

$$E\left[\phi_k\right] \equiv \frac{\delta S}{\delta \phi_k} \ . \tag{1.140}$$

Para muitas aplicações é mais conveniente escrever as equações de Dyson-Schwinger para as funções de Green conexas e próprias. Para isso temos de escrever a equação equivalente a 1.138 para os funcionais W e Γ

i) Funções de Green conexas

Usando a identidade

$$\frac{1}{Z}\frac{\delta}{i\delta J_k}\left(Z[J]f[J]\right) = \left(\frac{\delta iW}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k}\right) f[J] \tag{1.141}$$

Podemos escrever

$$\frac{1}{Z} E\left[\frac{\delta}{i\delta J_k}\right] Z[J] = E\left[i\frac{\delta W}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k}\right] 1 \tag{1.142}$$

Portanto a equação de DS para o funcional gerador das funções de Green conexas escreve-se simplesmente

$$J_k = -E\left[i\frac{\delta W}{i\delta J_k} + \frac{\delta}{i\delta J_k}\right] 1 \tag{1.143}$$

ii) Funções de Green próprias

Mais útil é a equação de DS para as funções de Green próprias ou irredutíveis. Para isso utilizamos as relações

$$\begin{cases} \phi_k = \dfrac{\delta W}{i\delta J_k} & J_k = -\dfrac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} \\ \dfrac{\delta}{i\delta J_k} = G_{km}\dfrac{\delta}{\delta\phi_m} & \dfrac{\delta}{\delta\phi_k} = -i\Gamma_{kr}\dfrac{\delta}{i\delta J_r} \end{cases} \tag{1.144}$$

e obtemos

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} = E\left[\phi_k + G_{km}\frac{\delta}{\delta\phi_m}\right]1 \tag{1.145}$$

É na forma 1.145 que as equações de DS são mais úteis.

Exemplo : Self-energy em ϕ^3

A acção para esta teoria escreve-se, usando a notação compacta

$$S[\phi] = \phi_k(-\Box - m^2)\delta_{km}\phi_m - \frac{\lambda}{3!}(\phi_k)^3 \tag{1.146}$$

logo

$$E[\phi_k] = (-\Box - m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{2}(\phi_k)^2 \tag{1.147}$$

e portanto

$$E\left[\phi_k + G_{km}\frac{\delta}{\delta\phi_m}\right]1 = -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{2}\left(\phi_k + G_{kr}\frac{\delta}{\delta\phi_r}\right)\phi_k \tag{1.148}$$

dá

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} = -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{2}\left(\phi_k^2 + G_{kr}\delta_{rk}\right) \tag{1.149}$$

Derivando funcionalmente em relação a ϕ_m obtemos as equações de DS para diversas funções de Green. Por exemplo para a self-energy obtemos

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_k\delta\phi_m} = -(\Box + m^2)\delta_{km} - \frac{\lambda}{2}\left(2\phi_k\delta_{km} - i\Gamma_{mn}G_{krn}\delta_{rk}\right) \tag{1.150}$$

Pondo $\phi_k = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{km} - (-\Box - m^2)\delta_{km} &= i\frac{\lambda}{2}\,\Gamma_{mn}G_{krn}\delta_{rk} \\ &= \frac{\lambda}{2}\,\Gamma_{mn}G_{krn}\Gamma_{rs}G_{sk} \\ &= i\frac{\lambda}{2}\,\Gamma_{mn}\Gamma_{rs}G_{sk}G_{kk'}G_{rr'}G_{nn'}\Gamma_{k'r'n'} \\ &= -i\frac{\lambda}{2}\,G_{kk'}G_{ks}\Gamma_{k'sm} \end{aligned} \tag{1.151}$$

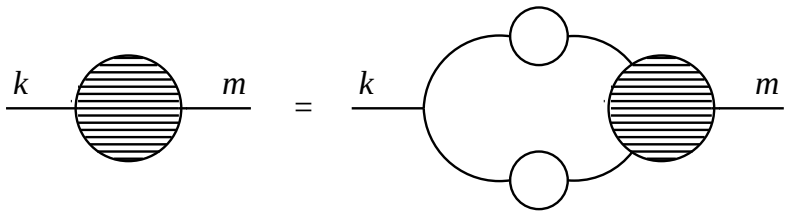


Figura 1.20:

onde se usou repetidamente a equação 1.32 e a definição da Figura 1.11. Mas por definição de self-energy

$$\Gamma_{km} - (-\Box - m^2)\delta_{km} \equiv -\Sigma_{km} \tag{1.152}$$

e portanto

$$-i\Sigma_{km} = -i\frac{\lambda}{2}\, G_{kk'}G_{ks}i\Gamma_{k'sm} \tag{1.153}$$

ou em termos de diagramas da Figura 1.20

Como vemos a equação de DS não é mais que a afirmação que o vértice na teoria é $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$.

Exemplo: Self-energy em ϕ^4

Neste caso a acção escreve-se

$$S[\phi] = \phi_k(-\Box - m^2)\delta_{km}\phi_m - \frac{\lambda}{4!}\,(\phi_k)^4\ . \tag{1.154}$$

Logo a equação de movimento é

$$E[\phi] = (-\Box - m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!}\,(\phi_k)^3\ . \tag{1.155}$$

Portanto

$$\begin{aligned} E\left[\phi_k + G_{km}\frac{\delta}{\delta\phi_m}\right]1 &= -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!}\left(\phi_k + G_{km}\frac{\delta}{\delta\phi_m}\right)\left(\phi_k + G_{kn}\frac{\delta}{\delta\phi_n}\right)\phi_k \\ &= -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!}\left(\phi_k + G_{km}\frac{\delta}{\delta\phi_m}\right)\left(\phi_k^2 + G_{kn}\delta_{nk}\right) \\ &= -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!}\left(\phi_k^3 + \phi_k G_{km}\delta_{nk} + 2G_{km}\phi_k\delta_{km}\right. \\ &\quad \left. - iG_{km}\Gamma_{m\ell}G_{kn\ell}\delta_{nk}\right) \end{aligned} \tag{1.156}$$

e obtemos

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_k} = -(\Box + m^2)\phi_k - \frac{\lambda}{3!}\left(\phi_k^3 + \phi_k G_{kn}\delta_{nk} + 2G_{km}\phi_k\delta_{km} - iG_{km}\Gamma_{m\ell}G_{kn\ell}\delta_{nk}\right) \tag{1.157}$$

Para obter a equação de DS para a self-energy derivamos em ordem a ϕ_j e fazemos $\phi_i = 0$ depois de derivar. Obtemos assim

$$\begin{aligned}\Gamma_{kj} &- (-\Box - m^2)\delta_{kj} \\ &= -\frac{\lambda}{3!}\ (G_{kn}\delta_{nk}\delta_{kj} + 2G_{km}\delta_{km}\delta_{kj} - iG_{km}\Gamma_{m\ell j}G_{kn\ell}\delta_{nk} \\ &\quad -G_{kmp}\Gamma_{pj}\Gamma_{m\ell}G_{kn\ell}\delta_{nk} - G_{km}\Gamma_{m\ell}G_{kn\ell p}\Gamma_{pj}\delta_{nk})\end{aligned} \tag{1.158}$$

logo

$$\begin{aligned}-i\Sigma_{kj} &= -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} + i\frac{\lambda}{3!}G_{km}i\Gamma_{m\ell j}G_{kk'}G_{nn'}G_{\ell\ell'}i\Gamma_{k'n'\ell'}\delta_{nk} \\ &\quad +i\frac{\lambda}{3!}G_{kk'}G_{mm'}G_{pp'}i\Gamma_{k'm'p'}\Gamma_{pj}\Gamma_{m\ell}G_{kk''}G_{nn'}G_{\ell\ell'}i\Gamma_{k''n'\ell'}\delta_{nk} \\ &\quad +i\frac{\lambda}{3!}G_{km}\Gamma_{m\ell}G_{kn\ell p}\Gamma_{pj}\delta_{nk} \\ &= -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} + i\frac{\lambda}{3!}\delta_{k\ell}\delta_{nk}G_{kn\ell p}i\Gamma_{pj}\end{aligned} \tag{1.159}$$

Para a teoria ϕ^4 temos $\Gamma_{ijk} = 0$ pelo que

$$G_{kn\ell p} = G_{kk'}G_{nn'}G_{\ell\ell'}G_{pp'}\ i\Gamma_{k'n'\ell'p'} \tag{1.160}$$

e obtemos

$$-i\Sigma_{kj} = -i\frac{\lambda}{2}G_{kk}\delta_{kj} - i\frac{\lambda}{3!}G_{kk'}G_{kn'}G_{k\ell'}\ i\Gamma_{k'n'\ell'j} \tag{1.161}$$

que representamos diagramaticamente na Figura 1.21

1.6.3 Identidades de Ward

Seja uma teoria com uma simetria qualquer. Essa simetria é expressa pela invariância da acção

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi_i}F_i(\phi) = 0 \tag{1.162}$$

onde considerámos uma transformação do tipo 1.132. Se esta expressão deixar invariante a medida $\mathcal{D}(\phi)$ então a expressão geral 1.137 reduz-se a

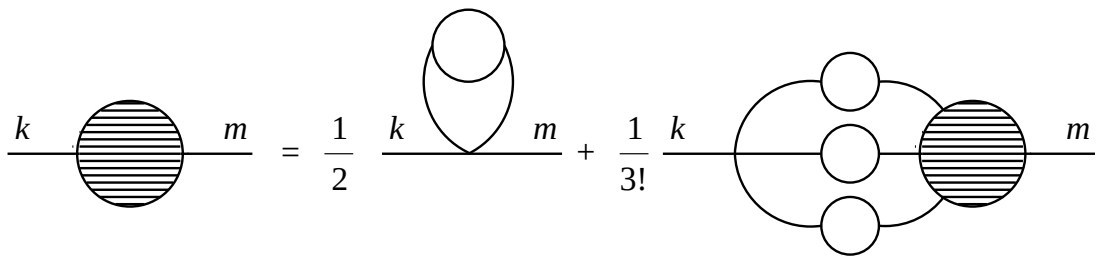


Figura 1.21:

$$J_i F_i \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] Z(J) = 0 \tag{1.163}$$

Esta expressão é conhecida por *identidade de Ward*. Derivação em ordem às fontes conduz a relações entre as funções de Green que expressam as simetrias da teoria.

Para teorias de gauge a expressão é um pouco mais complicada. A razão é que no processo de quantificação das teorias de gauge é normalmente necessário introduzir termos que quebram a simetria para fixar a gauge. Assim podemos escrever

$$S_{eff} = S_I + S_{NI} \tag{1.164}$$

onde $\frac{\delta S_I}{\delta \phi_i} F_i = 0$ e $\frac{\delta S_{NI}}{\delta \phi_i} F_i \neq 0$. Então se a medida continuar a ser invariante, devemos ter agora a identidade de Ward na forma

$$\left(\frac{\delta S_{NI}}{\delta \phi_i}\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] + J_i\right) F_i \left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] Z(J) = 0 \tag{1.165}$$

Na próxima secção vamos aplicar esta expressão para obter as identidades de Ward em QED. Para as teorias de gauge não abelianas a questão da invariância da medida é um pouco mais delicada e será analisada no próximo capítulo depois de mostrarmos como se quantificam estas teorias.

1.7 As identidades de Ward-Takahashi em QED

1.7.1 As identidades de Ward-Takahashi para o funcional $Z[J]$

Vamos aqui tornar a derivar as identidades de Ward para QED já encontradas no estudo da renormalização, mas utilizando agora os métodos funcionais.

Pode-se mostrar que para o funcional gerador das funções de Green completas se pode escrever, numa gauge linear,

$$Z(J_\mu, \overline{\eta}, \eta) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}) e^{i(S_{eff} + \int d^4x (J_\mu A^\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \tag{1.166}$$

onde J_μ, $\overline{\eta}$ e η são as fontes associadas a A_μ, ψ e $\overline{\psi}$ respectivamente. A acção efectiva é dada por

$$S_{eff} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{QED} - \frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \right] = S_{QED} + S_{GF} \tag{1.167}$$

onde

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \ . \tag{1.168}$$

S_{QED} é invariante para as transformações de gauge do grupo $U(1)$

$$\begin{cases} \delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \\ \delta\psi = -ie\Lambda\psi \\ \delta\overline{\psi} = ie\Lambda\overline{\psi} \end{cases} \tag{1.169}$$

enquanto que S_{eff} contém a parte de *gauge fixing* que não é invariante nas transformações 1.169. Portanto as identidades de Ward tomam aqui a forma

$$\left(\frac{\delta S_{GF}}{\delta \phi_i} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] + J_i \right) F_i \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] Z(J) = 0 \tag{1.170}$$

o que se escreve no nosso caso, reintroduzido as integrações,,

$$0 = \int d^4x \left[\frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial_\nu \left(\frac{\delta}{i\delta J_\nu} \right) \partial_\mu \Lambda + J^\mu \partial_\mu \Lambda - ie\Lambda\overline{\eta} \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} + ie\Lambda\eta \frac{\delta}{i\delta\eta} \right] Z(J^\mu, \overline{\eta}, \eta) \tag{1.171}$$

ou seja, integrando por partes,

$$\int d^4x \ \Lambda \left[-\frac{1}{\xi} \Box \partial_\nu \left(\frac{\delta}{i\delta J_\nu} \right) - \partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta} \frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} + ie\eta \frac{\delta}{i\delta\eta} \right] Z(J^\mu, \overline{\eta}, \eta) = 0 \tag{1.172}$$

Podemos ainda escrever

$$\left[\frac{1}{\xi} \Box \partial_\mu \left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu} \right) + \partial_\mu J^\mu + ie\overline{\eta} \left(\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} \right) - ie\eta \left(\frac{\delta}{i\delta\eta} \right) \right] Z(J, \overline{\eta}, \eta) = 0 \tag{1.173}$$

1.7.2 As identidades de Ward-Takahashi para os funcionais W e Γ

Do ponto de vista das aplicações é mais útil a identidade de Ward em termos do funcional gerador das funções de Green próprias. Este problema para as Teorias de Gauge não abelianas é bastante difícil de resolver, conforme veremos no próximo capítulo. Aqui o problema é simples pois a equação acima é linear nas derivadas funcionais em relação às diversas fontes (note-se que se se tivesse escolhido uma condição de gauge *não linear* isto já não seria verdade, mesmo em QED). Esta linearidade permite escrever imediatamente

$$\partial_\mu J^\mu + \left[\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu\left(\frac{\delta}{i\delta J_\mu}\right) + ie\overline{\eta}\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}} - ie\eta\frac{\delta}{i\delta\eta}\right] W(J,\overline{\eta},\eta) = 0 \tag{1.174}$$

onde W é o funcional gerador das funções de Green conexas

$$Z(J^\mu,\overline{\eta},\eta) \equiv e^{iW(J^\mu,\overline{\eta},\eta)} \tag{1.175}$$

Como vimos, o funcional gerador das funções de Green próprias é

$$\Gamma(A_\mu,\psi,\overline{\psi}) = W(J_\mu,\overline{\eta},\eta) - \int d^4x[J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta] \tag{1.176}$$

onde

$$A_\mu = \frac{\delta W}{i\delta J^\mu}\ ;\ \psi = \frac{\delta W}{i\delta\overline{\eta}}\ ;\ \overline{\psi} = -\frac{\delta W}{i\delta\eta} \tag{1.177}$$

e

$$J_\mu = -\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu}\ ;\ \eta = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}}\ ;\ \overline{\eta} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} \tag{1.178}$$

onde, como habitualmente, as derivadas fermiónicas são derivadas esquerdas. Então a equação 1.174 pode ser escrita

$$\frac{1}{\xi}\Box\partial_\mu A^\mu - \partial_\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A_\mu} + ie\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi}\psi + ie\overline{\psi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\psi}} = 0 \tag{1.179}$$

Esta equação é o ponto de partida para gerar todas as identidades de Ward em QED. A sua aplicação é muito mais fácil do que a expressão equivalente usada no estudo da renormalização e que foi demonstrada utilizando o formalismo canónico. Os métodos funcionais tornam estas expressões particularmente simples.

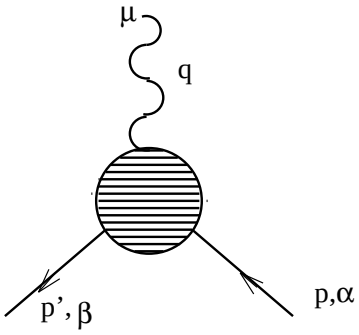


Figura 1.22:

1.7.3 Exemplo: A identidade de Ward para o vértice em QED

Para nos convencermos que a equação 1.179 conduz às identidades de Ward já nossas conhecidas, vamos obter a identidade de Ward para o vértice em QED. Apliquemos $\frac{\delta^2}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(z)}$ a 1.179. Obtemos então

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu & \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(z)\delta A^\mu(x)} \\ = & ie\left[\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_\alpha(y)\delta\overline{\psi}_\beta(x)}\delta^4(z-x) - \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\psi_\alpha(x)\delta\overline{\psi}_\beta(z)}\delta^4(y-x)\right] \end{aligned} \tag{1.180}$$

ou seja

$$\partial_x^\mu\Gamma_{\mu\beta\alpha}(x,z,y) = ie\left[\Gamma_{\beta\alpha}(x,y)\delta^4(z-x) - \Gamma_{\beta\alpha}(z,x)\delta^4(y-x)\right] \tag{1.181}$$

Aplicando agora a transformada de Fourier a ambos os membros, com os momentos definidos de acordo com a Figura 1.22

obtemos, omitindo os índices spinoriais,

$$q^\mu\Gamma_\mu(p',p) = ie[S^{-1}(p) - S^{-1}(p')] \tag{1.182}$$

que é exactamente a identidade pretendida.

1.7.4 Fantasmas em QED

Anteriormente dissemos que para QED o funcional gerador é dado por

$$Z(J_\mu,\overline{\eta},\eta) = \int \mathcal{D}(A_\mu,\psi,\overline{\psi})e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_{QED}+\mathcal{L}_{GF}+J_\mu A^\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta]} \tag{1.183}$$

onde $\mathcal{L}_{QED}$ é o Lagrangeano usual de QED e o termo que fixa a gauge é dado por

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \ . \tag{1.184}$$

De facto isto não é estritamente verdade. Como veremos o funcional gerador que obteríamos se usássemos a prescrição para teorias de gauge seria

$$\tilde{Z}(J_\mu, \eta, \overline{\eta}, \zeta, \overline{\zeta}) = \int D(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega}) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_{eff} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + \overline{\omega}\zeta + \overline{\zeta}\omega]} \tag{1.185}$$

onde ω e $\overline{\omega}$ são campos escalares anticomutativos. Estas partículas fictícias são designadas por *fantasmas* de Fadeev-Popov e desempenham um papel fulcral em teorias de gauge não abelianas. Embora não apareçam como estados finais em processos físicos, a introdução de fontes para elas é conveniente para discutir as identidades de Ward. No Lagrangeano anterior $\mathcal{L}_{eff}$ é dado por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L} \tag{1.186}$$

onde

$$\mathcal{L}_G = -\overline{\omega} \, \Box \, \omega \tag{1.187}$$

A razão pela qual em QED podemos trabalhar com o funcional gerador Z e não $\tilde{Z}$ tem a ver com o facto de os fantasmas em QED não terem acoplamentos com as partículas físicas e poderem ser omitidos completamente da teoria (ver problema 1.6).

Vamos introduzir agora as transformações de Becchi Rouet e Stora (BRS). O objectivo destas transformações é fazer com que $\mathcal{L}_{eff}$ seja invariante. É fácil de ver que para QED obtemos esse resultado com as transformações

$$\begin{cases} \delta\psi = -ie\omega\theta\psi \\ \delta\overline{\psi} = ie\overline{\psi}\omega\theta \\ \delta A_\mu = \delta_\mu \omega\theta \\ \delta\overline{\omega} = \frac{1}{\xi}(\partial \cdot A)\theta \\ \delta\omega = 0 \end{cases} \tag{1.188}$$

onde o parâmetro θ é anticomutativo (*variável de Grassman*). As transformações nos campos físicos são transformações de gauge de parâmetro $\Lambda = \omega\theta$ pelo que $\mathcal{L}_{QED}$ é invariante. As transformações em ω e $\overline{\omega}$ são tais que a variação de $\mathcal{L}_{GF}$ cancela a de $\mathcal{L}_G$. A invariância da medida de integração e de S_{eff} permite imediatamente escrever as identidades de Ward, para os funcionais geradores (ver problema 1.6).

As transformações BRS permitem obter as identidades de Ward duma forma expedita sem ter que recorrer à derivação funcional de $\tilde{\Gamma}$. Este método baseia-se no facto de que o operador δ_{BRS} aplicado a qualquer função de Green é zero (ver problema 1.6), isto é

$$\delta_{BRS} \langle 0| T A_{\mu_1} \cdots \overline{\omega} \cdots \omega \cdots \psi \cdots \overline{\psi} \cdots |0\rangle = 0 \tag{1.189}$$

Vejamos duas aplicações simples do método:

i) A parte longitudinal do propagador do fotão não é renormalizada

Este resultado é equivalente, como é sabido, a dizer que a polarização do vácuo é transversal. Prova-se facilmente partindo da função de Green $\langle 0| T A_\mu \overline{\omega} |0\rangle$ e fazendo uso de 1.189.

$$\delta_{BRS} \langle 0| T A_\mu \overline{\omega} |0\rangle = 0 \tag{1.190}$$

ou seja

$$\frac{1}{\xi} < 0|T A_\mu \partial^\nu A_\nu |0\rangle \theta - \langle 0| T \partial_\mu \omega \overline{\omega} |0\rangle \theta = 0 \tag{1.191}$$

Portanto

$$\frac{1}{\xi} k^\mu G_{\mu\nu}(k) = -k_\nu \Delta(k) \tag{1.192}$$

usando para propagador dos fantasmas

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2} \tag{1.193}$$

pois o fantasma não tem interacções. Multiplicando pelo inverso do propagador do fotão obtemos

$$\frac{1}{\xi} k^\mu = -i \frac{k_\nu}{k^2} G^{-1\nu\mu}(k) \tag{1.194}$$

e portanto

$$k_\nu G^{-1\nu\mu}(k) = \frac{i}{\xi} k^\mu k^2 = k_\nu G^{-1\nu\mu}_{(0)}(k) \tag{1.195}$$

o que mostra que a parte longitudinal não é renormalizada.

ii) Identidade de Ward para o vértice

Partimos de

$$\delta_{BRS} \langle 0| T \overline{\omega} \psi \overline{\psi} |0\rangle = 0 \tag{1.196}$$

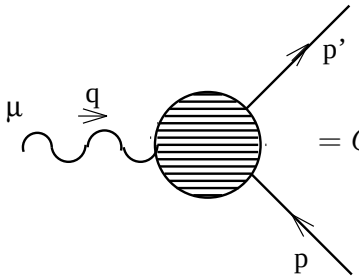
Então

$$\frac{1}{\xi} \langle 0| T \partial^\mu A_\mu \psi \overline{\psi} |0\rangle = ie \langle 0| T \overline{\omega} \omega \psi \overline{\psi} |0\rangle - ie \langle 0| T \overline{\omega} \psi \overline{\psi} \omega |0\rangle \tag{1.197}$$

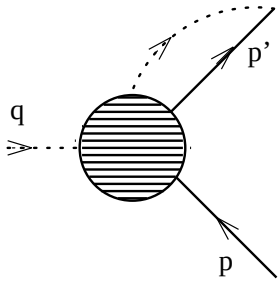
ou ainda

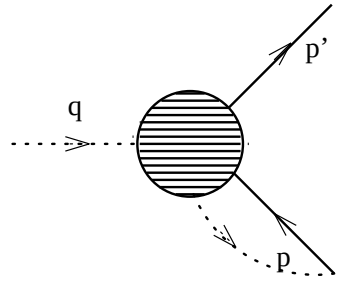
$$\frac{i}{\xi} q^\mu T_\mu = T \tag{1.198}$$

onde

$iT_\mu =$ 

$= G_{\mu\nu}(q) S(p') i\Gamma^\nu S(p)$ (1.199)

$iT \;=\; -ie$ 

$+\, ie$ 

$$= -ie\Delta(q)S(p) + ie\Delta(q)S(p') \tag{1.200}$$

A última igualdade resulta dos fantasmas não terem interacções em QED numa gauge linear. Pondo tudo junto obtemos

$$\frac{i}{\xi} q^\mu G_{\mu\nu}(q) S(p') i\Gamma^\nu S(p) = -ie\Delta(q)S(p) + ie\Delta(q)S(p') \tag{1.201}$$

Usando

$$\frac{1}{\xi} k^\mu G_{\mu\nu}(k) = -k_\nu \Delta(k) \tag{1.202}$$

e multiplicando pelos inversos dos propagadores dos fermiões obtemos finalmente a identidade pretendida

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = ie\left[S^{-1}(p) - S^{-1}(p')\right] \tag{1.203}$$

Problemas Capítulo 1

1.1 Calcule G_c^4 a partir de 1.21 e mostre que é de facto a função de Green conexa de quatro pernas.

1.2 Mostre que para um campo escalar real temos

$$Z_0[J] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)\Delta^{(0)}(x,y)J(y)\right\} \tag{1.204}$$

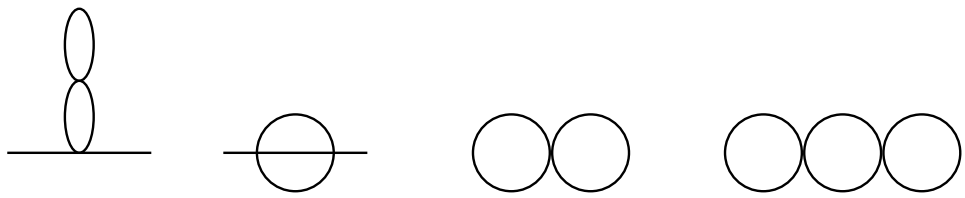
onde

$$\Delta^{(0)}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{1.205}$$

Sugestão: Use a generalização do resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots dx_N e^{-\frac{1}{2}x_i M_{ij} x_j + b_i x_i} = \pi^{N/2} (\det M)^{-1/2} e^{\frac{1}{2} b_i (M^{-1})_{ij} b_j} \tag{1.206}$$

1.3 Determine os factores de simetria dos diagramas seguintes:



1.4 Considere a teoria ϕ^3, isto é $V(\phi) = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$. Usando

$$Z[J] = \exp\left\{-i\int d^4x V\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\right\} Z_0(J) \tag{1.207}$$

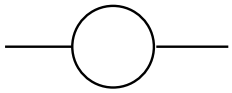
onde

$$Z_0(J) = exp[-\frac{1}{2}\int d^4x d^4x' J(x) G_F^{(0)}(x-x') J(x')] \tag{1.208}$$

e

$$G_F^{(0)}(x-x') = i\int d^4k e^{ik(x-x')} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{1.209}$$

mostre que o factor de simetria do diagrama



é $S = \frac{1}{2}$.

1.5 Dado o Lagrangeano de Dirac (teoria livre)

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \ , \tag{1.210}$$

mostre que o funcional gerador das funções de Green é dado por

$$Z_0[\eta, \overline{\eta}] = e^{-\int d^4x d^4y \ \overline{\eta}(x) S_F^0(x,y) \eta(y)} \tag{1.211}$$

onde

$$\begin{aligned} S^0_{F\alpha\beta}(x,y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \left(\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}\right)_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\delta^2 Z_0}{i\delta\eta_\alpha(y) \ i\delta\overline{\eta}_\beta(x)} \\ &= \langle 0| \, T\psi_\beta(x)\overline{\psi}_\alpha(y) \, |0\rangle \ . \end{aligned}$$

1.6 Como mostraremos no Capítulo 2 o funcional gerador das funções de Green para QED é dado por

$$Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}) \ e^{i\int d^4x (\mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \ . \tag{1.212}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QED} &= -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi \\
\mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2 \\
D_\mu &= \partial_\mu + ieA_\mu \ .
\end{aligned}$$

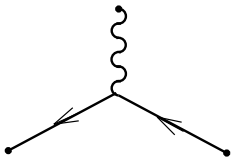
a) Calcule $Z_0[J^\mu, \eta, \overline{\eta}]$ b) Mostre que

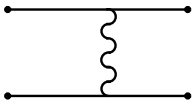
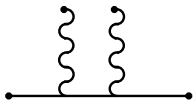
$$Z[J^\mu, \eta, \overline{\eta}] = \exp\left\{(-e)\int d^4x \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(x)}\,(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}_\beta(x)}\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right\} Z_0[J^\mu, \eta, \overline{\eta}] \ . \tag{1.213}$$

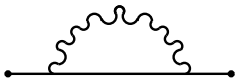
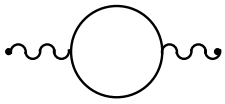
c) Expanda

$$Z = Z_0\left[1 + (-ie)Z_1 + (-ie)^2 Z_2 + \cdots\right] \tag{1.214}$$

onde se retiraram as amplitudes vácuo-vácuo em Z_i, isto é, $Z_i[0] = 0 \to Z[0] = 1$. Mostre que

$Z_1 = -i$  (1.215)

$Z_2 = \frac{1}{2}Z_1^2 \quad + \quad \frac{1}{2}$  $+$ 

$-$  $+ \quad \frac{1}{2}$  (1.216)

d) Discuta os factores numéricos e os sinais das expressões anteriores. e) Calcule em ordem mais baixa

$$\langle 0|\, T A^\mu(x)\psi_\beta(y)\overline{\psi}_\alpha(z)\,|0\rangle = \frac{\delta^3 Z}{i\delta\eta_\alpha(z)i\delta\overline{\eta}_\beta(y)i\delta J_\mu(x)} \tag{1.217}$$

e verifique que coincide com as regras de Feynman para o vértice. f) Calcule

a amplitude para o efeito de Compton em ordem mais baixa, isto é

$$\langle 0| \, T A^{\mu}(x) A^{\nu}(y) \psi_{\beta}(z) \overline{\psi}_{\alpha}(w) \, |0\rangle = \frac{\delta^4 Z}{i\delta\eta_{\alpha}(w) i\delta\overline{\eta}_{\beta}(z) i\delta J_{\nu}(y) i\delta J_{\mu}} \tag{1.218}$$

e verifique que reproduz o que se obtém usando as regras de Feynman usuais.

1.7 As identidades de Ward para QED deduzidas na secção 1.7 não têm a forma

$$J_i F_i \left[\frac{\partial}{i\partial J} \right] \; Z(J) = 0 \tag{1.219}$$

onde $\delta\phi_i = F_i[\phi]$ pois

$$S_{GF} = \int d^4x \left(-\frac{1}{2\xi} \; (\partial \cdot A)^2 \right) \tag{1.220}$$

não é invariante para transformações de gauge. Introduza o funcional

$$Z'(J_{\mu}, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_{\mu}, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega}) \; e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff} + J^{\mu} A_{\mu} + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \tag{1.221}$$

onde

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{G} \tag{1.222}$$

e

$$\mathcal{L}_{G} = -\overline{\omega} \Box \omega \; . \tag{1.223}$$

onde ω e $\overline{\omega}$ são campos escalares anticomutativos. a) Mostre que

$$Z'(J_{\mu}, \eta, \overline{\eta}) = \mathcal{N} \; Z(J_{\mu}, \eta, \overline{\eta}) \tag{1.224}$$

onde $\mathcal{N}$ não depende das fontes nem dos campos. Explique porque é que esta renormalização (infinita) não afecta o cálculo das funções de Green. Assim tanto Z como Z' servem para o cálculo destas. b) Mostre que a medida $\mathcal{D}(A_{\mu}, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega})$ e $\int d^4x \mathcal{L}_{eff}$ são invariantes para a transformação

$$\begin{aligned} &\delta\psi = -ie\omega\theta\psi \qquad \delta\overline{\psi} = ie\overline{\psi}\omega\theta \\ &\delta A_{\mu} = \partial_{\mu}\omega\theta \\ &\delta\overline{\omega} = \tfrac{1}{\xi}(\partial \cdot A)\theta \quad \delta\omega = 0 \end{aligned} \tag{1.225}$$

onde θ é um parâmetro anticomutativo constante (variável de Grassman). c)

Introduza fontes anticomutativas para os campos ω e $\overline{\omega}$, isto é

$$\overline{Z}(J_\mu, \eta, \overline{\eta}, \zeta, \overline{\zeta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega}) e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{eff} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + \overline{\omega}\zeta + \overline{\zeta}\omega)} \quad (1.226)$$

Mostre que

$$\overline{Z}(J_\mu, \eta, \overline{\eta}, \zeta, \overline{\zeta}) = Z_G(\zeta, \overline{\zeta})\ Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) \quad (1.227)$$

onde

$$Z(J_\mu, \eta, \overline{\eta}) = \int \mathcal{D}(A_\mu, \psi, \overline{\psi})\ e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{GF} + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)}\ . \quad (1.228)$$

Considere os funcionais $\overline{W}$, W_G e W e ainda $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ definidos de maneira semelhante. Qual a relação entre $\overline{W}$, W_G e W e entre $\overline{\Gamma}$, Γ_G e Γ . d) Mostre que a equação de Dyson Schwinger para os campos ω e $\overline{\omega}$ é

$$\frac{\delta\overline{\Gamma}}{\delta\overline{\omega}} = -\Box\omega\ . \quad (1.229)$$

e) Mostre que as identidades de Ward se podem agora escrever na forma

$$J_i F_i[\frac{\delta}{i\delta J}]\overline{Z} = 0\ . \quad (1.230)$$

Escreva as identidades de Ward para $\overline{\Gamma}(A_\mu, \psi, \overline{\psi}, \omega, \overline{\omega})$. Mostre que conduzem aos resultados conhecidos f) Mostre que um termo de massa para o fotão, embora quebre a simetria de gauge, não estraga as identidades de Ward desde que os fantasmas ω adquiram massa. Se o termo de massa do fotão for $\frac{1}{2}\ \mu^2 A_\mu A^\mu$ qual a massa dos fantasmas?

Capítulo 2

Teorias de gauge não abelianas

2.1 Teoria clássica

2.1.1 Introdução

Vamos brevemente rever como se constrói a acção clássica para uma teoria de gauge não abeliana (Yang-Mills). Consideremos um grupo compacto G correspondendo a uma simetria interna. Seja ϕ_i, $(i = 1, \cdots, N)$ um conjunto de campos que se transformam de acordo com uma representação de dimensão N de G, isto é

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U(g)\phi(x) \tag{2.1}$$

onde $U(g)$ é uma matriz $N \times N$. Numa transformação infinitesimal

$$g = 1 - i\alpha^a t^a \qquad\qquad a = 1, \cdots, r \tag{2.2}$$

onde os parâmetros α^a são infinitesimais e t^a são os geradores do grupo satisfazendo as relações, para a representação fundamental

$$\begin{aligned} \left[t^a, t^b\right] &= iC^{abc}t^c \\ Tr\left(t^a t^b\right) &= \frac{1}{2}\delta^{ab} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Exemplos destes geradores são

$$\begin{aligned} SU(2) \qquad & t^a = \frac{\sigma^a}{2} \quad ; \quad a = 1, 2, 3 \\ SU(3) \qquad & t^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad ; \quad a = 1, \cdots, 8 \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde σ^a e λ^a são as matrizes de Pauli e Gell-Mann respectivamente.

Na representação associada aos campos ϕ, as matrizes T^a de dimensão $(N \times N)$ formam uma representação de álgebra de Lie, isto é,

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \tag{2.5}$$

A sua normalização é dada por

$$Tr(T^aT^b) = \delta^{ab}T(R) \tag{2.6}$$

onde $T(R)$ é um número característico da representação R. Para uma dada representação mostra-se a identidade (ver problema 2.1)

$$T(R)\ r = d(R)C_2(R) \tag{2.7}$$

onde r é a dimensão do Grupo G e $d(R)$ é a dimensão da representação R. Numa transformação infinitesimal

$$\delta\phi = -i\alpha^aT^a\phi \equiv -i\underset{\sim}{\alpha}\phi \tag{2.8}$$

onde introduzimos a notação $\underset{\sim}{\alpha} \equiv \alpha^aT^a$.

2.1.2 Derivada covariante

Para resolver o problema da derivada não se transformar como os campos, isto é,

$$\partial_\mu\phi' \neq U\partial_\mu\phi \tag{2.9}$$

quando os parâmetros dependem de x^α, introduz-se a derivada covariante

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - ig\underset{\sim}{A}_\mu)\phi \qquad ; \qquad \underset{\sim}{A}_\mu = A^a_\mu T^a \tag{2.10}$$

onde A^a_μ são os campos de gauge (tantos quantos os geradores do grupo). As propriedades de transformação de A^a_μ são obtidas exigindo que $D_\mu\phi$ se transforme como ϕ, isto é,

$$\begin{aligned}
(D_\mu\phi)' &= (\partial_\mu - ig\underset{\sim}{A}'_\mu)\phi' = (\partial_\mu - ig\underset{\sim}{A}'_\mu)U\phi \\
&= \partial_\mu U\phi + U\partial_\mu\phi - igA'_\mu U\phi \\
&= UD_\mu\phi + (igU\underset{\sim}{A}_\mu - ig\underset{\sim}{A}'_\mu U + \partial_\mu U)\phi
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto $(D_\mu\phi)' = U(D_\mu\phi)$ requer

$$\underset{\sim}{A}'_\mu = U\underset{\sim}{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}\partial_\mu UU^{-1} \tag{2.12}$$

Infinitesimalmente $U \simeq 1 - i\underset{\sim}{\alpha}$ e obtemos

$$\delta \underset{\sim}{A}_\mu = -i\left[\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{A}_\mu\right] - \frac{1}{g}\partial_\mu \underset{\sim}{\alpha} \ . \tag{2.13}$$

o que se escreve em componentes

$$\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= -\frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + C^{bca}\alpha^b A^c_\mu \\ &= -\frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^a - gC^{bca}\alpha^b A^c_\mu) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como na representação adjunta $(T^c)_{ab} = -iC^{bca}$ então

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}\left(\partial_\mu \delta_{ab} - ig(T^c)_{ab}A^c_\mu \alpha^b\right) \tag{2.15}$$

ou ainda

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}(D_\mu \alpha)^a \tag{2.16}$$

2.1.3 O tensor $F_{\mu\nu}$

Calculemos o comutador de duas derivadas covariantes

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]\,\phi &= \left[\partial_\nu - ig\underset{\sim}{A}_\mu, \partial_\nu - ig\underset{\sim}{A}_\nu\right]\phi \\ &= -ig\left(\partial_\nu \underset{\sim}{A}_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu\right]\right)\phi \\ &\equiv -ig\ \underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\ \phi \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde se definiu o tensor $\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} \equiv F^a_{\mu\nu}T^a$ designado por curvatura,

$$\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underset{\sim}{A}_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu\right] \tag{2.18}$$

ou em componentes

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.19}$$

Vejamos como se transforma $F_{\mu\nu}$ numa transformação de gauge.

$$\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu} = \partial_\mu \underset{\sim}{A}'_\nu - \partial_\nu \underset{\sim}{A}'_\mu - ig\left[\underset{\sim}{A}'_\mu, \underset{\sim}{A}'_\nu\right]$$

$$
\begin{aligned}
= & \left[\partial_\mu(U\underset{\sim}{A}_\nu U^{-1}) - \frac{i}{g}\partial_\mu(\partial_\nu U U^{-1}) - (\mu \leftrightarrow \nu)\right] \\
& -igU[\underset{\sim}{A}_\mu, \underset{\sim}{A}_\nu]U^{-1} - \left[\partial_\mu U U^{-1}, U\underset{\sim}{A}_\nu U^{-1}\right] \\
& - \left[U\underset{\sim}{A}_\mu U^{-1}, \partial_\nu U U^{-1}\right] + \frac{i}{g}\left[\partial_\mu U U^{-1}, \partial_\nu U U^{-1}\right]
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Usando

$$
\partial_\mu U^{-1} = -U^{-1}\partial_\mu U U^{-1} \tag{2.21}
$$

obtemos

$$
\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu} = U\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}U^{-1} \tag{2.22}
$$

ou infinitesimalmente

$$
\delta\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = -i\left[\underset{\sim}{\alpha}, \underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\right] \tag{2.23}
$$

É fácil de ver que com o tensor $F_{\mu\nu}$ é possível construir um invariante. De facto a quantidade

$$
Tr(\underset{\sim}{F}'_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}'^{\mu\nu}) = Tr(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} \tag{2.24}
$$

é invariante e pode ser usada para construir uma acção, generalizando a acção de Maxwell as para teorias abelianas.

2.1.4 Escolha de gauge

Chama-se *gauge pura* ao potencial $\underset{\sim}{A}^\mu$ tal que $\underset{\sim}{F}_{\mu\nu} = 0$. É fácil de mostrar que

$$
F_{\mu\nu} = 0 \Longleftrightarrow \exists U : \underset{\sim}{A}_\mu = \partial_\mu U U^{-1} \tag{2.25}
$$

Para evitar a arbitrariedade de gauge é conveniente por vezes impor condições de gauge. Exemplos são a *Gauge Axial* definida por

$$
n^\mu A_\mu(x) = 0 \tag{2.26}
$$

onde n^μ é um quadrivector constante, e a *Gauge Lorentz*

$$
\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \tag{2.27}
$$

2.1.5 Acção e equações de movimento

A acção para a teoria de gauge pura é

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2}\int d^4x Tr(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}\int d^4x F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Devido ao resultado anterior sobre $Tr(\underset{\sim}{F}_{\mu\nu}\underset{\sim}{F}^{\mu\nu})$, eq.(2.24), a acção é invariante para transformações do grupo de gauge G. A equação de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} = 0 \tag{2.29}$$

obtém-se facilmente notando que

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\rho\sigma}}\frac{\delta F^b_{\rho\sigma}}{\delta(\partial_\mu A^a_\nu)} = -F^a_{\mu\nu} \tag{2.30}$$

e

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A^a_\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta F^b_{\rho\sigma}}\frac{\delta F^b_{\rho\sigma}}{\delta A^a_\nu} = gC^{bca}A^b_\mu F^{\mu c}_\nu \tag{2.31}$$

Então

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} + gC^{bca}A^b_\mu F^{\mu\nu c} = 0 \tag{2.32}$$

ou ainda atendendo a que na representação adjunta $(T^c)_{ab} = -iC^{bca}$

$$(\partial_\mu\delta_{ab} - ig(T^c)_{ab}A^c_\mu)F^{\mu\nu b} = 0 \tag{2.33}$$

isto é

$$D^{ab}_\mu F^{\mu\nu b} = 0 \tag{2.34}$$

2.1.6 Tensor Energia-Momento

Como para o Electromagnetismo o tensor canónico não é invariante de gauge. De facto

$$\tilde{\theta}^{\mu\nu} = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A^a_\rho)}\partial^\nu A^a_\rho + g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$= F^{\mu\rho a}\partial^\nu A^a_\rho - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma a}F^a_{\rho\sigma} \tag{2.35}$$

Para o tornar invariante de gauge procedemos como no electromagnetismo. Subtraímos a $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$ uma quantidade que seja uma divergência para que as leis de conservação não venham alteradas. A quantidade relevante é

$$\begin{aligned}
\Delta\theta^{\mu\nu} &= \partial_\rho(F^{\mu\rho a}A^{\nu a}) \\
&= \partial_\rho F^{\mu\rho a}A^{\nu a} + F^{\mu\nu a}\partial_\rho A^{\nu a} \\
&= gC^{bca}A^b_\rho F^{\rho\mu c}A^{\nu a} + F^{\mu\rho a}\partial_\rho A^{\mu a} \\
&= F^{\mu\rho a}(-F^{\nu a}_\rho + \partial^\nu A^a_\rho)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

logo

$$\begin{aligned}
\theta^{\mu\nu} &\equiv \tilde{\theta}^{\mu\nu} - \Delta\theta^{\mu\nu} \\
&= F^{\mu\rho a}F^{\nu a}_\rho - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\nu a}F^a_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

expressão análoga à obtida no electromagnetismo. Introduzindo os análogos dos campos eléctricos e magnéticos

$$E^i_a = F^{i0}_a \ ; \ B^i_a = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{ij}_a \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{2.38}$$

obtemos

$$\begin{cases} \theta^{00} &= \frac{1}{2}(\vec{E}^a\cdot\vec{E}^a + \vec{B}^a\cdot\vec{B}^a) \\ \theta^{0i} &= (\vec{E}^a\times\vec{B}^a)^i \end{cases} \tag{2.39}$$

com uma interpretação semelhante ao caso do electromagnetismo.

2.1.7 Formulação Hamiltoniana

Da expressão para θ^{00} é claro que o Hamiltoniano é

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x\frac{1}{2}(\vec{E}^a\cdot\vec{E}^a + \vec{B}^a\cdot\vec{B}^a) \\
&= \int d^3x\mathcal{H}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

onde a $\mathcal{H}$ é a densidade Hamiltoniana.

Vamos ver no entanto que devido à invariância de gauge a relação entre o Hamiltoniano e o Lagrangeano não é a usual. Para isso é conveniente partir da acção escrita em formalismo de 1ª ordem.

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu)F^{\mu\nu a} + \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} \right\} \tag{2.41}$$

onde A^a_μ e $F^a_{\mu\nu}$ são agora variáveis independentes. É fácil de ver que a variação de S em ordem a $F^a_{\mu\nu}$ dá a sua definição

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu + gC^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.42}$$

e que por sua vez substituindo 2.42 em S obtemos a acção usual. Usando as definições de $\vec{E}^a$ e $\vec{B}^a$ obtemos

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x - (\partial^0 \vec{A}^a + \vec{\nabla} A^{0a} - gC^{abc}A^{0b}\vec{A}^c) \cdot \vec{E}^a - \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) \\ &= \int d^4x \left\{ -\partial^0 \vec{A}^a \cdot \vec{E}^a - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + A^{0a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - gC^{abc}\vec{A}^b \cdot \vec{E}^c) \right\} \end{aligned} \tag{2.43}$$

A densidade Lagrangeana escreve-se, portanto

$$\mathcal{L} = -E^{ka}\partial^0 A^{ka} - \mathcal{H}(E^{ka}, A^{ka}) + A^{0a}C^a \tag{2.44}$$

onde

$$\begin{cases} \mathcal{H} \equiv \frac{1}{2}(\vec{E}^a \cdot \vec{E}^a + \vec{B}^a \cdot \vec{B}^a) \\ B^{ka} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{kmn}F^{mna} \\ C^a = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - gC^{abc}\vec{A}^b \cdot \vec{E}^c \end{cases} \tag{2.45}$$

As variá veis A^a_k e $-E^a_k$ são as variáveis conjugadas, $\mathcal{H}(E^a_k, A^a_k)$ é a densidade Hamiltoniana. As variáveis A^{0a} desempenham o papel de multiplicadores de Lagrange para as condições,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - gC^{abc}\vec{A}^b \cdot \vec{E}^c = 0 \tag{2.46}$$

que não são mais do que as equações de movimento 2.34 para $\nu = 0$.

Se introduzirmos os parêntesis de Poisson a tempo igual

$$\{A^{ia}(x), E^{ib}(y)\}_{x_0=y_0} = \delta^{ij}\delta^{ab}\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{2.47}$$

é fácil de mostrar que

$$\{C^a(x), C^b(y)\}_{x_0=y_0} = -gC^{abc}C^c(x)\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{\mathcal{H}, C^a(x)\} = 0 \tag{2.48}$$

Isto mostra que as teorias de gauge (não abelianas neste caso, mas a afirmação é igualmente verdadeira para teorias abelianas) representam um exemplo daquilo a que se chama *Sistemas de Hamilton Generalizados* primeiro introduzidos por Dirac. Para definir estes sistemas consideremos um sistema com as variáveis canónicas (p_i, q_i) que geram o espaço de fase Γ^{2n} $(i = 1, \ldots, n)$. Então a acção destes sistemas é escrita na forma

$$S = \int L(t)dt \tag{2.49}$$

onde

$$L(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - h(p,q) - \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda^\alpha \varphi_\alpha(p,q) \ . \tag{2.50}$$

As variáveis $\lambda^\alpha(\alpha = 1, ...m)$ são multiplicadores de Lagrange e φ^α são as ligações. Para que este sistema seja um sistema de Hamilton generalizado é necessário que as condições seguintes sejam verificadas

$$\begin{aligned} \{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\} &= \sum_\alpha C^{\alpha\beta\gamma}(p,q)\varphi^\alpha \\ \{h, \varphi^\alpha\} &= C^{\alpha\beta}(p,q)\varphi^\beta \end{aligned} \tag{2.51}$$

O caso das teorias de gauge é um caso particular com $C^{\alpha\beta} = 0$. Portanto para a quantificação das teorias de gauge temos primeiro de aprender a quantificar sistemas Hamilton generalizados.

2.2 Quantificação

2.2.1 Sistemas com n graus de liberdade

Consideremos um *sistema de Hamilton generalizado* descrito na última secção. O seu Lagrangeano é

$$L(t) = p_i \dot{q}_i - h(p,q) - \lambda^\alpha \varphi^\alpha(p,q) \tag{2.52}$$

que conduz às equações de movimento

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial h}{\partial p_i} + \lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial h}{\partial q_i} - \lambda^\alpha \dfrac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q_i} \\ \varphi^\alpha &= (p,q) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, m \end{cases} \tag{2.53}$$

Pode-se mostrar que um sistema de Hamilton generalizado (**SHG**) é equivalente a um sistema de Hamilton usual (**SH**) definido um espaço de fase $\Gamma^{*2(n-m)}$. Isto é um **SHG** é equivalente a um **SH** com $n-m$ graus de liberdade. O **SH** Γ^* pode ser construído da maneira seguinte. Sejam m condições

$$\chi^\alpha(p,q) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, m \tag{2.54}$$

que satisfaçam

$$\left\{\chi^\alpha, \chi^\beta\right\} = 0 \tag{2.55}$$

e

$$\det \left|\varphi^\alpha, \chi^\beta\right| \neq 0 \tag{2.56}$$

Então o subespaço de Γ^{2n} definido pelas condições

$$\begin{cases} \chi^\alpha(p,q) &= 0 \\ \varphi^\alpha(p,q) &= 0 \end{cases} \qquad \alpha = 1, \ldots, m \tag{2.57}$$

é o espaço $\Gamma^{*2(n-m)}$ pretendido. As variáveis canónicas p^* e q^* em $\Gamma^{*2(n-m)}$ podem ser encontradas da maneira seguinte. Devido à condição 2.55 podemos escolher as variáveis q_i em Γ^{2n} de tal forma que os χ^α coincidam com as primeiras m variáveis do tipo coordenada, isto é,

$$\underbrace{q}_{n} \equiv (\underbrace{\chi^\alpha}_{m}, \underbrace{q^*}_{n-m}) \tag{2.58}$$

Sejam $p = (p^\alpha, p^*)$ os correspondentes momentos conjugados. Nestas variáveis a condição 2.56 toma a forma

$$\det \left|\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p^\beta}\right| \neq 0 \tag{2.59}$$

portanto as condições $\varphi^\alpha(p,q) = 0$ podem ser resolvidas para p^α, isto é

$$p^\alpha = p^\alpha(p^*, q^*) \tag{2.60}$$

O subespaço Γ^* é portanto definido pelas condições

$$\begin{cases} \chi^\alpha & \equiv & q^\alpha = 0 \\ p^\alpha & = & p^\alpha(p^*, q^*) \end{cases} \tag{2.61}$$

As variáveis p^* e q^* são canónicas e o Hamiltoniano é dado por

$$h^*(p^*, q^*) = h(p, q)\Big|_{(\chi=0\ ;\ \varphi=0)} \tag{2.62}$$

e as equações de movimento são agora

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h^*}{\partial p^*} \qquad \dot{p}^* = -\frac{\partial h^*}{\partial q^*} \tag{2.63}$$

num total de $2(n-m)$ equações. O resultado fundamental pode ser enunciado na forma dum teorema.

Teorema 2.1

As duas representações são equivalentes, isto é, conduzem às mesmas equações de movimento.

Dem:

As relações $q^\alpha = 0 \Longrightarrow \dot{q}^\alpha = 0$ *ou seja na descrição* (p, q)

$$\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} + \lambda^\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial p_\alpha} = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \ldots, m \tag{2.64}$$

Consideremos agora as equações de movimento para as coordenadas q^* *nas duas representações*

$$\begin{aligned} \dot{q}^* &= \frac{\partial h}{\partial p^*} + \lambda^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*} \\ \dot{q}^* &= \frac{\partial h^*}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \frac{\partial h}{\partial p^\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*} \end{aligned} \tag{2.65}$$

As duas equações serão equivalentes se

$$\lambda^\alpha \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*} \tag{2.66}$$

ou seja usando as relações 2.64

$$\lambda^\alpha \left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p^*} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial p^*} \right) = 0 \tag{2.67}$$

Ora esta relação é verdadeira em virtude da ligação $\varphi_\alpha = 0$. Portanto as duas representações são equivalentes o que demonstra[1] *o teorema.*

Para efectuar a quantificação destes sistemas podemos usar as expressões para o operador evolução em termos dum integral de caminho nas variáveis (p^*, q^*) pois estas formam um sistema Hamiltoniano normal. Temos

$$U(q_f^*, q_i^*) = \int \prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)} e^{i\int [p^* - h(p^*, q^*)]dt} \tag{2.68}$$

Embora este seja um modo possível de proceder à quantificação, não é o mais conveniente em muitas situações onde é difícil inverter as relações $\varphi^\alpha = 0$ para obter $p^\alpha = p^\alpha(p^*, q^*)$. Será mais conveniente usar as variáveis (p, q) com restrições apropriadas. Isto pode ser feito facilmente substituindo

$$\prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)} \to \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \prod_t \delta(q^*)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) \tag{2.69}$$

Então

$$U(q_f, q_i) = \int \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \prod_t \delta(q^\alpha)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) e^{i\int dt(p\dot{q} - h(p,q))} \tag{2.70}$$

Esta expressão pode ainda ser escrita em termos das ligações se recordarmos que

$$\begin{aligned} &\delta(q^\alpha) = \delta(\chi^\alpha) \\ &\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) = \delta(\varphi^\alpha) \det \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} \right| \end{aligned} \tag{2.71}$$

Então

$$\prod_t \delta(q^\alpha)\delta(p^\alpha - p^\alpha(p^*, q^*)) = \prod_t \delta(\varphi^\alpha)\delta(\chi^\alpha) \det |\{\varphi_\alpha, \chi_\beta\}| \tag{2.72}$$

Finalmente se usarmos a identidade

$$\delta(\varphi^\alpha) = \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\int dt \lambda^\alpha \varphi_\alpha} \tag{2.73}$$

obtemos

$$U(q_f, q_i) = \int \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \prod_{t,x} \delta(\chi^\alpha) \det |\{\varphi^\alpha, \chi_\beta\}| \, e^{iS(p,q,\lambda)} \tag{2.74}$$

onde

[1] As equações para as variáveis p^* tratavam-se de modo semelhante.

$$S(p,q,\lambda) = \int [p\dot{q} - h(p,q) - \lambda\varphi]dt \tag{2.75}$$

Esta é a expressão que iremos aplicar às teorias de gauge. Notar que a expressão dentro do parêntesis recto é precisamente a do Lagrangeano para sistemas de Hamilton generalizados, 2.52. Pode-se mostrar (ver problema 2.2) que os *resultados físicos* não dependem da escolha das condições auxiliares $\chi^\alpha = 0$. Em teorias de gauge, fala-se da *escolha de gauge*.

2.2.2 QED como exemplo simples

Consideremos o campo electromagnético acoplado a uma corrente conservada $J^\mu = (p, \vec{J})$, $\partial_\mu J^\mu = 0$. O Lagrangeano é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \tag{2.76}$$

A acção pode ser escrita na seguinte forma equivalente[2]

$$S = \int d^4x \left[-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}A^0 + \dot{\vec{A}}) - \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} + \frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{2} - \rho A^0 + \vec{J}\cdot\vec{A} \right] \tag{2.77}$$

As equações do movimento são, variando em ordem $\vec{E}$ e $\vec{B}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \vec{E} & = & -(\vec{\nabla}A^0 + \dot{\vec{A}}) \\ \vec{B} & = & \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} & = & 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} & = & -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \tag{2.78}$$

e, variando em ordem a A^0 e $\vec{A}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial E}{\partial t} = \vec{J} \end{array} \right. \tag{2.79}$$

Se substituirmos $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ obtemos, depois de uma integração por partes,

$$S = \int d^4x \left\{ -\vec{E}\cdot\dot{\vec{A}} - \left(\frac{\vec{E}^2 + (\vec{\nabla}\times A)^2}{2} + \vec{J}\cdot\vec{A} \right) + A^0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \rho) \right\} \tag{2.80}$$

É claro que A^0 desempenha o papel dum multiplicador de Lagrange. As variáveis canónicas são $\vec{A}$ e $\vec{E}$ mas elas não são livres pois existe uma ligação que tem que

[2] A acção escrita na forma 2.77 é designada por formalismo de 1ª ordem. Comparar com a equação 2.43.

ser respeitada, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$. Esta ligação é linear nos campos. Aqui reside a grande simplificação do electromagnetismo. Isto porque se escolhermos uma condição de gauge também linear então o $\det\{\varphi^\alpha,\chi_\beta\}$ não dependerá de $\vec{E}$ e $\vec{A}$ e será uma constante que apenas afectará a normalização. Uma tal condição de gauge é obtida, por exemplo, da forma seguinte (*gauge de Lorentz*)

$$\chi=\partial_\mu A^\mu-c(\vec{x},t) \tag{2.81}$$

onde $c(\vec{x},t)$ é uma função arbitrária. Então é fácil de ver que a expressão para o funcional gerador das funções de Green é

$$Z[J^\mu]=\int\mathcal{D}(\vec{E},\vec{A},A^0)\prod_x\delta(\partial_\mu A^\mu-c(x))e^{iS} \tag{2.82}$$

onde

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\left\{-\vec{E}\cdot\dot{\vec{A}}-\left[\frac{E^2+(\vec{\nabla}\times A)^2}{2}+(\vec{J}\cdot\vec{A})\right]+A^0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\rho)\right\}\\ &= \int d^4x\left\{-\frac{E^2}{2}-\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}A^0+\dot{\vec{A}})-\frac{(\vec{\nabla}\times A)^2}{2}-J_\mu A^\mu\right\} \end{aligned} \tag{2.83}$$

A integração em $\vec{E}$ é gaussiana e pode ser imediatamente efectuada obtendo-se

$$Z[J\mu]=\int\mathcal{D}(A_\mu)\prod_x\delta(\partial_\mu A^\mu-c(x))e^{iS} \tag{2.84}$$

onde agora

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)-J_\mu A^\mu\right]\\ &= \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-J_\mu A^\mu\right] \end{aligned} \tag{2.85}$$

Como as funções $c(x)$ são arbitrárias podemos integrar sobre elas com um peso

$$\exp\left(-\frac{1}{2\xi}\int d^4x c^2(x)\right) \tag{2.86}$$

obtendo então o resultado familiar

$$Z[J^\mu]=\int\mathcal{D}(A_\mu)e^{i\int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^2-\frac{1}{2\xi}(\partial\cdot A)^2-J\cdot A\right]} \tag{2.87}$$

Como veremos adiante se tivéssemos escolhido uma condição de gauge não linear, o $\det|\{q,\chi\}|$ já dependeria de $\vec{E}$ ou $\vec{A}$ e não teria sido possível absorvê-lo na normalização (que é irrelevante pois escolhemos sempre a normalização de forma que $Z[0]=1$) . Nesse caso será necessário utilizar os métodos das teorias de gauge não abelianas que vamos estudar na próxima secção.

2.2.3 Teorias de gauge não abelianas. Gauges não covariantes

Vimos anteriormente que a acção para as teorias de gauge não abelianas (TGNA), se podia escrever na forma

$$\begin{aligned} S &= 2\int d^4x Tr\left[\underset{\sim}{\vec{E}}\cdot\partial^0\underset{\sim}{\vec{A}}+\frac{1}{2}(\underset{\sim}{\vec{E}}^2+\underset{\sim}{\vec{B}}^2)-\underset{\sim}{A}^0(\vec{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\vec{E}}+g[\underset{\sim}{\vec{A}},\underset{\sim}{\vec{E}}])\right] \\ &= \int d^4x\left[-E_k^a\partial^0A_k^a-\mathcal{H}(E_k,A_k)+A^{0a}C^a\right] \end{aligned} \tag{2.88}$$

onde

$$C^a=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^a-gC^{abc}\vec{A}^b\cdot\vec{E}^c \tag{2.89}$$

Se introduzirmos os parêntesis de Poisson a tempo igual

$$\left\{-E_a^i(x),A_b^j(y)\right\}_{x^0=y^0}=\delta^{ij}\delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{2.90}$$

é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} &\left\{C^a(x),C^b(y)\right\}_{x_0=y_0}=-gC^{abc}C^c(x)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\{H,C^a(x)\}=0 \end{aligned} \tag{2.91}$$

onde

$$H=\int d^3x\mathcal{H}(E_k,A_k)=\frac{1}{2}\int d^3x\left[(E^{ka})^2+(B^{ka})^2\right] \tag{2.92}$$

Assim as teorias de gauge não abelianas representam um exemplo de sistemas da Hamilton generalizados. As variáveis do género coordenada são A_k^a, os momentos conjugados são $-E_k^a$. As varáveis A^{0a} são multiplicadores de Lagrange para garantir as ligações

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}^a-gC^{abc}\vec{A}^b\cdot\vec{E}^c=0 \tag{2.93}$$

que são parte das equações de movimento.

Para procedermos à quantificação podemos usar o formalismo da secção 2.2.1 para **SHG**. Temos para isso que impor r condições auxiliares (r é a dimensão do grupo de Lie), isto é, tantas como as condições de ligação $C^a(x)=0$, $a=1,\ldots,r$. Escolher estas condições é aquilo que se chama escolher, ou fixar, a gauge. Esta escolha é arbitrária, os resultados físicos não devem depender dela (ver problema 2.2). No entanto expressões intermédias como sejam, por exemplo, as regras de Feynman, dependem fortemente da gauge.

Como vimos no exemplo do electromagnetismo se for possível fixar uma condição de gauge linear nas variáveis dinâmicas, $\vec{A}^a$ e $\vec{E}^a$, então a expressão do integral de caminho simplifica-se bastante devido ao facto do determinante não depender dessas variáveis e poder ser absorvido numa constante de normalização. Uma gauge em que isto é possível é a chamada gauge axial que passaremos a estudar.

- **Gauge Axial**

É sempre possível efectuar uma transformação de gauge tal que a componente de $\vec{A}^a$ segundo uma direcção espacial seja nula em todos os pontos, isto é, escolhendo a direcção segundo o eixo dos zz

$$A^{3a} = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r \tag{2.94}$$

Estas r condições constituem as nossas condições auxiliares necessárias para se proceder à quantificação da teoria. A vantagem desta escolha de gauge é a seguinte. Se calcularmos $\{C^a, A^{3b}\}$ obtemos

$$\begin{aligned} \{C_a(x), A^3_b(y)\} &= \{\partial_k E^k_a(x), A^3_b(y)\} - gC_{adc}A^k_d\{E^k_c(x), A^3_b(y)\} \\ &= -g\ \delta_{ab}\frac{\partial}{\partial x^3}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{\delta}{\delta\alpha^a(x)}(\delta A^3_b(y)) \end{aligned} \tag{2.95}$$

onde se usou o facto de $A^3_b = 0$. Vemos assim que $\{C^a, A^3_b\}$ não depende de $\vec{A}_a$ e $\vec{E}_a$ e o determinante que aparece na expressão do integral de caminho pode ser absorvido na normalização. Podemos assim escrever para o funcional gerador das funções de Green

$$Z[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(\vec{E}, \vec{A}, A^0) \prod_x \delta(A^3) e^{iS(\vec{E},\vec{A},A^0,J^\mu)} \tag{2.96}$$

onde

$$S(\vec{E}, \vec{A}, A^0, J^\mu) = \int d^4x \left[-\vec{E}^a \cdot \partial^0 \vec{A}^a - \frac{1}{2}\left[(\vec{E}^a)^2 + (\vec{B}^a)^2\right] + A^{0a}C^a + A^a \cdot J^a\right] \tag{2.97}$$

e

$$C^a = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a - gC^{abc}\vec{A}^b \cdot \vec{E}^c \tag{2.98}$$

Como a integração em $\vec{E}$ aparece na forma duma integração gaussiana obtemos facilmente

$$Z_A[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(A^\mu) \prod_x \delta(A^3) e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(x) + A^a \cdot J^a\right]} \tag{2.99}$$

onde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}) \tag{2.100}$$

O índice A em $Z_A[J^{\mu a}]$ realça o facto deste funcional corresponder à escolha de gauge axial. Embora a expressão para o funcional gerador se escreva facilmente nesta gauge ela tem a desvantagem das regras de Feynman não serem covariantes. Antes de introduzirmos as gauge covariantes mostraremos ainda outra gauge não covariante a chamada gauge de Coulomb:

- **Gauge de Coulomb**

Esta gauge é definida pelas condições auxiliares

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r \tag{2.101}$$

Estas condições auxiliares têm um parêntesis de Poisson não trivial com as ligações $C^a(x)$. De facto (ver problema 2.3)

$$\delta\vec{A}_a = -\frac{1}{g}\int d^3y \left\{\vec{A}_a(x), \alpha^b(y)C_b(y)\right\}_{x_0=y_0} \tag{2.102}$$

logo

$$\left\{\vec{A}_a(x), C_b(y)\right\}_{x_0=y_0} = -g\frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}(\delta\vec{A}_a(x)) \tag{2.103}$$

e

$$\left\{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a(x), C_b(y)\right\}_{x_0=y_0} = -g\frac{\delta}{\delta\alpha_b(y)}\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{A}_a(x)) \tag{2.104}$$

Como

$$\delta\vec{A}_a(x) = \frac{1}{g}\vec{\nabla}\alpha_a(x) + C_{abc}\alpha^b(x)\vec{A}^c(x) \tag{2.105}$$

obtemos (com a condição $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a = 0$)

$$-g\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{A}_a(x)) = -\nabla^2_x\alpha_a(x) - gC_{abc}\vec{A}_c(x) \cdot \vec{\nabla}\alpha_b(x) \tag{2.106}$$

e finalmente

$$\begin{aligned} \left\{\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_a(x), C_b(y)\right\} &= \left[-\nabla^2_x\delta_{ab} - gC_{abc}\vec{A}_c(x) \cdot \vec{\nabla}_x\right]\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\equiv \mathcal{M}^c_{ab}(x,y) \end{aligned} \tag{2.107}$$

Como $\det\mathcal{M}$ embora dependendo de $\vec{A}$ não depende de $\vec{E}$, a integração gaussiana em $\vec{E}$ pode ainda ser feita e obtemos

$$Z_C[J^{\mu a}] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_x [\det \mathcal{M}_C \prod_x \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + A^a \cdot J^a]} \tag{2.108}$$

Agora não é possível absorver $\det \mathcal{M}$ na normalização. As regras de Feynman que podem ser obtidas a partir de $Z_C[J^\mu]$ também não são covariantes.

2.2.4 TGNA em gauge covariantes

As condições de gauge escolhidas até aqui (gauge axial e gauge de Coulomb) conduzem a regras de Feynman onde a covariância de Lorentz é perdida. Claro que os resultados finais não devem depender desta escolha, mas a não covariância dos cálculos intermédios é normalmente uma complicação. Vamos aqui generalizar os resultados anteriores a gauges covariantes. O método a seguir surgirá como um subproduto da resposta a um outro problema: Como mostrar a equivalência das gauges axial e de Coulomb?

Para o argumento que se segue é conveniente trabalhar com quantidades invariantes de gauge. Assim em vez do funcional $Z_A[J^\mu]$ vamos por agora considerar o integral $Z_A[J = 0]$ que como vimos tem o significado duma amplitude transição vácuo $\rightarrow$ vácuo na ausência das fontes exteriores,

$$Z_A[0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta(A^{3a}(x)) \exp\{iS[A_\mu]\} \tag{2.109}$$

onde $S[A_\mu]$ é a acção. Numa transformação de gauge

$$\underset{\sim}{A}_\mu \rightarrow \underset{\sim}{A}'_\mu = {}^g\underset{\sim}{A}_\mu = U(g)\underset{\sim}{A}_\mu U^{-1}(g) - \frac{i}{g}\partial_\mu U U^{-1} \tag{2.110}$$

A acção $S[A_\mu]$ e a medida $\mathcal{D}(A_\mu)$ são invariantes, pelo que obtemos

$$Z_A(J = 0) = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta({}^gA^{3a}(x)) \exp\{iS[A_\mu]\} \ . \tag{2.111}$$

Definimos agora o funcional $\Delta_C[A_\mu]$ através da relação

$$\Delta_C^{-1}(A_\mu) = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^g\vec{A}^a) \tag{2.112}$$

onde $\mathcal{D}(g)$ representa o produto infinito de medidas invariantes para o grupo G em cada ponto, isto é

$$\mathcal{D}(g) = \prod_x dg(x) \ . \tag{2.113}$$

A invariância da medida da integração do grupo G, $dg' = d(gg')$ tem como consequência que Δ_C é invariante de gauge. De facto

$$\begin{aligned}
\Delta_C^{-1}({}^{g}A_\mu) &= \int \mathcal{D}(g') \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g'g}\vec{A}^a) \\
&= \int \mathcal{D}(g'g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g'g}\vec{A}^a) \\
&= \Delta_C^{-1}[A_\mu] \qquad (2.114)
\end{aligned}$$

Introduzimos agora na expressão de $Z_A[J=0]$ a identidade

$$1 = \Delta_C[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g}\vec{A}^a) \qquad (2.115)$$

Obtemos então

$$\begin{aligned}
Z_A(J=0) &= \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \prod_{x,a} \delta\left(A^{3a}(x)\right) \Delta_C[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{y,b} \delta(\vec{\nabla} \cdot {}^{g}\vec{A}^b) \\
&= \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS[A_\mu]} \Delta_C[A_\mu] \prod_{y,b} \delta\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^b\right) \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta({}^{g^{-1}}A^{3a}) \qquad (2.116)
\end{aligned}$$

onde usámos a invariância de $\mathcal{D}$, $S[A_\mu]$ e $\Delta_C[A_\mu]$. Como a medida é invariante podemos escrever no último integral $g^{-1} \to gg_0$. Então

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g^{-1}}A^{3a}(x)\right) = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{gg_0}A^{3a}(x)\right) \qquad (2.117)$$

onde g_0 é a transformação de gauge que leva da gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ para a gauge $A'^3 = 0$, isto é

$$A'^3 = {}^{g_0}A^3 = 0 \qquad (2.118)$$

com $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Falta-nos portanto calcular o integral sobre o grupo que agora se escreve

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g}A'^{3a}(x)\right) \qquad (2.119)$$

com $A'^{3a} = 0$. Como $A'^{3a} = 0$ basta considerar transformações infinitesimais, na vizinhança da identidade,

$$g(x) = e - i\underset{\sim}{\alpha}(x) = e - i\alpha^a(x)t^a \qquad (2.120)$$

onde $\alpha^a(x)$ são infinitesimais. Nestas condições a medida de integração $dg(x)$ vem dada por

$$dg(x) = \prod_a d\alpha^a(x) \qquad (2.121)$$

Por outro lado em primeira ordem em α^a temos

$$ {}^{g}A'^{3a}(x) = \frac{1}{g}\,\frac{\partial \alpha^a}{\partial x^3} \tag{2.122} $$

pelo que o integral virá

$$ \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g}A'^{3a}(x)\right) = \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left(\frac{1}{g}\frac{\partial \alpha^a}{\partial x^3}\right) = \mathcal{N} \tag{2.123} $$

O integral é independente de A_μ pelo que pode ser absorvido na normalização. Obtemos assim

$$ Z_A[J=0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_C[A_\mu] \prod_x \delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) e^{iS[A_\mu]} \tag{2.124} $$

Na secção anterior obtivemos uma expressão para $Z_C[J=0]$, que é

$$ Z_C[J=0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_x \det \mathcal{M}_C \prod_x \delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) e^{iS[A_\mu]} \tag{2.125} $$

Portanto para mostrar a equivalência dos integrais representando a amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* na ausência de fontes exteriores nas duas gauges consideradas falta-nos mostrar que $\Delta_C[A_\mu] = \det \mathcal{M}_C$. De facto

$$ \begin{aligned} \Delta_C^{-1}[A_\mu] &= \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(\vec{\nabla}\cdot {}^{g}\vec{A}^a\right) \\ &= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left[\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{g}\vec{\nabla}\alpha^a(x) + C^{abc}\alpha^b \vec{A}^c\right)\right] \\ &= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left(\frac{1}{g}\nabla_x^2 \alpha^a(x) + C^{abc}\vec{\nabla}\alpha^b \cdot \vec{A}^c\right) \\ &\propto \det{}^{-1} \mathcal{M}_C \end{aligned} \tag{2.126} $$

onde

$$ \begin{aligned} \mathcal{M}_C^{ab}(x,y) &= -g \frac{\delta}{\delta \alpha^b(y)} \left(\vec{\nabla}\cdot {}^{g}\vec{A}^a\right)_{\alpha=0} \\ &= \left(-\nabla_x^2 \delta_{ab} - g C_{abc} \vec{A}_c \cdot \vec{\nabla}_x\right) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \end{aligned} \tag{2.127} $$

Portanto $\Delta_C[A_\mu] \propto \det \mathcal{M}_C$ e à parte uma normalização irrelevante $Z_A[0] = Z_C[0]$.

A maneira como se demonstrou a equivalência entre as gauges de Coulomb e axial sugere a forma de definir a amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* para uma gauge arbitrária definida pela condição

$$F^a[A_\mu] = 0 \qquad\qquad a = 1, \ldots, r \tag{2.128}$$

Para isso definimos $\Delta_F[A_\mu]$ pela expressão

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^gA_\mu]\right) \tag{2.129}$$

e como anteriormente introduzimos

$$1 = \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^gA_\mu]\right) \tag{2.130}$$

na expressão para $Z_A[J=0]$. Obtemos

$$\begin{aligned}
Z_A[J=0] &= \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{x,a} \delta\left(A^{3a}(x)\right) e^{iS[A_\mu]} \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}(g) \prod_{y,b} \delta\left(F^b[{}^gA_\mu]\right) \\
&= \int \mathcal{D}(A_\mu) \prod_{y,b} \delta\left(F^b[A_\mu]\right) \Delta_F[A_\mu] e^{iS[A_\mu]} \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left({}^{g^{-1}}A^{3a}(x)\right) \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A_\mu] \prod_{x,a} \delta\left(F^b[A_\mu]\right) e^{iS[A_\mu]} \\
&= \mathcal{N} Z_F[J=0]
\end{aligned} \tag{2.131}$$

mostrando que as gauges axial e as gauges do tipo F são equivalentes. A amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* na gauge $F^a = 0$ é portanto dada por

$$Z_F[J=0] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A_\mu] \prod_{x,a} \delta\left(F^a[A_\mu]\right) e^{iS[A_\mu]} \tag{2.132}$$

Falta-nos calcular $\Delta_F[A_\mu]$. Como na definição anterior $\Delta_F[A_\mu]$ aparece multiplicado por $\prod \delta\left(F^a[A_\mu]\right)$, basta-nos conhecer $\Delta_F[A_\mu]$ para A_μ que satisfaz $F^a[A_\mu] = 0$. Então para g perto da identidade obtemos

$$\begin{aligned}
F^a[{}^gA^b_\mu] &= F^a[A^b_\mu] + \frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu} \delta A^b_\mu \\
&= -\frac{1}{g} \frac{\delta F^a}{\delta A^b_{mu}} \left(D_\mu \alpha\right)^b
\end{aligned} \tag{2.133}$$

onde se usou $F^a[A^b_\mu] = 0$ e $\delta A^b_\mu = -\frac{1}{g}(D_\mu\alpha)^b$. Calculemos então Δ_F. Obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta_F^{-1}[A_\mu] &= \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta\left(F^a[{}^gA^b_\mu]\right) \\
&= \int \mathcal{D}(\alpha) \prod_{x,a} \delta\left(-\frac{1}{g} \frac{\delta F^a}{\delta A^b_\mu} (D_\mu \alpha)^b\right)
\end{aligned}$$

$$\propto \quad \det{}^{-1}\mathcal{M}_F \tag{2.134}$$

onde

$$\mathcal{M}_F^{ab}(x,y) = \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^c(x)} D_\mu^{cb}\delta^4(x-y) = -g\frac{\delta F^a[{}^g A(x)]}{\delta \alpha^b(y)} \tag{2.135}$$

e portanto

$$\Delta_F[A_\mu] = \det \mathcal{M}_F = \det\left(-g\frac{\delta F^a(x)}{\delta(\alpha^b(y)}\right) \tag{2.136}$$

Já sabemos como escrever a amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* na ausência de fontes exteriores para uma gauge arbitrária. De facto não é esta quantidade a mais interessante, mas sim a amplitude *vácuo* $\to$ *vácuo* na presença de fontes, $Z_F[J]$ pois será esta que gera as funções de Green. Em toda a discussão até aqui se fizeram as fontes exteriores nulas. A razão é que o termo das fontes, $\int d^4x J_\mu^a A^{\mu a}$, não é invariante de gauge. Se definirmos $Z_F[J_\mu^a]$ pela relação

$$Z_F[J_\mu^a] \equiv \int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu]\prod_{x,a}\delta(F^a[A_\mu^b(x)])e^{i(S[A_\mu]+\int d^4x J_\mu^a A^{\mu a})} \tag{2.137}$$

então é claro que os funcionais Z_F não serão equivalentes para diferentes escolhas de $F^a = 0$. Isto quer dizer que as funções de Green calculadas a partir de $Z_F[J^\mu]$ vão depender de gauge $F^a = 0$. Na secção 2.2.5 mostraremos que embora as funções de Green dependam da escolha de gauge, este não é um problema importante porque os resultados fisicamente relevantes (mensuráveis) estão relacionados com os elementos da matriz S renormalizada e esta é independente da gauge conforme aí mostraremos.

Antes de acabarmos esta secção façamos uma transformação no funcional $Z_C[J_\mu^a]$ para nos vermos livres da função δ que aí intervém. Para os cálculos é de toda a conveniência exponenciar$\prod \delta(F^a[A_\mu])$. Isto pode fazer-se do seguinte modo. Definamos uma condição de gauge mais geral

$$F^a[A_\mu^b] - c^a(x) = 0 \tag{2.138}$$

onde $c^a(x)$ são funções arbitrárias do espaço-tempo, mas não dependem dos campos. Então $\Delta_F[A]$ não vem alterado e escrevemos

$$Z_F[J_\mu^a] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu]\prod \delta(F^a[A_\mu]-c^a)e^{i(S[A_\mu]+\int d^4x J_\mu^a A^\mu)} \tag{2.139}$$

O lado esquerdo da equação não depende de $c^a(x)$ pelo que podemos integrar em $c^a(x)$ com um peso conveniente, especificamente com

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\ c_a^2(x)\right\} \tag{2.140}$$

onde x é um parâmetro real. Obtemos então

$$\begin{aligned} Z_F[J^a_\mu] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu]e^{i\left(S[A_\mu]+\int d^4x\left(-\frac{1}{2}F_a^2+J^{\mu a}A^a_\mu\right)\right)} \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A_\mu]e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(x)-\frac{1}{2}F_a^2+J^{\mu a}A^a_\alpha]} \end{aligned} \tag{2.141}$$

Esta expressão é o ponto de partida para o cálculo das funções de Green numa gauge arbitrária definida pela função F^a. Para sermos capazes de estabelecer as regras de Feynman para esta teoria teremos ainda de exponenciar $\Delta_F[A_\mu]$. Isto será feito numa das secções seguintes com a introdução dos chamados *fantasmas* de Fadeev-Popov.

2.2.5 Invariância de gauge da matriz S

Na secção anterior definimos o funcional gerador das funções de Green $Z_F[J^a_\mu]$, para uma gauge dada pela função $F^a[A^b_\mu]$, através da relação

$$Z_F[J^a_\mu] \equiv \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_F[A]\prod_{x,a}\delta(F^a[A^b_\mu(x)])e^{i(S[A_\mu]+\int d^4xJ^a_\mu A^{\mu a})} \tag{2.142}$$

e mostrámos a equivalência das diferentes gauges quando as fontes eram nulas. Vamos agora mostrar o que acontece quando $J^a_\mu \neq 0$. Para isso vamos refazer a demonstração da equivalência entre duas gauges na presença das fontes. Escolhemos para esta demonstração as gauges de Coulomb e Lorentz[3] definidas por

$$\begin{cases} F^a = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}^a & \textit{gauge de Coulomb} \\ F^a = \partial_\mu A^{\mu a} & \textit{gauge de Lorentz} \end{cases} \tag{2.143}$$

Definimos então os funcionais geradores $Z_C[j^a_\mu]$ e $Z_L[J^a_\mu]$ por

$$Z_C[j^a_\mu] \equiv \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_c[A]\prod_{x,a}\delta(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}^a)e^{i(S[A]+\int d^4xj^a_\mu A^{\mu a})} \tag{2.144}$$

e

$$Z_L[J^a_\mu] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}(A_\mu)\Delta_L[A]\prod_{x,a}\delta(\partial_\mu A^{\mu a})e^{i(S[A]+\int d^4xJ^a_\mu A^{\mu a})} \tag{2.145}$$

Vamos mostrar a relação entre eles. Seguindo os métodos da secção anterior introduzimos em $Z_C[j^a_\mu]$ a identidade dada por

[3]Depois de estudarmos as identidades de Ward-Takahashi faremos uma demonstração geral (ver secção 2.3.4)

$$1 = \Delta_L[A] \int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} (\partial_\mu {}^g A^{\mu a}) \tag{2.146}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
&Z_C[j^a_\mu] \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_C[A] \textstyle\prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}^a) e^{i(S[A] + \int d^4x j^a_\mu A^{\mu a})} \Delta_L[A] \int \mathcal{D}(g) \textstyle\prod_{y,b} \delta(\partial_\mu \, {}^g A^{\mu a}) \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \textstyle\prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} \Delta_C[A] \int \mathcal{D}(g) \textstyle\prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \, {}^{g^{-1}}\vec{A}^a) e^{i \int d^4x j^a_\mu \, {}^{g^{-1}}A^{\mu a}} \\
&= \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \textstyle\prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} \Delta_C[A] \int \mathcal{D}(g) \textstyle\prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \, {}^{gg^0}\vec{A}^a) e^{i \int d^4x j^a_\mu \, {}^{gg^0}A^{\mu a}}
\end{aligned} \tag{2.147}$$

onde g^0 é a transformação de gauge que leva de gauge $\partial_\mu A^{\mu a} = 0$ para a gauge $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}'^a = 0$, $\vec{A}'^a = {}^g\vec{A}$ e é portanto obtida resolvendo a equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \left[U(g^0) \vec{A} U^{-1}(g^0) - \frac{i}{g} \vec{\nabla} U(g^0) U^{-1}(g^0) \right] = 0 \tag{2.148}$$

onde $\partial_\mu A^{\mu a} = 0$. Devido ao factor $\prod_x \delta(\vec{\nabla} \cdot \, {}^g\vec{A}')$ só nos interessam as transformações g infinitesimais pelo que

$$Z_C[j^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A]} e^{i \int d^4x j^a_\mu \, {}^{g^0}A^\mu} \tag{2.149}$$

onde se usou o resultado

$$\int \mathcal{D}(g) \prod_{x,a} \delta(\vec{\nabla} \cdot \, {}^g\vec{A}') = \Delta_C^{-1}[A] \ . \tag{2.150}$$

Para comparar com $Z_L[J^a_\mu]$ é necessário escrever ${}^{g^0}A^\mu$ em função de A^μ, resolvendo a equação para g^0. Isto pode ser feito formalmente em série de potenciais de A^μ. É fácil de ver que devemos ter

$$A'_i = \left(\delta_{ij} - \nabla_i \frac{1}{\nabla^2} \nabla_j \right) A_j + O(A^2_\lambda) \tag{2.151}$$

Se restringirmos a fonte na gauge de Coulomb a ser transversal $j^0 = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ podemos então escrever

$$Z_C[j^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_L[A] \prod_{y,b} \delta(\partial_\mu A^{\mu b}) e^{iS[A] + \int d^4x F^a_\mu j^{\mu a}} \tag{2.152}$$

onde $F^C_\mu[A] = A^a_\mu + O(A^2_\lambda)$. Comparando com a expressão de $Z_L[J^a_\mu]$ obtemos finalmente

$$Z_C[j^a_\mu] = \exp\left\{ i \int d^4x j^a_\mu F^{\mu a}\left[\frac{\delta}{i\delta J^b}\right]\right\} Z_L[J^a_\mu] \tag{2.153}$$

Esta é a expressão que relaciona Z_C com Z_L. Como $F_\mu[A]$ é um funcional complicado é fácil de ver que as funções de Green nas duas gauges vão ser diferentes. Mas o que tem significado físico (comparável com a experiência) são os elementos de matriz S renormalizada. O teorema da equivalência que a seguir demonstramos mostra que a matriz S renormalizada é invariante de gauge. Por simplicidade demonstraremos o teorema para a teoria $\lambda\phi^4$ mas o raciocínio é análogo para o caso das teorias de gauge.

Teorema 2.2

Se dois funcionais geradores Z e $\tilde{Z}$ diferem somente nos termos das fontes exteriores então eles conduzem à mesma matriz S renormalizada.

Dem. *Consideremos o funcional gerador das funções de Green*

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}(\phi) e^{i(S[\phi]+\int d^4x J\phi)} \tag{2.154}$$

onde

$$S[\phi] + \int d^4x J\phi = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right] . \tag{2.155}$$

Que acontece se acoplarmos a fonte exterior a $\phi + \phi^3$ em vez de ser somente a ϕ ? Podemos escrever o funcional gerador $\tilde{Z}[j]$ dado por

$$\tilde{Z}[j] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}(\phi) e^{i[S[\phi]+\int d^4x j(\phi+\phi^3)]} \tag{2.156}$$

e podemos escrever $\tilde{Z}[j]$ em termos de $Z[J]$,

$$\tilde{Z}[j] = \exp\left\{ i \int d^4x j(x) F\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\right\} Z[J] \tag{2.157}$$

onde $F[\phi] = \phi + \phi^3$. Consideremos a função de 4- pontos, $\tilde{G}(1,2,3,4)$ gerada por $\tilde{Z}[j]$

$$\tilde{G}(1,2,3,4) = (-i)^4 \frac{\delta^4 \tilde{Z}[j]}{\delta j(1)\delta j(2)\delta j(3)\delta j(4)} \tag{2.158}$$

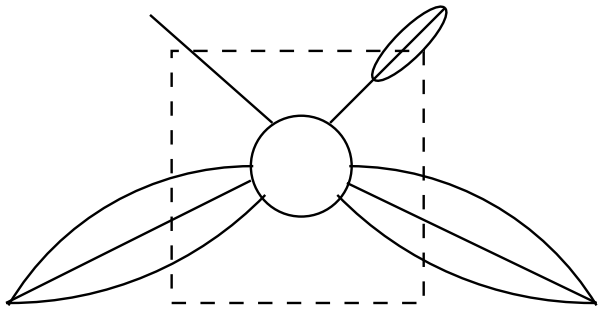
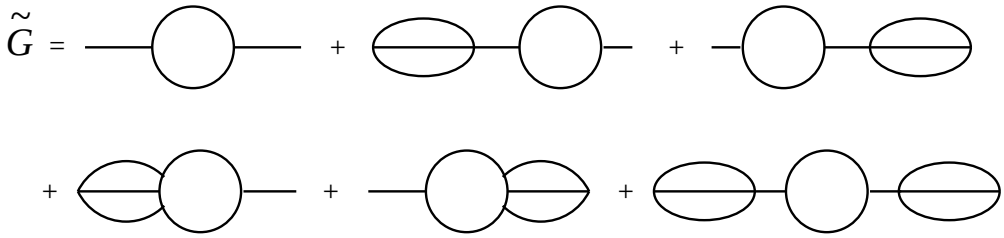


Figura 2.1:

Um diagrama típico que contribui para $\tilde{G}(1,2,3,4)$ *é o da Figura 2.1, onde a parte do diagrama dentro do quadrado a tracejado é uma função de Green gerada por* $Z[J]$.

Consideremos agora os propagadores $\tilde{G}(1,2)$ *e* $G(1,2)$ *gerados por* $\tilde{Z}[j]$ *e* $Z[J]$ *respectivamente. Obtemos a seguinte expansão de* $\tilde{G}(1,2)$ *em termos de* $G(1,2)$



(2.159)

Se examinarmos os propagadores junto do pólo na massa física, obtemos (Z_2 *e* $\tilde{Z}_2$ *são as constantes de renormalização nos dois esquemas)*

$$\lim_{p^2 \to m_R^2} \tilde{G} = \frac{i\tilde{Z}_2}{p^2 - m_R^2} \qquad ; \qquad \lim_{p^2 \to m_R^2} = \frac{iZ_2}{p^2 - m_R^2} \ . \tag{2.160}$$

Então multiplicando a expansão da equação 2.159 por $p^2 - m_R^2$ *e tomando o limite* $p^2 \to m_R^2$ *obtemos*

$$\tilde{Z}_2 = Z_2 \Big[1 + 2$$  $$+ \Big($$  $$\Big)^2 + \cdots \Big] \tag{2.161}$$

ou seja

$$\sigma \equiv \left(\frac{\tilde{Z}_2}{Z_2}\right)^{1/2} = 1 +$$  $$+ \cdots \tag{2.162}$$

A matriz S não renormalizada é dada por

$$S^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) G(k_1, \ldots, k_n) \tag{2.163}$$

para as funções de Green calculadas a partir de $Z[J]$. Definimos de igual modo

$$\tilde{S}^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) \tilde{G}(k_1, \ldots, k_n) \tag{2.164}$$

para as funções de Green calculadas a partir do funcional $\tilde{Z}[j]$, sendo n o número de partículas exteriores. Do argumento usado para relacionar $\lim(k^2 - m_R^2)\tilde{G}(k_1, \ldots, k_n)$ com $\lim(k^2 - m_R^2)G(k_1, \ldots, k_n)$ é fácil de ver que para relacionar $\prod \lim(k_i^2 - m_R^2)\tilde{G}$ com $\prod \lim(k_i^2 - m_R^2)G$ somente contribuem os diagramas que tiverem pólos em todas as variáveis k_i^2. Então

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2)\tilde{G} &= \left(\frac{Z}{\tilde{Z}}\right)^{-n} \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) G \\ &= \sigma^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \lim_{k_i^2 \to m_R^2} (k_i^2 - m_R^2) G \end{aligned} \tag{2.165}$$

Portanto obtemos uma relação entre os elementos da matriz S não normalizada

$$\tilde{S}^{\ \mathrm{NR}} = \sigma^{\frac{n}{2}} S^{\ \mathrm{NR}} \tag{2.166}$$

ou ainda

$$\frac{1}{\tilde{Z}^{\frac{n}{2}}} \tilde{S}^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n) = \frac{1}{Z^{\frac{n}{2}}} S^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n) \tag{2.167}$$

Mas $\frac{1}{Z^{\frac{n}{2}}} S^{\mathrm{NR}}(k_1, \ldots, k_n)$ *é precisamente a definição da matriz S renormalizada pelo que*

$$\tilde{S}^{\mathrm{R}} = S^{\mathrm{R}} \ . \tag{2.168}$$

Concluímos assim que dois funcionais geradores que defiram pelo acoplamento à fonte exterior produzem os mesmos elementos de matriz da matriz S renormalizada. Isto completa a demonstração do teorema da equivalência.

A aplicação deste resultado ao nosso caso é agora imediata pois

$$Z_C[j^a_\mu] = \exp\left\{ i \int d^4x j^a_\mu F^{\mu a} \left[\frac{\delta}{i\delta J_x} \right] \right\} Z_L[J^c_\mu] \tag{2.169}$$

onde $F^a_\mu[A] = A^a_\mu + O(A^2_\lambda)$. A diferença entre $Z_C[j_\mu]$ e $Z_L[J_\mu]$ reside no acoplamento à fonte exterior, pelo que embora as funções de Green dependam da gauge, a matriz S renormalizada deverá ser invariante.

2.2.6 Os fantasmas de Fadeev-Popov

Tendo demonstrado a invariância de gauge de matriz S renormalizada, voltemos ao funcional gerador numa gauge arbitrária definida pela condição $F^a[A^b_\mu]$. No final de secção 2.2.4 tínhamos escrito este funcional na forma

$$Z_F[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A] e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2\xi}(F^a)^2 + J^a_\mu A^{\mu a}]} \tag{2.170}$$

onde

$$\Delta_F[A] = \det \mathcal{M}_F = \det \left(-g \frac{\delta F^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} \right) \tag{2.171}$$

Nesta forma as regras de Feynman são complicadas porque o $\det \mathcal{M}_F$ conduz a interacções não locais entre os campos de gauge. Se de alguma forma pudéssemos exponenciar $det \mathcal{M}_F$ e metê-lo numa acção efectiva teríamos o nosso problema resolvido.

Ora no nosso estudo dos integrais gaussianos sobre variáveis de Grassman obtivemos o resultado

$$\int \mathcal{D}(\overline{\omega}, \omega) e^{-\int d^4x \overline{\omega} \mathcal{M}_F \omega} = \det \mathcal{M}_F \tag{2.172}$$

usando este resultado e mudando por conveniência $\mathcal{M}_F \to i\mathcal{M}_F$ (uma mudança na normalização irrelevante) obtemos

$$Z_F[J^a_\mu] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}(A_\mu, \overline{\omega}, \omega) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{eff} + J^a_\mu A^{\mu a}]} \tag{2.173}$$

onde $\overline{\omega}$ e ω são campos escalares anticomutativos e o $\mathcal{L}_{eff}$ é definido por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G \tag{2.174}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} \\ \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{2\xi} (F^a)^2 \\ \mathcal{L}_G &= -\overline{\omega}^a \mathcal{M}^{ab}_F \omega^b \end{aligned} \tag{2.175}$$

Os campos ω e $\overline{\omega}$ são campos auxiliares não físicos e chamam-se *fantasmas de Fadeev-Popov*. Como não são físicos não há problema com o teorema que relaciona o spin com a estatística[4].

Calculemos agora duma forma mais explícita o Lagrangeano do fantasmas. Como

$$\mathcal{M}^{ab}_F(x,y) = -g \frac{\delta F^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = \frac{\delta F^a[A(x)]}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cb}_\mu \tag{2.176}$$

obtemos

$$\int d^4x d^4y \overline{\omega}^a(x) \mathcal{M}^{ab}_F(x,y) \omega^b(y) = \int d^4x \int d^4y \; \overline{\omega}^a \frac{\delta F^a(x)}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cb}_\mu \omega_b(y) \tag{2.177}$$

ou seja

$$\mathcal{L}_G = -\int d^4y \; \overline{\omega}^a(x) \frac{\delta F^a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} D^{bc}_\mu \omega_c(y) \tag{2.178}$$

Para termos uma forma mais explícita temos que especificar a gauge. Na gauge de Lorentz $F^a = \partial_\mu A^{\mu a}$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G(x) &= -\int d^4y \overline{\omega}^a(x) \partial^\mu_x \left[\delta^4(x-y)\right] D^{ab}_\mu \omega^b(y) \\ &= \partial^\mu \overline{\omega}^a(x) D^{ab}_\mu \omega^b(x) \end{aligned} \tag{2.179}$$

onde se efectuou uma integração por partes e a derivada covariante na representação adjunta[5] é

[4] Campos físicos com spin inteiro são bosões (comutativos) e campos físicos com spin semi-inteiro são fermiões (anticomutativos).

[5] Os fantasmas, tal como os campos de gauge estão na representação adjunta do grupo G.

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} - gC^{abc} A_\mu^c \tag{2.180}$$

2.2.7 Regras de Feynman na gauge de Lorentz

Estamos agora em posição de escrever as regras de Feynman para calcular, em teoria das perturbações, qualquer processo que envolva partículas cujas interacções possam ser descritas por uma teoria de gauge não abeliana referente a um dado grupo de simetria. Todo o nosso trabalho até aqui se pode resumir na procura do Lagrangeano efectivo a partir do qual as regras de Feynman podem ser obtidas como se se tratasse duma teoria normal sem graus de liberdade a mais. O nosso Lagrangeano efectivo é, como vimos, dado por

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_G \tag{2.181}$$

onde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \qquad ; \qquad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\nu^a + gC^{bca} A_\mu^b A_\nu^c \\
&\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(F_a)^2 \\
&\mathcal{L}_G = -\overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^b} D_\mu^{bc} \omega_c
\end{aligned} \tag{2.182}$$

As constantes C^{abc} são definidas pela comutação dos geradores do grupo, sendo as nossas convenções

$$\begin{aligned}
[t^a, t^b] &= iC^{abc} t^c \\
Tr(t^a t^b) &= \frac{1}{2}\delta^{ab}
\end{aligned} \tag{2.183}$$

Para fixar ideias vamos considerar a gauge de Lorentz definida por

$$F^a[A] = \partial_\mu A^{\mu a}(x) \ . \tag{2.184}$$

Obtemos então

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \partial^\mu \overline{\omega}^a D_\mu^{ab} \omega^b \tag{2.185}$$

onde

$$D_\mu^{ab}\omega^b = (\partial_\mu \delta^{ab} - gC^{abc}A_\mu^c)\omega^b \tag{2.186}$$

e usámos o facto de que os fantasmas se encontram na representação adjunta pelo que

$$(D_\mu \omega)^a = \left(\partial_\mu \delta^{ab} - igA_\mu^c (T^c)^{ab}\right)\omega^b \tag{2.187}$$

com

$$(T^c)^{ab} \equiv -iC^{bca} = -iC^{abc} \tag{2.188}$$

Podemos escrever portanto

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{int} \tag{2.189}$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cin} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\mu^a A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a \\ &= \frac{1}{2}A^{\mu a}\left[\Box g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu \partial_\nu\right]\delta^{ab}A^{\nu b} - \overline{\omega}^a \Box\, \delta^{ab}\omega^b \end{aligned} \tag{2.190}$$

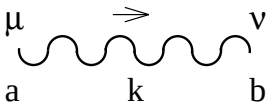
onde se desprezaram divergências totais. O Lagrangeano de interacção é

$$\mathcal{L}_{int} = -gC^{abc}\partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b}A^{\nu c} - \frac{1}{4}g^2 C^{abc}C^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d}A^{\nu e} + gC^{abc}\partial^\mu \overline{\omega}^a A_\mu^b \omega^c \ . \tag{2.191}$$

Com as convenções usuais (ver capítulo 1) obtemos as seguintes regras de Feynman

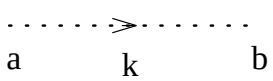
- **Propagadores:**

i) Campos de gauge



$$-i\delta_{ab}\left[\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right] \tag{2.192}$$

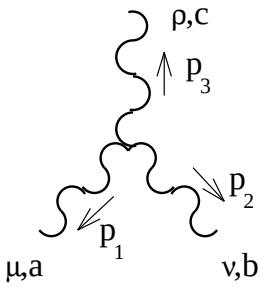
ii) Fantasmas



$$\frac{i}{k^2 + i\epsilon}\,\delta_{ab} \tag{2.193}$$

• **Vértices:**

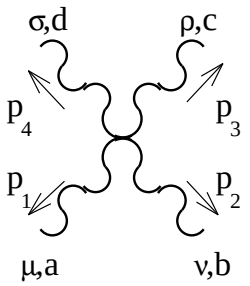
i) Vértice triplo dos bosões de gauge



$$-gC^{abc}\Big[\ g^{\mu\nu}(p_1-p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2-p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3-p_1)^\nu\Big]$$

$$p_1+p_2+p_3=0 \tag{2.194}$$

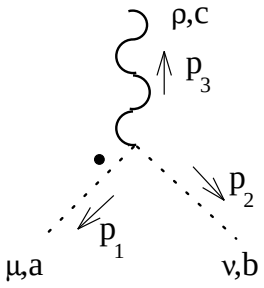
ii) Vértice quártico dos bosões de gauge



$$-ig^2\Big[\ C_{eab}C_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\partial}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + C_{eac}C_{edb}(g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + C_{ead}C_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\Big]$$

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0 \tag{2.195}$$

iii) Interacção Fantasmas-Bosões de Gauge



$$g\ C^{abc}p_1^\mu$$

$$p_1\ \ +p_2+p_3=0 \tag{2.196}$$

Notas:

1. O ponto no vértice entre os fantasmas e os bosões de gauge refere-se à perna que tem a derivada e que corresponde à linha de saída (as linhas dos fantasmas são orientadas)

2. As outras regras são as usuais não esquecendo o sinal $-$ por cada *loop* de fantasmas.

2.2.8 Regras de Feynman para a interacção com a matéria

Na secção anterior vimos as regras de Feynman para a teoria de gauge pura, sem interacção com a matéria. A interacção com a matéria faz-se da forma habitual passando as derivadas usuais a derivadas covariantes. Em geral a matéria é descrita por partículas escalares

$$\phi_i \quad ; \quad i = 1, ...M \tag{2.197}$$

e partículas spinoriais

$$\psi_j \quad ; \quad j = 1, ...N \tag{2.198}$$

pertencendo a representações de dimensão M e N, respectivamente. O Lagrangeano será dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{matéria}} &= (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - V(\phi) \\ &\quad + i\overline{\psi}\partial^\mu \gamma_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi \\ &\equiv \mathcal{L}_{cin} + \mathcal{L}_{int} \ . \end{aligned} \tag{2.199}$$

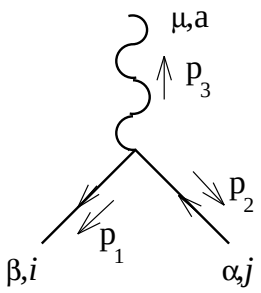
O Lagrangeano de interacção entre a matéria e os campos de gauge obtém-se facilmente a partir da derivada covariante

$$D^\mu_{ij} = \partial_\mu \delta_{ij} - igA^a_\mu T^a_{ij} \tag{2.200}$$

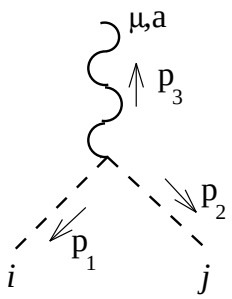
onde T^a_{ij} são os geradores nas representações adequadas para os campos ϕ e ψ. Assim obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= ig\phi^*_i(\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial})^\mu \phi_j T^a_{ij} A_{\mu a} + g^2 \phi^*_i T^a_{ij} T^b_{jk} \phi_k A^a_\mu A^{\mu b} \\ &\quad + g\overline{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i T^a_{ij} A^a_\mu \end{aligned} \tag{2.201}$$

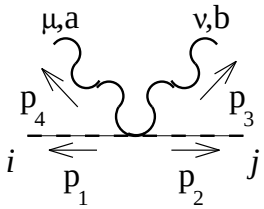
o que conduz aos seguintes vértices



$$ig(\gamma^\mu)_{\beta\alpha}T^a_{ij} \tag{2.202}$$



$$ig(p_1 - p_2)^\mu T^a_{ij} \tag{2.203}$$



$$ig^2 g_{\mu\nu}\{T^a, T^b\}_{ij} \tag{2.204}$$

• *Factores do Grupo*

Os factores C^{abc} e T^a_{ij} que aparecem nos vértices não precisam de facto de ser conhecidos. Nos cálculos aparecem, como veremos, combinações daqueles factores que podem ser expressas em termos de quantidades invariantes que caracterizam o grupo e a representação. Por conveniência resumimos aqui os resultados mais usados.

Os nossos geradores são hermitícos ($T^{a+} = +T^c$) satisfazendo as relações

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c$$

$$Tr(T^a T^b) = \delta^{ab} T(R) \tag{2.205}$$

onde $T(R)$ é um número caracterizando a representação R. Outra quantidade frequentemente usada é o operador de Casimir da representação definido por

$$\sum_{a,k} T^a_{ik} T^a_{kj} = \delta_{ij} C_2(R) \tag{2.206}$$

Para a representação adjunta obtemos

$$C^{acd} C^{bcd} = \delta^{ab} C_2(G) \ . \tag{2.207}$$

$T(R)$ e $C_2(R)$ não são independentes obedecendo à relação

$$T(R) r = d(R) C_2(R) \tag{2.208}$$

onde r é a dimensão do grupo G e $d(R)$ é a dimensão da representação R.
Em muitas aplicações estamos interessados em grupos $SU(N)$. Para estes temos os seguintes resultados

$$r = N^2 - 1 \ ; \ d(N) = N \ ; \ d(adj) \equiv d(G) = r \tag{2.209}$$

$$T(N) = \frac{1}{2} \ ; \ C_2(N) = \frac{N^2 - 1}{N} \tag{2.210}$$

$$T(G) = C_2(G) = N \tag{2.211}$$

• *Factores de Simetria*

Para o cálculo de diagramas envolvendo partículas idênticas é necessário multiplicar o resultado de aplicar as regras de Feynman por um factor de simetria conveniente. Estes factores de simetria foram discutidos na secção 1.5.5 . Por conveniência reproduzimos aqui a regra lá deduzida. O *factor de simetria* é o # de maneiras diferentes em que as linhas podem ser ligadas com os mesmo resultado topológico a dividir pelos factores permutacionais dos vértices e pelo número de permutações de pontos com vértices iguais.

2.3 Identidades de Ward

2.3.1 Transformações BRS

Vamos aqui deduzir as *identidades de Ward*[6] para as teorias de gauge não abelianas. O método mais conveniente é o chamado método das transformações de Becchi, Rouet e Stora (BRS) que já introduzimos no primeiro capítulo para o caso de QED. As transformações de BRS são uma generalização das transformações de gauge que tornam invariante a acção efectiva.

Como vimos para uma teoria de gauge não abeliana a acção efectiva é dada por (A = campos de gauge ; ϕ = campos de matéria)

$$S_{eff}[A,\phi] = S[A,\phi] - \frac{1}{2\xi}\int d^4x F_a^2[A,\phi] - \int d^4x \overline{\omega}^a \mathcal{M}_{ab}\omega^b \tag{2.212}$$

onde $S[A,\phi]$ é a acção clássica, invariante para transformações de gauge

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= -\frac{1}{g} D_\mu^{ab}\alpha^b \\ \delta\phi_i &= -i(T^a)_{ij}\phi_j\alpha^a \ , \end{aligned} \tag{2.213}$$

$F_a[A,\phi]$ são as condições de gauge e o operador $\mathcal{M}_{ab}$ é tal que

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b = \frac{\delta F_a}{\delta A_\mu^c} D_\mu^{cb}\omega^b + \frac{\delta F_a}{\delta\phi_i} ig(T^b)_{ij}\phi_j\omega^b \ . \tag{2.214}$$

S_{eff} não é invariante para as transformações de gauge devido à não invariância do termo que fixa a gauge e do Lagrangeano dos fantasmas. Esta não invariância pode desaparecer se escolhermos transformações apropriadas para os fantasmas para compensar a não invariância do termo $\int d^4x F_a^2$. Estas transformações são

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{\rm BRS} A_\mu^a &= D_\mu^{ab}\omega^b\theta \\ \delta_{\rm BRS}\phi_i &= ig(T^b)_{ij}\phi_j\omega^b\theta \\ \delta_{\rm BRS}\overline{\omega}^a &= \tfrac{1}{\xi}F_a[A,\phi]\theta \\ \delta_{\rm BRS}\omega^a &= \tfrac{1}{2}gC^{abc}\omega^b\omega^c\theta \end{aligned} \right. \tag{2.215}$$

onde θ é um parâmetro anticomutativo independente do ponto do espaço-tempo *(variável de Grassman)*. Vemos que as transformações BRS para os campos A_μ^a e ϕ_i são transformações de gauge com parâmetro $\alpha^a(x) = -g\omega^a(x)\theta$. Notar que o

[6]Designamos pelo nome genérico de identidades de Ward as identidades que foram descobertas por Ward, Takahashi, Slavnov e Taylor.

carácter anticomutativo de θ é necessário para que o produto $\omega^a\theta$ tenha um carácter bosónico (comutativo).

Para demonstrar a invariância de $S_{eff}[A,\phi]$ vamos demonstrar uma série de teoremas que são necessários para a prova geral. Antes é no entanto conveniente introduzir o operador de Slavnov s, definido pelas relações seguintes,

$$\begin{aligned} \delta_{\rm BRS}A^a_\mu &= sA^a_\mu\theta & \qquad \delta_{\rm BRS}\omega^a &= s\omega^a\theta \\ \delta_{\rm BRS}\phi_i &= s\phi_i\theta & \qquad \delta_{\rm BRS}\overline{\omega}^a &= s\overline{\omega}^a\theta \end{aligned} \tag{2.216}$$

Este operador é distributivo em relação à multiplicação verificando-se as relações seguintes

$$\begin{aligned} s(B_1B_2) &= sB_1B_2 + B_1sB_2 \\ s(F_1B_2) &= sF_1B_2 + F_1sB_2 \\ s(B_1F_2) &= -sB_1F_2 + B_1sF_2 \\ s(F_1F_2) &= -sF_1F_2 + F_1sF_2 \end{aligned} \tag{2.217}$$

que podem ser demonstradas a partir da definição.

Teorema 2.3

O operador s é nilpotente nos campos A^a_μ, ϕ_i e ω^a, isto é $s^2A^a_\mu = s^2\phi_i = s^2\omega^a = 0$.

Dem.

Demonstremos para cada um dos casos. Obtemos

a) $s^2A^a_\mu = 0$

$$\begin{aligned} s^2A^a_\mu &= s(D^{ab}_\mu\omega^b) = -\frac{\delta D^{ab}_\mu}{\delta A^c_\nu}sA^c_\nu\omega^b + D^{ab}_\mu s\omega^b \\ &= -\delta^\nu_\mu(-gC^{abc})D^{cd}_\nu\omega^d\omega^b + \frac{1}{2}gC^{bcd}D^{ab}_\mu(\omega^c\omega^d) \\ &= \left[gC^{abc}\partial_\mu\omega^c\omega^b + \frac{1}{2}gC^{acd}\partial_\mu\omega^c\omega^d + \frac{1}{2}gC^{acd}\omega^c\partial_\mu\omega^d\right] \\ &\quad + \left[gC^{abc}(-g)C^{cde}A^e_\mu\omega^d\omega^b + \frac{1}{2}g(-g)C^{bcd}C^{abe}A^e_\mu\omega^c\omega^d\right] \\ &= (gC^{abc}\partial_\mu\omega^c\omega^b - gC^{abc}\partial_\mu\omega^c\omega^b) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}g^2(C^{abc}C^{cde} - C^{adc}C^{cbe} + C^{cdb}C^{ace})A^e_\mu\omega^d\omega^b \\
= \; & 0 \qquad (2.218)
\end{aligned}
$$

onde se usou a identidade de Jacobi e a antisimetria das constantes de estrutura do grupo.

b) $s^2\phi_i = 0$

$$
\begin{aligned}
s^2\phi_i &= s\left[ig(T^a)_{ij}\phi_j\omega^a\right] \\
&= -ig(T^a)_{ij}s\phi_j\omega^a + ig(T^a)_{ij}\phi_j s\omega^a \\
&= g^2(T^a)_{ij}(T^b)_{jk}\phi_k\omega^b\omega^a + ig(T^a)_{ij}\phi_i\frac{1}{2}gC^{abc}\omega^b\omega^c \\
&= \frac{1}{2}g^2[T^c,T^b]_{ik}\omega^b\omega^c\phi_k + \frac{i}{2}g^2(T^a)_{ij}\phi_j C^{abc}\omega^b\omega^c \\
&= \frac{i}{2}g^2(T^a)_{ij}\phi_j(C^{acb} + C^{abc})\omega^b\omega^c \\
&= 0 \qquad (2.219)
\end{aligned}
$$

c) $s^2\omega^a = 0$

$$
\begin{aligned}
s^2\omega^a &= s\left(\frac{1}{2}gC^{abc}\omega^b\omega^c\right) \\
&= -\frac{1}{2}gC^{abc}s\omega^b\omega^c + \frac{1}{2}gC^{abc}\omega^b s\omega^c \\
&= -gC^{abc}s\omega^b\omega^c \\
&= -\frac{1}{2}g^2C^{abc}C^{bef}\omega^e\omega^t\omega^c \\
&= -\frac{1}{6}g^2(C^{abc}C^{bef} + C^{abe}C^{bfc} + C^{abf}C^{bce})\omega^e\omega^t\omega^c \\
&= 0 \qquad (2.220)
\end{aligned}
$$

onde se usou a anticomutatividade dos fantasmas e a identidade de Jacobi.

Fica assim demonstrado o teorema 2.3. Para gauges lineares pode-se demonstrar um resultado importante a que daremos a forma de teorema.

Teorema 2.4

Para gauges lineares o operador de Slavnov verifica a relação

$$s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b) = 0 \tag{2.221}$$

Dem:

Vimos anteriormente que

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^c_\mu(y)} D^{cb}_\mu \omega^b_{(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} ig(T^b)_{ij}\phi_i\omega^b(y)\right] \tag{2.222}$$

Se usarmos as definições de δ_{BRS} *e do operador de Slavnov podemos escrever*

$$\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^\mu_\mu(y)} sA^c_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} s\phi_i(y)\right] \tag{2.223}$$

Se a gauge for linear $\frac{\delta F_a}{\delta A^c_\mu}$ *e* $\frac{\delta F_a}{\delta \phi_i}$ *não dependem dos campos e portanto*

$$s\left[\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x)\right] = \int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A_\mu(y)} s^2 A^c_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta \phi_i(y)} s^2\phi_i(y)\right] = 0 \tag{2.224}$$

onde se usaram os resultados do teorema 2.3.

Usando os teoremas 2.3 e 2.4 podemos agora mostrar que a acção efectiva é invariante para transformações de BRS. Vamos apresentar este resultado também sobre a forma de teorema.

Teorema 2.5

A acção S_{eff} *é invariante para as transformações de BRS.*

Dem.

A acção efectiva é

$$S_{eff}[A,\phi] = S[A,\phi] + \int d^4x \left[-\frac{1}{2\xi}F^2_a[A,\phi] - \overline{\omega}^a \mathcal{M}_{ab}\omega^b\right] \tag{2.225}$$

Como a acção clássica é invariante para transformações de gauge devemos ter

$$s\left(S[A,\phi]\right) = 0\ . \tag{2.226}$$

Para os outros termos obtemos

$$s\left(-\frac{1}{2\xi}F_a^2 - \overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b\right) = -\frac{1}{\xi}F_a sF_a + s\overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b - \overline{\omega}^a s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b) \quad (2.227)$$

Mas

$$sF_a(x) = \int d^4y\left[\frac{\delta F_a}{\delta A_\mu^b(y)}sA_\mu^b(y) + \frac{\delta F_a}{\delta\phi_i(y)}s\phi_i(y)\right] = \mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) \quad (2.228)$$

e pelo teorema 2.4

$$s(\mathcal{M}_{ab}\omega^b) = 0 \quad (2.229)$$

logo

$$s\left(-\frac{1}{2\xi}F_a^2 - \overline{\omega}^a\mathcal{M}_{ab}\omega^b\right) = \left(-\frac{1}{\xi}F_a + s\overline{\omega}^a\right)\mathcal{M}_{ab}\omega^b = 0 \quad (2.230)$$

onde se usou $s\overline{\omega}^a = \frac{1}{\xi}F_a$. *Pondo tudo junto obtemos portanto*

$$sS_{eff}[A,\phi] = 0\ . \quad (2.231)$$

Para o seguimento é ainda importante um outro teorema,

Teorema 2.6

A medida $\mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^b)$ *é invariante para transformações BRS.*

Dem:

Cálculos simples conduzem às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta(sA_\mu^a)}{\delta A_\mu^a} = -gC^{aba}\delta_\mu^\mu\omega^b = 0\\
&\frac{\delta(s\phi_i)}{\delta\phi_i} = ig(T^a)_{ii}\omega^a = 0 \qquad ; \qquad (Tr(T^a) = 0)\\
&\frac{\delta(s\omega^a)}{\delta\omega^a} = gC^{aac}\omega^c = 0\\
&\frac{\delta(s\overline{\omega}^a)}{\delta\overline{\omega}^a} = 0
\end{aligned} \quad (2.232)$$

Como vimos no capítulo 1 estas relações implicam que a medida é invariante, o que demonstra o teorema.

2.3.2 Identidades de Ward-Takahashi-Slavnov-Taylor

Vamos aqui deduzir a generalização das identidades de Ward-Takahashi para as teorias de gauge não abelianas. Esse trabalho foi feito, entre outros, por Slavnov e Taylor mas usaremos com frequência o nome de identidades de Ward mesmo para as teorias não abelianas. Duma forma genérica, as identidades de Ward são relações entre as funções de Green que resultam da simetria de gauge da teoria. De acordo com o que vimos no capítulo 1 a maneira mais conveniente das expressar é usar os funcionais geradores das funções de Green.

Consideremos então uma teoria de gauge não abeliana. Por simplicidade consideramos que a matéria é constituída por campos escalares ϕ_i. A introdução de fermiões é imediata. O funcional gerador das funções de Green é então

$$Z[J^a_\mu, J_i, \eta^a, \overline{\eta}^a] = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}, \omega) e^{i\int d^4x[\mathcal{L}_{eff} + J^a_\mu A^{\mu a} + J_i\phi_i + \overline{\eta}^a\omega^a + \overline{\omega}^a\eta^a]} \tag{2.233}$$

onde introduzimos também fontes para os fantasmas. Uma transformação de BRS é uma mudança de variável no integral. O valor do integral não deve ser alterado por essa mudança de variáveis. Como S_{eff} e a medida são invariantes devemos ter o seguinte teorema:

Teorema 2.7

Dada uma função de Green qualquer

$$\begin{aligned} &G(x_1, ..., y_1, ..., z_1, ..., w_1, ...) \\ &= \langle 0| T A^a_{\mu_1}(x_1) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^b(w_1) \cdots |0\rangle \end{aligned} \tag{2.234}$$

temos as relações

$$\begin{aligned} &i) \qquad s\,\langle 0| T A^a_\mu(x_1) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^{b1}(w_1)\,|0\rangle = 0 \\ &ii) \qquad 0 = \langle 0| T A^a_\mu(x_1) \cdots |0\rangle + \cdots + \langle 0| T \cdots s\phi_i \cdots |0\rangle + \cdots \\ &\qquad\qquad + \langle 0| T \cdots s\overline{\omega}^a \cdots |0\rangle \cdots + \langle 0| T \cdots s\omega^a \cdots |0\rangle \end{aligned} \tag{2.235}$$

Dem: *A demonstração é imediata se escrevermos*

$$\langle 0| T A^a_\mu(x_1) \cdots \phi_{i_1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^b(w_1)\,|0\rangle =$$

$$= \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \omega, \overline{\omega}) A^a_\mu(x_1) \cdots \phi_{i1}(y_1) \cdots \overline{\omega}^a(z_1) \cdots \omega^b(w_1) e^{iS_{ef}} \quad (2.236)$$

Então a transformação de BRS deve deixar o valor do integral invariante pelo que a primeira relação é imediata. A segunda relação resulta da primeira e da invariância de medida e da acção efectiva.

Este teorema constitui uma forma expedita de estabelecer relações entre as funções de Green para casos particulares e é muito útil em cálculos práticos, como veremos no seguimento. Contudo para estabelecer resultados gerais sobre a renormalização e invariância de gauge da matriz S interessa-nos as identidades de Ward expressas em termos dos funcionais geradores. Usando a invariância dum integral numa mudança de variáveis, a invariância da medida $\mathcal{D}$ e de S_{eff} obtemos a identidade de Ward para o funcional gerador Z

$$0 = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \omega, \overline{\omega}) \int d^4x (J^{\mu a} s A^a_\mu + J_i s\phi_i + \overline{\eta}^a s\omega^a - s\overline{\omega}^a \eta^a) e^{i(S_{eff} + \text{fontes})} \quad (2.237)$$

Como vimos em QED as identidades de Ward mais úteis são para o funcional Γ. A expressão anterior não permite passar para o funcional Γ porque sA^a_μ, $s\phi_i$ e $s\omega^a$ são não lineares nos campos. Para resolver este problema introduzimos fontes para estes operadores não lineares. Generalizamos assim a acção efectiva definindo uma nova quantidade Σ tal que

$$\begin{aligned} \Sigma \quad & [A^c_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^a, K^a_\mu, K_i, L^a] \\ & \equiv S_{eff}[A^a_\mu, \phi_i, \overline{\omega}^a, \omega^a] + \int d^4x (K^{a\mu} s A^a_\mu + K^i s\phi_i + L^a s\omega^a) \end{aligned} \quad (2.238)$$

onde $K^{a\mu}, K_i$ e L^a são fontes para os operadores compostos $sA^a_\mu, s\phi_i$ e $s\omega^a$ respectivamente. Usando os teoremas 2.3 e 2.5 é imediato mostrar que Σ é invariante para transformações BRS, isto é,

$$\Sigma = 0 \ . \quad (2.239)$$

Consideremos agora que o funcional gerador das funções de Green na presença das fontes $J^a_\mu, J_i, \eta^a, \overline{\eta}^a, K^{\mu a}, K^i$ e L^a, isto é

$$Z[J^a_\mu, J_i, \eta, \overline{\eta}, K_\mu, K_i, L] = \int \mathcal{D}(A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}, \omega) e^{i\left[\Sigma + \int d^4x (J^a_\mu A^{\mu a} + J_i\phi_i + \overline{\eta}\omega + \overline{\omega}\eta)\right]} \quad (2.240)$$

Podemos agora repetir o raciocínio da invariância para as transformações de BRS. Como anteriormente obtemos (recordar que $s\Sigma = 0$)

$$0 = \int \mathcal{D}(\cdots) \int d^4x [J^\mu_a sA^a_\mu + J^i s\phi_i + \overline{\eta}^a s\omega^a - s\overline{\omega}^a \eta^a] e^{i(\Sigma + \text{fontes})} \ , \tag{2.241}$$

mas agora temos operadores compostos $sA, s\phi$ e $s\omega$, isto é

$$\begin{aligned} sA^a_\mu &= \frac{\delta\Sigma}{\delta K^{\mu a}} & s\phi_i &= \frac{\delta\Sigma}{\delta K_i} \\ s\omega^a &= \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} & s\overline{\omega}^a &= \frac{1}{\xi} F^a \ . \end{aligned} \tag{2.242}$$

Obtemos então

$$\int \mathcal{D}(\cdots) \int d^4x \left[J^\mu_a \frac{\delta\Sigma}{\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta\Sigma}{\delta K^i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta\Sigma}{\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F^a \eta^a \right] e^{i(\Sigma + \text{fontes})} = 0 \tag{2.243}$$

ou ainda

$$\int d^4x \left[J^\mu_a \frac{\delta}{i\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta}{i\delta K^i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta}{i\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F^a \left[\frac{\delta}{i\delta J_\mu}, \frac{\delta}{i\delta J_i} \right] \eta^a \right] e^{iW[J^a_\mu, J_i, \eta, \overline{\eta}, K_\mu, K_i, L]} = 0 \tag{2.244}$$

Para uma condição de gauge, linear todos os operadores diferenciais dentro do parêntesis recto são de 1ª ordem e portanto podemos escrever

$$\int d^4x \left[J^\mu_a \frac{\delta}{\delta K^{\mu a}} + J^i \frac{\delta}{\delta K_i} + \overline{\eta}^a \frac{\delta}{\delta L^a} - \frac{1}{\xi} F_a \eta^a \right] W = 0 \ . \tag{2.245}$$

Esta é a expressão da identidade de Ward para o funcional gerador das funções de Green conexas. Normalmente as identidades de Ward são mais úteis para o funcional gerador das funções de Green irredutíveis que é definido por

$$\Gamma[A_\mu, \phi_i, \overline{\omega}, \omega, K_\mu, K_i, L] \equiv W[J_\mu, J_i, \eta, \overline{\eta}, K_\mu, K_i, L] - \int d^4x [J^a_\mu + J_i\phi_i + \overline{\eta}\omega + \overline{\omega}\eta] \tag{2.246}$$

com as relações habituais

$$\begin{aligned} \phi_i &= \frac{\delta W}{\delta J_i} & \omega^a &= \frac{\delta W}{\delta \overline{\eta}^a} \\ A^a_\mu &= \frac{\delta W}{\delta J^{\mu a}} & \overline{\omega}^a &= -\frac{\delta W}{\delta \eta^a} \end{aligned} \tag{2.247}$$

e as relações inversas

$$\begin{aligned} J_i &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i} & \overline{\eta}^a &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a} \\ J^a_\mu &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu a}} & \eta^a &= -\frac{ds\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a} \end{aligned} \tag{2.248}$$

Como a transformada de Legendre deixa inertes as fontes K^a_μ, K_i e L^a devemos ter

$$\frac{\delta W}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu} \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta k_i} = \frac{\delta\Gamma}{\delta k_i} \quad ; \quad \frac{\delta W}{\delta L^a} = \frac{\delta\Gamma}{\delta L^a} \tag{2.249}$$

Obtemos então facilmente

$$\int d^4x \left[\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu a}(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta K_i(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} - \frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a(x)} - \frac{1}{\xi} F^a \frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)} \right] = 0 \tag{2.250}$$

Esta equação é o funcional gerador das identidades de Ward para uma teoria de gauge não abeliana numa gauge linear. As identidades de Ward para funções de Green específicas obtém-se por derivação funcional em ordem aos campos apropriados.

Na prática a equação anterior usa-se em ligação com outra identidade funcional, a equação de movimento (ou de Dyson- Schwinger) para os fantasmas. Esta pode ser obtida fazendo a seguinte mudança de variáveis no integral funcional (ver capítulo 1),

$$\begin{cases} \delta A^a_\mu &= \delta\phi_i = \delta\omega^a = 0 \\ \delta\overline{\omega}^a &= f^a = \text{constante infinitesimal} \end{cases} \tag{2.251}$$

Então

$$\delta Z = 0 = \int \mathcal{D}(\cdots) \left(i\frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\omega}^a} + i\eta^a \right) f^a e^{i(\Sigma + \text{fontes})} \tag{2.252}$$

mas

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta\overline{\omega}^a(x)} &= -\mathcal{M}_{ab}\omega^b(x) = -sF_a(x) \\ &= -\int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} sA^b_\mu(y) + \frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)} s\phi_i(y) \right] \\ &= -\int d^4y \left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)} \frac{\delta\Sigma}{\delta K^{b\mu}(y)} + \frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)} \frac{\delta\Sigma}{\delta K_i(y)} \right] \end{aligned} \tag{2.253}$$

e portanto obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \mathcal{D}(\cdots)\left\{-i\int d^4y\left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}\frac{\delta\Sigma}{\delta K^b_\mu(y)}+\frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)}\frac{\delta\Sigma}{\delta K_i(y)}\right]+i\eta^a(x)\right\}e^{i(\Sigma+\text{fontes})} \\
&= \left\{-\int d^4y\left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}\frac{\delta}{\delta K^b_\mu(y)}+\frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)}\frac{\delta}{\delta K_i(y)}\right]+i\eta^a(x)\right\}e^{iW}\ . \qquad (2.254)
\end{aligned}
$$

Usando agora

$$
\eta^a = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a} \qquad (2.255)
$$

obtemos finalmente (para gauges lineares)

$$
\int d^4y\left[\frac{\delta F_a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{\mu b}(y)}+\frac{\delta F_a(x)}{\delta\phi_i(y)}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i(y)}\right] = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)} \qquad (2.256)
$$

que é o funcional gerador das equações de Dyson-Schwinger para os fantasmas.

2.3.3 Exemplo: Transversalidade da polarização do vácuo

Vamos aqui dar um exemplo de aplicação das identidades de Ward mostrando que a polarização do vácuo é transversal. Como a teoria de gauge pura já é não trivial vamos somente considerar este caso, as generalizações são imediatas. Para mostrar os detalhes dos cálculos vamos fazer este exemplo usando dois métodos. O primeiro, que chamaremos *método formal*, consiste na aplicação das identidades de Ward para o funcional Γ que acabámos de mostrar, o segundo é o *método prático* que resulta da aplicação dos resultados do teorema 2.7. A comparação dos dois métodos será importante para a compreensão das expressões.

i) Método formal

Como estamos a considerar uma teoria de gauge pura a expressão para o funcional gerador das identidades de Ward para o funcional Γ é

$$
\int d^4x\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A_{\mu a}(x)}-\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a(x)}-\frac{1}{\xi}F^a(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)}\right]=0 \qquad (2.257)
$$

onde vamos escolher a gauge covariante

$$
F^a(x) = \partial_\mu A^{a\mu}(x) \qquad (2.258)
$$

Para prosseguir é necessário saber o que representam $\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu}$ e $\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a}$. Da forma como foram introduzidos temos

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} &= \frac{\delta W}{\delta K^a_\mu} = \frac{\delta}{i\delta K^a_\mu}\ln Z = \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta K^a_\mu(x)} \\ &= \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}(\cdots) sA^a_\mu(x) e^{i(\Sigma+\text{fontes})} \end{aligned} \tag{2.259}$$

Como $sA^a_\mu(x) = D^{ab}_\mu\omega^b = \partial_\mu\omega^a(x) - gC^{abc}\omega^b(x)A^c_\mu(x)$, obtemos então

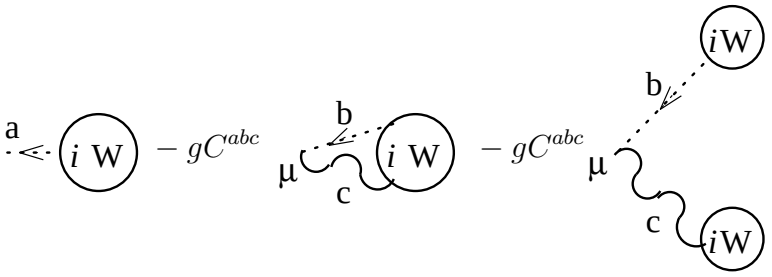
$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} = \partial^x_\mu \frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{i\delta\overline{\eta}^a(x)} - gC^{abc}\frac{1}{Z}\frac{\delta^2 Z}{i\delta J^c_\mu(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)} \tag{2.260}$$

Introduzindo $Z \equiv \exp(iW)$, a equação 2.260 escreve-se

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} = \partial^\mu_x \frac{\delta(iW)}{i\delta\overline{\eta}^a(x)} - gC^{abc}\left[\frac{\delta^2 iW}{i\delta J^c_\mu(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)} + \frac{\delta iW}{i\delta J^c_\mu(x)}\frac{\delta iW}{i\delta\overline{\eta}^b(x)}\right] \tag{2.261}$$

que tem a seguinte representação diagramática:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)} = \partial^\mu_x$$



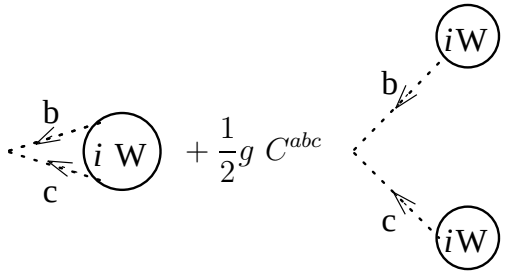
(2.262)

onde W é o funcional gerador das funções de Green conexas. De igual modo se pode mostrar

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)} &= \frac{1}{2}g\ C^{abc}\ \frac{1}{Z}\ \frac{\delta^2 Z}{i\delta\overline{\eta}^c(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)} \\ &= \frac{1}{2}g\ C^{abc}\left[\frac{\delta^2(iW)}{i\delta\overline{\eta}^c(x) i\delta\overline{\eta}^b(x)} + \frac{\delta(iW)}{i\delta\overline{\eta}^c(x)}\frac{\delta(iW)}{i\delta\overline{\eta}^b(x)}\right]\end{aligned} \tag{2.263}$$

ou diagramaticamente

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a(x)} = \frac{1}{2}g\ C^{abc}$$



(2.264)

Posto isto voltemos ao problema de provar a transversabilidade do vácuo. Olhando para a expressão inicial é fácil de ver que temos que aplicar $\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}$ à equação de partida. Temos sucessivamente

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta K^a_\mu(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta A^{\mu a}(x)}\right)\bigg|_{=0} = \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta K^a_\mu(x)}\bigg|_{=0}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^c_\nu(z)\delta A^{\mu a}(x)}\bigg|_{=0} \tag{2.265}$$

mas

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta K^a_\mu(x)}\bigg|_{=0} = 0\\
&= \int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^2\Gamma}{i\delta\eta^f(w)\delta K^a_\mu(x)}\right)\bigg|_{=0}\\
&= \partial^\mu_x\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^2(iW)}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^a(x)}\right)\bigg|_{=0}\\
&-g\ C^{ab'c}\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^{b'}(x)i\delta J^c_\mu(x)}\right)\bigg|_{=0}\\
&= \partial^\mu_x\delta^4(x-y)\delta^{ab} - gC^{ab'c}\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\\
&\qquad\qquad\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^{b'}(x)i\delta J^c_\mu(x)}\right)\bigg|_{=0}
\end{aligned} \tag{2.266}$$

De modo semelhante

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta L^a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^a}\right)\bigg|_{=0} = 0 \tag{2.267}$$

e

$$\frac{\delta^2}{\delta\omega^b(y)\delta A^c_\nu(z)}\left(\frac{1}{\xi}\partial_\rho A^{\rho a}(x)\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(x)}\right)\bigg|_{=0} = \frac{1}{\xi}\partial^\nu_x\delta^4(x-z)\ \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^a(x)}\bigg|_{=0} \tag{2.268}$$

Usando estes resultados obtemos

$$-\partial^y_\mu\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^b_\mu(y)\delta A^c_\nu(z)} - gC^{ade}\int d^4x d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)$$

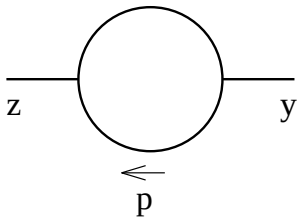


Figura 2.2:

$$\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^d(x)i\delta J^e_\mu(x)}\right)\left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^c_\nu(z)}\right)+\frac{1}{\xi}\partial^\nu_z\,\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^c(z)}=0 \tag{2.269}$$

Aplicando transformadas de Fourier, com a convenção da Figura 2.2, obtemos

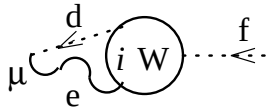
$$-ip^\mu(i)G^{-1}{}^{cb}_{\nu\mu}(p)-gC^{ade}iG^{-1}{}^{ca}_{\nu\mu}(p)\Delta^{-1fb}X^{\mu def}+(-ip^\nu)\frac{i}{\xi}\Delta^{-1cb}(p)=0 \tag{2.270}$$

ou ainda

$$p^\mu G^{-1}{}^{cb}_{\nu\mu}=-\frac{1}{\xi}\Delta^{-1cb}p_\nu+ig\;C^{ade}G^{-1}{}^{ca}_{\nu\mu}(p)\;\Delta^{-1fb}X^{\mu def} \tag{2.271}$$

onde

$$\begin{aligned} X^{\mu def} &= TF\Big[<0|T\omega^d(x)\overline{\omega}^f(w)A^{\mu e}(x)|0>_c\Big] \\ &\equiv \end{aligned}$$



(2.272)

Para demonstrar a transversabilidade precisamos ainda da equação de movimento para os fantasmas que é, para o nosso caso,

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}^a(z)}=-\partial^\mu_z\frac{\delta\Gamma}{\delta K^{\mu a}(z)} \tag{2.273}$$

Aplicando o operador $\dfrac{\delta}{\delta\omega^b(y)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^a(z)} &= -\Box\ \delta^{ab}\delta^4(y-z) \\ &+gC^{adc}\int d^4w\left(-i\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\omega^b(y)\delta\overline{\omega}^f(w)}\right)\partial_z^\mu\left(\frac{\delta^3 iW}{i\delta J_\mu^c(z)i\delta\eta^f(w)i\delta\overline{\eta}^d(z)}\right)\end{aligned} \tag{2.274}$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtemos

$$i\Delta^{-1ab} = p^2\delta^{ab} + gC^{adc}(-ip^\mu)X_\mu^{dcf}\Delta^{-1fb} \tag{2.275}$$

As equações 2.271 e 2.275 permitem mostrar a transversabilidade do vácuo. Para isso escrevamos

$$G^{-1ab}_{\ \ \mu\nu} = G_T^{-1ab}{}_{\mu\nu} + i\frac{a}{\xi}\delta^{ab}p_\mu p_\nu \tag{2.276}$$

onde $p^\mu G_T^{-1ab}{}_{\mu\nu} = 0$. Para o propagador livre $a = 1$. Para mostrar que a polarização do vácuo é transversal basta mostrar que a parte longitudinal não é renormalizada e portanto que o valor de a continuar a ser $a = 1$. Usando

$$p^\mu G^{-1ab}_{\ \ \mu\nu} = i\frac{a}{\xi}\delta^{ab}p^2p_\nu \tag{2.277}$$

e multiplicando a equação 2.271 por p^ν obtemos

$$i\frac{a}{\xi}p^4\delta^{cb} = -\frac{1}{\xi}p^2\Delta^{-1cb} - \frac{a}{\xi}p^2g\ C^{cde}p_\mu X^{\mu def}\Delta^{-1fb} \tag{2.278}$$

Usando agora a equação 2.275 obtemos depois de alguma álgebra trivial

$$0 = -\frac{1}{\xi}p^2\Delta^{-1cb} + \frac{a}{\xi}p^2\Delta^{-1cb} \tag{2.279}$$

o que implica

$$a = 1 \tag{2.280}$$

como queríamos mostrar.

ii) Método prático

Vamos agora mostrar a transversabilidade da polarização do vácuo usando o método prático baseado nos resultados do Teorema 2.7. Como

$$s\overline{\omega}^b(x) = \frac{1}{\xi}\partial_\mu A^{\mu b}(x) \tag{2.281}$$

e

$$sA^a_\nu = \partial_\nu \omega^a - gC^{adc}\omega^d A^c_\nu \tag{2.282}$$

é fácil de ver que a função de Green de partida deverá ser $< 0|TA^a_\nu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 >$. Então o teorema diz-nos que

$$s < 0|TA^a_\mu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 >= 0 \tag{2.283}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} < 0|TA^a_\nu(x)\partial_\mu A^{\mu b}(y)|0 > \quad &= \quad < 0|T\partial_\nu\omega^a(x)\overline{\omega}^b(y)|0 > \\ &-gC^{adc} < 0|T\omega^d(x)A^c_\nu(x)\overline{\omega}^b(y)|0 > \end{aligned} \tag{2.284}$$

Aplicando a transformação de Fourier obtemos

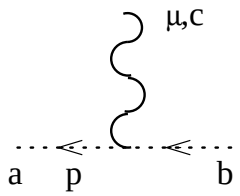
$$\frac{i}{\xi}p^\rho G^{ab}_{\nu\rho}(p) = -ip_\nu\Delta^{ab}(p) - gC^{adc}X^{dcb}_\nu \tag{2.285}$$

onde X^{dcb}_ν foi definido anteriormente. Multiplicando por $G^{-1\nu\mu}\Delta^{-1}$ obtemos

$$p^\mu G^{-1ac}_{\nu\mu} = -\frac{1}{\xi}p_\nu\Delta^{-1ac} + igC^{fde}\chi^{deb}_\nu\Delta^{-1bc}G^{-i\nu\mu af} \tag{2.286}$$

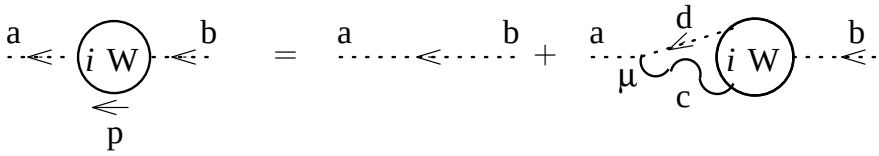
que é precisamente a equação 2.271.

A equação 2.275 pode ser obtida facilmente sabendo que o único vértice dos fantasmas é



$$gC^{abc}p^\mu \tag{2.287}$$

¿
Então



(2.288)

ou seja

$$\Delta^{ab}(p) = \frac{i}{p^2}\delta^{ab} + \frac{i}{p^2} g C^{adc} p^\mu X_\mu^{dcb} \tag{2.289}$$

ou ainda

$$i\Delta^{-1ab} = p^2\delta^{ab} - igC^{adc}p^\mu X_\mu^{dcb'}\Delta^{-1b'b} \tag{2.290}$$

que é precisamente a equação 2.275. A demonstração da transversabilidade é agora igual a i).

2.3.4 Invariância de gauge da matriz S

Mostrámos na secção 2.2.5 a invariância da gauge da matriz S, usando o teorema da equivalência e o facto que os funcionais geradores correspondentes a condições de gauge diferentes diferiam somente no termo das fontes. A demonstração que fizemos usava as propriedades específicas de gauge de Coulomb e podia levantar alguma dúvida quanto à sua validade geral.

Vamos aqui mostrar, usando as identidades de Ward, que os funcionais Z_F e $Z_{F+\Delta F}$ correspondentes às condições de gauge F e $F+\Delta F$, respectivamente, diferem somente no termo das fontes. Como F e ΔF são arbitrários, e demonstração é geral. Temos

$$Z_F[J_\mu^a] = \int D(\cdots) e^{i[S_{eff} + \int d^4x (J_\mu^a A^{\mu a} + J_i\phi_i)]} \tag{2.291}$$

Então

$$\begin{aligned} Z_{F+\Delta F} - Z_F \;=\; & \int D(\cdots) \int d^4x \; i \left[-\frac{1}{\xi} F^a \Delta F^a - \overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta \Delta F^a_{(x)}}{\delta A^b_\mu(y)} s\omega^b(y) \right. \\ & \left. -\overline{\omega}^a \int d^4y \frac{\delta \Delta F^a(x)}{\delta \phi_i(y)} s\phi_i(y) \right] e^{i(S_{eff} + \text{fontes})} \end{aligned} \tag{2.292}$$

Usamos agora as identidades de Ward na forma correspondente ao funcional Z, isto é

$$0 = \int D(\cdots) \int d^4x [J^{\mu a} sA_\mu^a + J^i s\phi_i + \overline{\eta} s\omega - s\overline{\omega}\eta] \; e^{\{i(S_{eff} + J_\mu^a A^{\mu a} + J_i\phi_i + \overline{\omega}\eta + \overline{\eta}\omega)\}} \tag{2.293}$$

Derivando em ordem a $\eta^a(x)$ e pondo as fontes dos fantasmas nulas obtemos

$$0 = \int D(\cdots)\left[\frac{1}{\xi}F^a(x) + i\overline{\omega}^a(x)\int d^4y[J^{\mu b}sA^b_\mu + J^i s\phi_i]\right]e^{i[S_{eff}+\int d^4x(J^a_\mu A^{\mu i}+J_i\phi_i)]} \tag{2.294}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi}F^a\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right] \quad & \int D(\cdots)e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} = \\ & = \int D(\cdots)i\overline{\omega}^a(x)\int d^4y[J^{\mu b}sA^b_\mu + J_i s\phi_i]e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \end{aligned} \tag{2.295}$$

Então

$$\begin{aligned} \int \quad & \mathcal{D}(\cdots)\left(-\frac{1}{\xi}F^a\Delta F^a\right)e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} = \\ = \quad & \Delta F^a\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\left(-\frac{1}{\xi}F^a\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\right)\int D(\cdots)e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\ = \quad & \Delta F^a\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]\int D(\cdots)i\overline{\omega}^a(x)\int d^4y[J^{\mu b}sA^b_\mu + J^i s\phi_i]e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\ = \quad & \int \mathcal{D}(\cdots)\left\{\overline{\omega}^a(x)\int d^4y\left[\frac{\delta\Delta F^a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}sA^b_\mu(y) + \frac{\delta\Delta F^a(x)}{\delta\phi_i(y)}s\phi_i(y)\right]\right. \\ & \left. + i\overline{\omega}^a(x)\Delta F^a(x)\int d^4y[J^{\mu b}sA^b_\mu + J^i s\phi_i]\right\}e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \end{aligned} \tag{2.296}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}(\cdots)\left(-\frac{1}{\xi}F^a\Delta F^a - \overline{\omega}^a(x)\int d^4y\left[\frac{\delta\Delta F^a(x)}{\delta A^b_\mu(y)}sA^b_\mu(\eta) + \frac{\delta\Delta F^a}{\delta\phi_i(y)}s\phi_i(y)\right]\right)e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\ & = \int \mathcal{D}(\cdots)i\overline{\omega}^a(x)\Delta F^a(x)\int d^4y\left[J^{\mu b}sA^b_\mu + J^i s\phi_i\right]e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \end{aligned} \tag{2.297}$$

Podemos então escrever

$$\begin{aligned} Z_{F+\Delta F} \quad & -Z_F \\ & = \int \mathcal{D}(\cdots)i\int d^4x\Big[i\overline{\omega}^a(x)\Delta F^a(x)\int d^4y(J^{\mu b}sA^b_\mu + J_i s\phi_i)\Big]e^{i(S_{eff}+\text{fontes})} \\ & = \int \mathcal{D}(\cdots)e^{i\{S_{eff}+\int d^4y[J^a_\mu(y)\mathcal{A}^{\mu a}(y) + J_i\Phi_i(y)]\}} \end{aligned} \tag{2.298}$$

onde

$$\Phi_i(y) \equiv \phi_i(y) + i \int d^4x [\overline{\omega}^a(x) \Delta F^a(x) s\phi_i(y)] \tag{2.299}$$

e

$$\mathcal{A}^a_\mu(y) \equiv A^a_\mu(y) + i \int d^4x [\overline{\omega}^b(x) \Delta F^b(x) s A^a_\mu(y)] \tag{2.300}$$

A diferença entre os funcionais geradores $Z_{F+\Delta F}$ e Z_F é apenas na forma funcional dos termos das fontes. Podemos portanto usar o teorema da equivalência para mostrar que as matrizes S renormalizadas são iguais nos dois casos

$$S^R_{F+\Delta F} = S^R_F \ . \tag{2.301}$$

2.4 Unitariedade e identidades de Ward

2.4.1 Teorema óptico

A matriz S pode-se escrever na forma

$$S = 1 + iT \tag{2.302}$$

Então a unitariedade, $SS^\dagger = 1$ implica

$$2Im\ T = TT^\dagger \tag{2.303}$$

Se inserirmos esta relação entre o mesmo estado inicial e final obtemos

$$\begin{aligned} 2Im < i|T|i > &= < i|TT^\dagger|i > \\ &= \sum_f | < f|T|i > |^2 \end{aligned} \tag{2.304}$$

onde introduzimos um conjunto completo de estados. Esta relação pode ainda escrever-se na forma

$$\sigma_{\text{total}} = 2Im\ T^{\text{elástica}}_{\text{frente}} \tag{2.305}$$

conhecida por teorema óptico. O que chamamos aqui σ_{total} não é exactamente a secção eficaz porque faltam os factores de fluxo. É rigorosamente a quantidade definida por

$$\sigma_{\text{total}} \equiv \sum_f | < f|T|i > |^2 \tag{2.306}$$

A unitariedade estabelece portanto uma relação entre a secção eficaz total e a parte imaginária da amplitude elástica na direcção frontal (o estado inicial e final têm que ser o mesmo).

2.4.2 Regras de Cutkosky

Para mostrar que a unitariedade é respeitada num dado processo é necessário saber calcular a parte imaginária de diagramas. Claro que há sempre a possibilidade de fazer as contas explícitas até ao fim e ver qual foi a parte imaginária que ficou, mas este processo não é muito conveniente para diagramas complicados.

Assim existem regras, chamadas regras de Cutkosky que nos dão simplesmente a parte imaginária duma amplitude qualquer. Estas regras são:

Regra 1:

A parte imaginária duma amplitude obtém-se através da expressão

$$2Im\ T = -\sum_{\text{cortes}} T \tag{2.307}$$

Regra 2:

O corte obtém-se escrevendo a amplitude $iT = \cdots$ e substituindo nesta expressão os propagadores das linhas cortadas pelas seguintes expressões:

i) Campos Escalares

$$\Delta(p) \Longrightarrow 2\pi\theta(p^o)\delta(p^2 - m^2) \tag{2.308}$$

ii) Campos Spinoriais

$$S(p) \Rightarrow (\not{p} + m)2\pi\theta(p^o)\delta(p^2 - m^2) \tag{2.309}$$

iii) Campos Spin 1 (na gauge de Feynman)

$$G_{\mu\nu}(p) \Rightarrow -g_{\mu\nu}2\pi\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2) \tag{2.310}$$

Nestas expressões as funções θ asseguram o fluxo da energia. As regras de Cutkosky são um pouco complicados de mostrar em geral[7] mas nós vamos aqui mostrar dois casos e verificá-las explicitamente

Exemplo 2.1 Propagador livre

A amplitude é

$$iT = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{2.311}$$

A parte imaginária obtém-se explicitamente usando

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x) \tag{2.312}$$

logo

$$T = P\left(\frac{1}{p^2 - m^2}\right) - i\pi\delta(p^2 - m^2) \tag{2.313}$$

e portanto

$$2ImT = -2\pi\delta(p^2 - m^2) \tag{2.314}$$

Pela regra de Cutkosky obtemos imediatamente

$$2ImT = -2\pi\delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) \tag{2.315}$$

que é o mesmo resultado. A função $\theta(p^0)$ assegura que o fluxo da energia é da esquerda para a direita.

Exemplo 2.2: Self-energy em $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$

Consideremos a self-energy na teoria dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{3!}\phi^3 \tag{2.316}$$

O diagrama de self-energy é o representado na Figura 2.3. A amplitude correspondente é

$$iT = (i\lambda)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad \frac{i}{(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{2.317}$$

Calculemos a parte imaginária de T por dois métodos, primeiro explicitamente e depois usando a regra de Cutkosky.

i) Cálculo explícito

[7] Para um tratamento mais completo ver G. 't Hooft, "Diagrammar", CERN Report 1972.

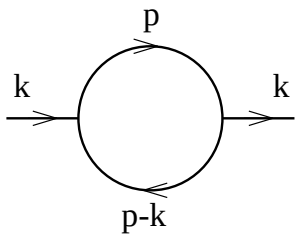


Figura 2.3:

$$
\begin{aligned}
iT &= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)[(p-k)^2 - m^2 + i\varepsilon]} \\
&= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot P - M^2 + i\varepsilon)^2} \\
&= \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[(p+p)^2 - \Delta]^2} \qquad (2.318)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{cases}
P &= -x \cdot k \\
\Delta &= p^2 + M^2 = m^2 - k^2 x(1-x) - i\varepsilon
\end{cases}
\qquad (2.319)
$$

Então

$$
iT = \lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(p^2 - \Delta)^2} \qquad (2.320)
$$

O integral é divergente. Fazendo regularização dimensional obtemos finalmente

$$
T = \frac{\lambda}{16\pi^2} \mu^\varepsilon \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \Delta^{-\left(2 - \frac{d}{2}\right)} \qquad (2.321)
$$

Para prosseguir temos que impor um esquema de renormalização. Fazendo renormalização on-shell, $T_R(k^2 = m^2) = 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
T_R &= T - T(k^2 = m^2) \\
&= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left[\left(\frac{\Delta(k^2)}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} - \left(\frac{\Delta(k^2 = m^2)}{\mu^2} \right)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right] \\
&= \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - C + O(\varepsilon) \right) \int_0^1 dx \left[1 - 1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{m^2 - k^2 x(1-x) - i\varepsilon}{m^2 - m^2 x(1-x) - i\varepsilon} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^1 dx \ln\left[\frac{1-\beta x(1-x)-i\varepsilon}{1-x(1-x)-i\varepsilon}\right] \\
&= -\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\left[L(\beta)-L(1)\right] \qquad (2.322)
\end{aligned}
$$

onde $\beta = \frac{k^2}{m^2}$ e a função Ł(β) é definida por

$$L(\beta) \equiv \int_0^1 dx \ln\left[1-\beta(1-x)x-i\varepsilon\right] \qquad (2.323)$$

e satisfaz

$$ImL(\beta) = -\pi\sqrt{1-\frac{4}{\beta}}\,\theta(\beta-4) \qquad (2.324)$$

Então

$$ImT = -\frac{\lambda^2}{16\pi^2}[ImL(\beta)-ImL(1)] \qquad (2.325)$$

e obtemos finalmente

$$ImT = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{k^2}}\,\theta\left(1-\frac{4m^2}{k^2}\right) \qquad (2.326)$$

A função θ assegura que só há parte imaginária quando o estado intermédio puder ser final (produção de 2 partículas de massa m).

ii) Cálculo usando as Regras de Cutkosky

Usando as regras obtemos

$$
\begin{aligned}
2ImT &= -(i\lambda)^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\theta(p^0)\theta(k^0-p^0)\delta(p^2-m^2)\delta((p^2-k^2)-m^2) \\
&= \lambda^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d^4p'(2\pi)^2\theta(p^0)\theta(k^0-p^0)\delta(p^2-m^2)\delta(p'^2-m^2)\delta^4(p'-k+p) \qquad (2.327)
\end{aligned}
$$

Usando agora

$$\int d^4p\theta(p^0)\delta(p^2-m^2) = \int d^3p\frac{1}{2p^0} \qquad (2.328)$$

obtemos

$$2ImT = \lambda^2\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}d^3p'\frac{1}{2p^0}\frac{1}{2p'^0}2\pi\delta^4(p'-k+p) \qquad (2.329)$$

ou ainda

$$2ImT = \lambda^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2p^0} \frac{1}{2p'^0} 2\pi\delta(k^0 - p^0 - p'^0) \tag{2.330}$$

No referencial do centro de massa

$$k = (\sqrt{s}, \vec{0}) \ ; \ p = (\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}, \vec{p}) \ ; \ p' = (\sqrt{|\vec{p}'|^2 + m^2}, -\vec{p}) \tag{2.331}$$

e portanto

$$\begin{aligned} 2ImT &= \lambda^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4(|\vec{p}|^2 + m^2)} 2\pi\delta(\sqrt{s} - 2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}) \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi} \int d|\vec{p}| \frac{|\vec{p}|^2}{|\vec{p}|^2 + m^2} \frac{\delta(|\vec{p}| - \sqrt{\frac{s}{4} - m^2})}{\frac{2|\vec{p}|}{\sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}}} \theta\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ \theta\left(1 - \frac{4m^2}{s}\right) \end{aligned} \tag{2.332}$$

Logo usando $k^2 = s$ obtemos

$$ImT = \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \ \theta\left(1 - \frac{4m^2}{k^2}\right) \tag{2.333}$$

que é de facto o mesmo resultado que 2.326.

2.4.3 Exemplo de Unitariedade: escalares e fermiões

Consideremos a teoria descrita pelo seguinte Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \overline{i\psi}\partial\!\!\!/\psi - m\overline{\psi}\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}M^2\phi^2 + g\overline{\psi}\psi\phi \tag{2.334}$$

Vamos mostrar a unitariedade em 2 casos em que as linhas cortadas são fermiónicas

i) Self-energy dos escalares

A self energy dos escalares e dada pelo diagrama da Figura 2.4, a que corresponde a amplitude

$$iT = g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr\left[\frac{i}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon} \frac{i}{p\!\!\!/ - k\!\!\!/ - m + i\varepsilon}\right] \tag{2.335}$$

logo

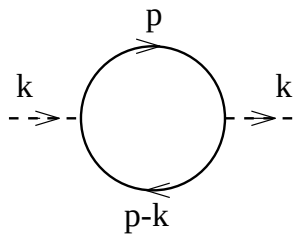
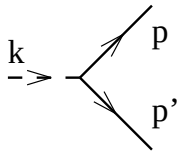


Figura 2.4:

$$
\begin{aligned}
2ImT &= -\sum_{\text{cuts}} T \\
&= -g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr[(\not{p}+m)(\not{p}-\not{k}+m)](2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)\cdot \\
&\qquad (2\pi)\theta(k^0-p^0)\delta((p-k)^2-m^2)
\end{aligned}
\tag{2.336}
$$

Para mostrarmos a unitariedade calculemos

$$\sigma = \sum_f \Bigg|$$



$$\Bigg|^2 \tag{2.337}$$

ou seja

$$\sigma = \sum_f |ig\overline{u}(p)v(p')|^2 = -g^2 \sum_f Tr[(\not{p}+m)(-\not{p}'+m)] \tag{2.338}$$

onde se usou $\sum_{\text{spins}} v(p')\overline{v}(p) = -(-\not{p}'+m)$ e $\sum_{\text{spins}} u(p)\overline{u}(p') = \not{p}+m$. Logo

$$\sigma = -g^2 \int d\rho_2 \mathrm{Tr}[(\not{p}+m)(-\not{p}'+m)] \tag{2.339}$$

onde $d\rho_2$ é o espaço de fase de duas partículas, isto é

$$
\begin{aligned}
\int d\rho_2 \equiv & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2p^0}\frac{1}{2p'^0}(2\pi)^4\delta^4(k-p-p') \\
= & \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}(2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)(2\pi)\theta(p'^0)\delta(p'^2-m^2)(2\pi)^4\delta^4(k-p-p')
\end{aligned}
\tag{2.340}
$$

Daqui se conclui que

$$\sigma = -g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)\theta(p^0)\delta(p^2-m^2)(2\pi)\theta(k^0-p^0)\delta((1-k)^2-m^2)\mathrm{Tr}[(\not{p}+m)(\not{p}-\not{k}+m)] \tag{2.341}$$

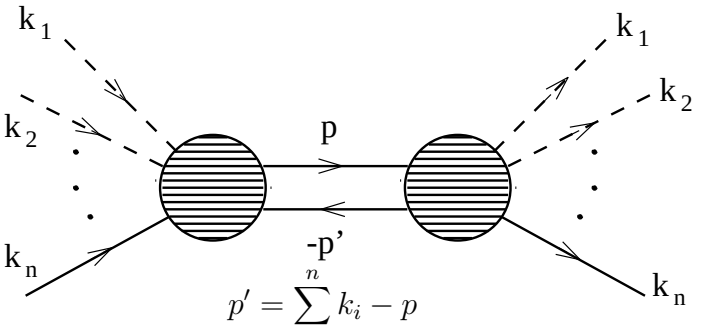
e obtemos portanto finalmente

$$2ImT = \sigma \tag{2.342}$$

como queríamos mostrar.

ii) Caso geral

Consideremos o caso geral com 2 linhas internas de fermiões. A amplitude iT é representada pelo seguinte diagrama



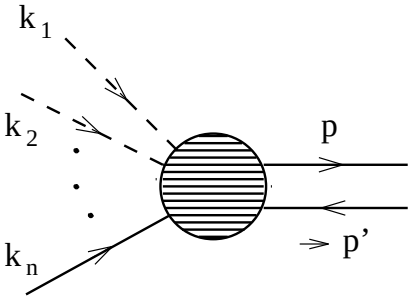
$$\equiv iT$$

$$p' = \sum_{i=1}^{n} k_i - p \tag{2.343}$$

A amplitude iT escreve-se

$$iT = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\overline{T'}S(p)T'S(-p')\right] \tag{2.344}$$

onde a amplitude iT' é, por sua vez, definida pelo diagrama seguinte



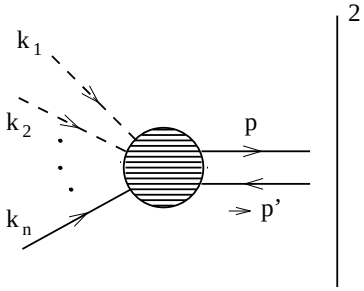
$$\equiv \overline{u}(p)iT'v(p') \tag{2.345}$$

Então

$$
\begin{aligned}
2ImT &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}(2\pi)^2\delta(p^2-m^2)\theta(p^0)\delta(p'^2-m^2)\theta(p'^0)\cdot \\
&\qquad \mathrm{Tr}\Big[\overline{T'}(\not{p}+m)T'(-\not{p}'+m)\Big] \\
&= -\int d\rho_2 \mathrm{Tr}\Big[\overline{T'}(\not{p}+m)T'(-\not{p}'+m)\Big] \qquad (2.346)
\end{aligned}
$$

Por outro lado

$$
\sigma = \sum_f \Bigg|
$$



$$
\Bigg|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_f |\overline{u}(p)T'v(p')|^2 \\
&= -\int d\rho_2 \mathrm{Tr}\Big[(\not{p}+m)T'(-\not{p}+m)\overline{T'}\Big] \qquad (2.347)
\end{aligned}
$$

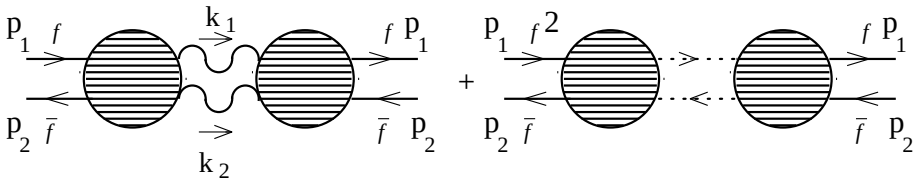
e portanto

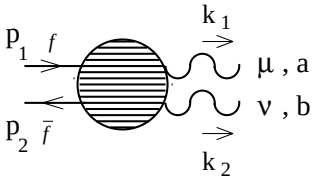
$$
\sigma = 2ImT \qquad (2.348)
$$

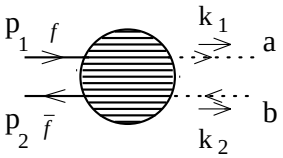
Se as linhas cortadas fossem de escalares em vez de fermiões o resultado seria o mesmo, não haveria o sinal menos do loop mas também não haveria o sinal menos da soma dos spins (ver problema 2.8).

2.4.4 Unitariedade e campos de gauge

Na secção 2.4.3 demonstrou-se a unitariedade das teorias com escalares e spinores. Vamos aqui ver que a demonstração da unitariedade para o caso dos campos de gauge é mais complicada e exige o uso das identidades de Ward. O problema reside no facto que os campos de gauge em linhas internas podem ter polarizações não físicas enquanto que no estado final o não podem. Esta diferença levaria a uma violação da unitariedade se as linhas internas não pudessem ser também de fantasmas que compensam os graus de liberdade a mais. Consideremos as seguintes amplitudes

$iT =$ 

$iT^{ab}_{\mu\nu} =$ 

$iT^{ab} =$ 

(2.349)

onde

$$k_2 = p_1 + p_2 - k_1 \tag{2.350}$$

Então a amplitude escreve-se[8]

$$iT = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} G^{aa'}_{\mu\mu'}(k_1) G^{bb'}_{\nu\nu'}(k_2) T^{*a'b'\mu'\nu'} - T^{ab} \Delta^{aa'}(k_1) \Delta^{bb'}(k_2) T^{*a'b'} \right\} \tag{2.351}$$

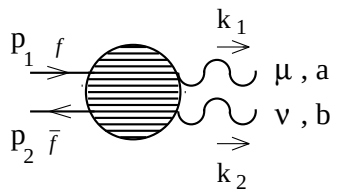
Aplicando as regras de Cutkosky a parte imaginária é

$$\begin{aligned} 2ImT &= \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} (2\pi)^2 \theta(k_1^0)\theta(k_2^0)\delta(k_1^2)\delta(k_2^2) \left\{ \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab} T^{*ab} \right\} \\ &\equiv \int d\rho_2 \left[\frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab\mu\nu} - T^{ab} T^{*ab} \right] \end{aligned} \tag{2.352}$$

Calculemos agora σ_{tot}. Como os fantasmas não são físicos teremos

[8] O factor 1/2 é o factor de simetria dum loop com escalares. O sinal – é devido ao loop de fantasmas.

$$\sigma = \sum \Bigg|$$



$$\Bigg|^2$$

$$= \frac{1}{2}\int d\rho_2 \sum_{Pol} \left|\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)T^{ab}_{\mu\nu}\right|^2 \tag{2.353}$$

onde o factor 1/2 se deve agora a haver partículas idênticas no estado final. Pondo

$$\sum_{Pol} \varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^{\mu'*}(k_1) = P^{\mu\mu'}(k_1) \tag{2.354}$$

obtemos

$$\sigma = \int d\rho_2 \frac{1}{2} T^{ab}_{\mu\nu} T^{*ab}_{\mu'\nu'} P^{\mu\mu'}(k_1) P^{\nu\nu'}(k_2) \ . \tag{2.355}$$

Usando agora o resultado do problema 2.10

$$P^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu\eta^\nu + k^\nu\eta^\mu}{k\cdot\eta} \tag{2.356}$$

onde η^μ é um 4-vector que satisfaz $\eta\cdot\varepsilon$ e $\eta^2 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab}_{\mu'\nu'}P^{\mu\mu'}(k_1)P^{\nu\nu'}(k_2) = \\
= \ & \frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab\mu\nu} - \frac{1}{2}(T^{ab}\cdot k_2)\cdot(T^{*ab}\cdot\eta)\frac{1}{k_2\cdot\eta} \\
& -\frac{1}{2}(T^{ab}\cdot\eta)\cdot(T^{*ab}\cdot k_2)\frac{1}{k_2\cdot\eta} - \frac{1}{2}(k_1\cdot T^{ab})\cdot(\eta\cdot T^{*ab})\frac{1}{k_1\cdot\eta} \\
& -\frac{1}{2}(\eta\cdot T^{ab})\cdot(k_1\cdot T^{*ab})\frac{1}{k_1\cdot\eta} + \Big[\frac{1}{2}(k_1\cdot T^{ab}\cdot\eta)(\eta\cdot T^{*ab}\cdot k_2) + \\
& +\frac{1}{2}(k_1\cdot T^{ab}\cdot k_2)(\eta\cdot T^{*ab}\cdot\eta) + \frac{1}{2}(\eta\cdot T^{ab}\cdot\eta)(k_1 T^{*ab}\cdot k_2) \\
& +\frac{1}{2}(\eta\cdot T^{ab}\cdot k_2)(k_1\cdot T^{*ab}\cdot\eta)\Big]\frac{1}{(k_1\cdot\eta)(k_2\cdot\eta)}
\end{aligned} \tag{2.357}$$

Fazendo uso das identidades de Ward (ver problema 2.11),

$$\begin{aligned} k_1^\mu T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{2\nu}T^{ab} \\ k_2^\mu T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{1\nu}T^{ab} \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad k_1\cdot T^{ab}\cdot k_2 = 0 \tag{2.358}$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab}_{\mu'\nu'} \qquad & P^{\mu\mu'}(k_1)P^{\nu\nu'}(k_2) = \\
= \; & \frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{ab}(k_1 \cdot T^{*ab} \cdot \eta)\frac{1}{k_2 \cdot \eta} \\
& -\frac{1}{2}T^{*ab}(k_1 \cdot T^{ab} \cdot \eta)\frac{1}{k_2 \cdot \eta} - \frac{1}{2}T^{ab}(\eta \cdot T^{*ab} \cdot k_2)\frac{1}{k_1 \cdot \eta} \\
& -\frac{1}{2}(\eta \cdot T^{ab} \cdot k_2)T^{*ab}\frac{1}{k_1 \cdot \eta} + \frac{1}{2}T^{ab}T^{*ab} + \frac{1}{2}T^{ab}T^{*ab} \\
= \; & \frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab\mu\nu} - T^{ab}T^{*ab} \qquad (2.359)
\end{aligned}
$$

e portanto

$$\sigma = \int d\rho_2 \left[\frac{1}{2}T^{ab}_{\mu\nu}T^{*ab\mu\nu} - T^{ab}T^{*ab}\right] \qquad (2.360)$$

o que comparando com 2.352 dá

$$\sigma = 2ImT \qquad (2.361)$$

como queríamos mostrar.

Problemas Capítulo 2

2.1 Mostre que $T(R)$ está relacionado com o operador de Casimir da representação R $C_2(R)$ através de

$$T(R)r = d(R)C_2(R) \tag{2.362}$$

onde r é a dimensão do Grupo G e $d(R)$ é a dimensão da representação R. O Casimir $C_2(R)$ é definido por

$$\sum_{a,k} T^a_{ik} T^a_{kj} = \delta_{ij} ... C_2(R) \ . \tag{2.363}$$

2.2 Mostrar que numa escolha diferente de condições auxiliares $\chi^{i\alpha} = 0$ conduz ao mesmo resultado.

Sugestão: considere uma variação infinitesimal

$$\chi^\alpha + \delta\chi^\alpha = 0 \qquad\qquad \alpha = 1, ...m \tag{2.364}$$

Mostre então que

$$\pi_\alpha \delta(\varphi_\alpha)\delta(\chi_a) \det(\{\varphi, \chi\}) \to \pi_\alpha \delta(\varphi_\alpha \delta(\chi_\alpha + \delta\chi_\alpha) \det(\{\varphi, \chi + \delta\chi\}) \ . \tag{2.365}$$

2.3 Mostrar que para transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} \delta\vec{E}_a(x) &= -\frac{1}{y}\int_{x_o=y_o} d^3y\{\vec{E}_a(x), \alpha^b(y)C_b(y)\} \\ \delta\vec{A}_a(x) &= -\frac{1}{y}\int_{x_o=y_o} d^3y\{\vec{A}_a(x), \alpha^b(y)C_b(y)\} \end{aligned} \tag{2.366}$$

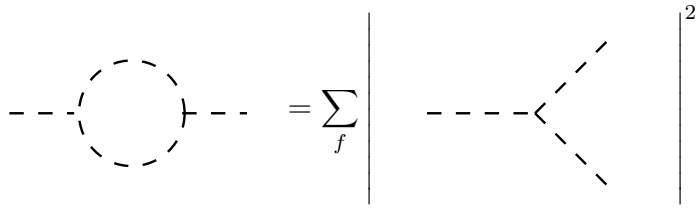
isto é, as ligações C^a são os geradores infinitesimais das transformações de gauge independentes do tempo.

2.4 Mostre que é sempre possível encontrar uma gauge onde $A_a^3 = 0 \qquad a = 1, ...r$.

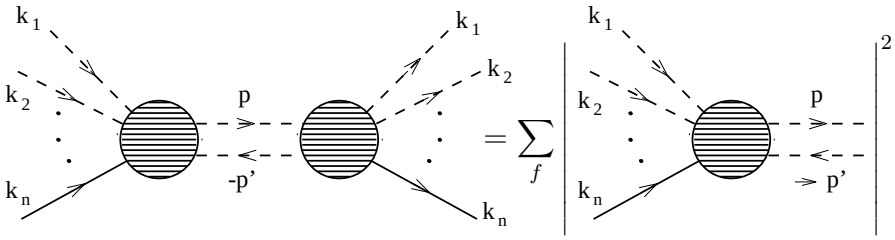
2.5 Mostre os resultados expressos na equação 2.91.

2.6 Mostre que a parte imaginária não depende do esquema de renormalização, calculando-a em $\overline{MS}$ e MS para o exemplo 2.2, isto é para a teoria descrita pelo Lagrangeano da equação 2.316.

2.7 Considere a teoria $\frac{\lambda}{3!}\phi^3$ do problema 2.6. Faça a demonstração da unitariedade para a self-energy dessa teoria, isto é

$2Im$  (2.367)

2.8 Considere a teoria descrita pelo Lagrangeano da equação (2.326). Refaça a demonstração geral da unitariedade no caso dos estados intermédios serem escalares, isto é

$2Im$ 

(2.368)

2.9 Mostre que o integral que resulta de cortar n linhas internas é igual ao integral do espaço de fase de n partículas. Use este resultado para fazer uma demonstração geral da unitariedade.

2.10 Mostre que

$$P^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu}{k \cdot \eta} \tag{2.369}$$

onde $k^\mu, \varepsilon^\nu(k,1), \varepsilon^\rho(k,2)$ e η^σ são quatro 4-vectores independentes e satisfazendo

$$\begin{aligned}
&\eta \cdot \varepsilon(k,\sigma) = 0 \qquad \sigma = 1,2 \\
&\varepsilon(k,1) \cdot \varepsilon(k,2) = 0 \\
&k \cdot \varepsilon(k,\sigma) = 0 \qquad \sigma = 1,2 \\
&k^2 = 0 \\
&\eta^2 = 0 \qquad \text{(escolha conveniente)} \\
&\varepsilon^2(k,\sigma) = -1 \qquad \sigma = 1,2
\end{aligned} \tag{2.370}$$

Sugestão: A expressão mais geral para $P^{\mu\nu}$ é

$$P^{\mu\nu} = a g^{\mu\nu} + b k^\mu k^\nu + c \eta^\mu \eta^\nu + d(k^\mu \eta^\nu + k^\nu \eta^\mu) \ . \tag{2.371}$$

Use as relações anteriores para determinar a, b, c, d.

2.11 Demonstrar as identidades de Ward,

$$\begin{aligned}
k_1^\mu T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{2\nu} T^{ab} \\
k_2^\mu T^{ab}_{\mu\nu} &= k_{1\nu} T^{ab}
\end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad k_1 \cdot T^{ab} \cdot k_2 = 0 \tag{2.372}$$

onde $T^{ab}_{\mu\nu}$ e T^{ab} são definidas em 2.349.

2.12 Mostre que o tensor $F^a_{\mu\nu}$ dos campos de Yang-Mills satisfaz as identidades de Bianchi:

$$D^{ab}_\mu F^b_{\rho\sigma} + D^{ab}_\rho F^b_{\sigma\mu} + D^{ab}_\sigma F^b_{\mu\rho} = 0 \tag{2.373}$$

ou

$$D^{ab}_\mu {}^*F^{\mu\nu\ b} = 0 \tag{2.374}$$

onde

$${}^*F^{\mu\nu\ a} = \frac{1}{2}\ \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F^a_{\rho\sigma} \tag{2.375}$$

2.13 Explique o significado geométrico da Identidades de Bianchi.

Sugestão: Veja o artigo de R.P. Feynman em *Les Houches, Session XXIX, 1976*, North Holland, 1977, Pags: 135-140.

2.14 Considere a teoria de Yang-Mills (YM) sem matéria.

a) Mostre que as eqs. de YM sem matéria se podem escrever na forma

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = \rho^a \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^a = {}^*\rho^a \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^a = -\frac{\partial \vec{B}^a}{\partial t} + \vec{J}^a \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}^a = -\frac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} + {}^*\vec{J}^a \end{cases} \tag{2.376}$$

calcule ρ^a, ${}^*\rho^a$, $\vec{J}^a$ e ${}^*\vec{J}^a$.

b) Mostre que as 4-correntes $j^a_\mu \equiv (\rho^a, \vec{J}^a)$ e ${}^*j^a_\mu \equiv ({}^*\rho^a, {}^*\vec{J}^a)$ são conservadas.

2.15 Mostre que $\mathrm{Tr}\,({}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$ é uma 4-divergência. Comente sobre a sua inclusão na acção.

2.16 Mostre que o seguinte *Ansatze* (S. Coleman, Phys. Lett70B (77), 59)

$$\begin{aligned} A^{1a} &= A^{2a} = 0 \\ A^{0a} &= -A^{3a} = x^1 f^a(x^0 + x^3) + x^2 g^a(x^0 + x^3) \end{aligned} \tag{2.377}$$

onde f^a e g^a são funções arbitrárias, são soluções das equações de YM sem matéria. Discuta esta solução.

2.17 Considere o *Ansatze* de Wu-Yang para soluções estáticas em SU(2) YM.

$$A^{0a} = x^a \, \frac{G(r)}{r^2} \qquad\qquad A^{ia} = \varepsilon^{aij} \, x^j \frac{F(r)}{r^2} \tag{2.378}$$

a) Deduza as equações a que F e G devem obedecer.

b) Mostre que elas são satisfeitas para $F = -1/g$ e $G =$ constante. Mostre que estas soluções correspondem a $\rho^a = {}^*\rho^a = 0$ e $\vec{J}^a = {}^*\vec{J}^a = 0$. ($\rho^a$, ... são definidos no problema 2.14).

c) Para as soluções da alínea b) descreva o potencial e os campos e calcule a energia.

2.18 Considere QED com a condição de gauge não linear

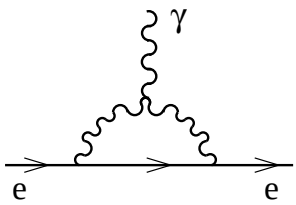
$$F = \partial_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{2}\, A_\mu A^\mu \ . \tag{2.379}$$

a) Escreva $\mathcal{L}_{eff}$ e mostre que $s\mathcal{L}_{eff} = 0$, onde s é o operador de Slavnov.

b) Calcule a polarização do vácuo a *1-loop*. Discuta o programa de renormalização dando especial atenção aos vértices proporcionais a λ. Pode aqui considerar a teoria sem fermiões.

c) Demonstre a invariância da matriz S renormalizada em relação ao parâmetro λ.

d) Verifique o resultado anterior mostrando que o diagrama da figura junta, potencialmente perigoso para o momento magnético anómalo do electrão, não dá contribuição (seria proporcional a λ).



e) Deduza as identidades de Ward desta teoria para os funcionais Z e Γ. Escreva o funcional gerador das equações de Dyson-Schwinger para os fantasmas, isto é,

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\omega}} = \cdots \tag{2.380}$$

f) Calcule ao nível árvore $\gamma + \gamma \to \gamma + \gamma$. Compare com o resultado na gauge linear.

g) Calcule ao nível árvore a amplitude $T^{\mu\nu}$ para $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$. Verifique que $k_{1\mu}T^{\mu\nu} \neq 0$ e $k_{2\mu}T^{\mu\nu} \neq 0$ onde k_1 e k_2 são os 4- momentos dos fotões. Utilize as identidades de Ward para verificar os resultados. Há algum problema com este resultado?

2.19 Considere a teoria que descreve as interacções dos quarks com os gluões (Cromodinâmica Quântica) descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}^\alpha_i (i\not{D} - m_\alpha)_{ij}\psi^\alpha_j \tag{2.381}$$

onde

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$
$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu - ig \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} A^a_\mu \ . \tag{2.382}$$

O índice $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ indica os diferentes *sabores* de quarks (*up*, *down*, $\cdots$, *top*). Para quantificar a teoria considere a condição de gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} \ (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \ , \tag{2.383}$$

para a qual resulta o Lagrangeano dos fantasmas

$$\mathcal{L}_G = \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ . \tag{2.384}$$

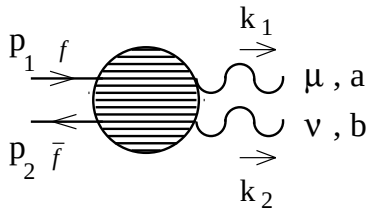
Para renormalizar a teoria necessitamos do seguinte Lagrangeano de contratermos:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L} \ = \ & -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)^2 - (Z_4 - 1) g f^{abc} \partial_\mu A^a_\nu A^{\mu b} A^{\nu c} \\
& -\frac{1}{4} g^2 (Z_5 - 1) f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{\mu d} A^{\nu e} + \sum_\alpha (Z_2 - 1) i \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \partial_\mu \psi^\alpha_i \\
& - \sum_\alpha m_\alpha (Z_{m_\alpha} - 1) \overline{\psi}^\alpha_i \psi^\alpha_i + (Z_1 - 1) g \sum_\alpha \overline{\psi}^\alpha_i \gamma^\mu \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} \psi^\alpha_j A^a_\mu \\
& + (Z_6 - 1) \partial_\mu \overline{\omega}^a \partial^\mu \omega^a + (Z_7 - 1) g f^{abc} \partial^\mu \overline{\omega}^a A^b_\mu \omega^c \ .
\end{aligned} \tag{2.385}$$

a) Verifique a expressão para $\mathcal{L}_G$.

b) Considere a amplitude

$$iT^{ab}_{\mu\nu} \equiv$$



(2.386)

Calcule ao nível árvore $T^{ab}_{\mu\nu}$. Verifique que $k^\mu_1 T^{ab}_{\mu\nu} \neq 0$.

c) Verifique as contas da alínea anterior calculando $k^\mu_1 T^{ab}_{\mu\nu}$ através das identidades de Ward.

d) Supondo que os gluões possam ser estados finais, a amplitude para o processo físico $q + q \to g + g$ onde g é o gluão, é dada pela expressão

$$\mathcal{M} = \varepsilon^\mu(k_1) s^a T^{ab}_{\mu\nu} \varepsilon^\nu(k_2) s^b \ , \tag{2.387}$$

onde $\varepsilon^\mu(k_1)$ e s^a são os vectores de polarização de spin e de cor, respectivamente (o mesmo para $\varepsilon^\nu(k_2)$ e s^b). Sabe-se que num processo físico, $\mathcal{M}$ se deve anular quando se faz a substituição $\varepsilon^\mu(k) \to k^\mu$. Como é que este resultado é compatível com as alíneas anteriores?

e) Mostre que se devem verificar as relações

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{Z_7}{Z_6} = \frac{\sqrt{Z_5}}{\sqrt{Z_3}} \tag{2.388}$$

f) Calcule Z_1, Z_2, Z_3, Z_6 e Z_7, usando subtracção mínima (MS), (isto é, calcule só a parte divergente dos diagramas) e verifique explicitamente que $Z_1 Z_6 = Z_2 Z_7$.

g) Calcule a contribuição dos fermiões para Z_4 e Z_5 e verifique que também obedecem às relações da alínea a).

h) Calcule as funções do Grupo de Renormalização β, γ_A e γ_F.

Capítulo 3

Grupo de Renormalização

3.1 Equação de Callan -Symanzik

3.1.1 Esquema de renormalização com subtracção de momento

Em teoria quântica dos campos um esquema de renormalização tem duas componentes. Primeiro há um processo de *regularização* que isola os infinitos que aparecem nos diagramas de Feynman. A regularização é arbitrária desde que mantenha as simetrias da teoria. Para teorias sem campos de gauge há muitos processos alternativos. Para teorias de gauge o melhor processo parece ser a regularização dimensional.

Depois de regularizada a teoria teremos que especificar um método sistemático para remover as divergências e definir os parâmetros renormalizados de teoria. A este processo chamamos esquema de renormalização. Há uma grande arbitrariedade na escolha do processo de subtração. A física contudo não pode depender desta escolha. Este é o conteúdo do grupo de renormalização: *O conteúdo fí sico de teoria deve ser invariante para transformações que apenas mudem as condições de normalização.* Esta afirmação trivial põe no entanto, como veremos, constrangimentos altamente não triviais no comportamento assimptótico da teoria.

Vamos começar por estudar os chamados esquemas com subtração de momento. Conforme o ponto no espaço dos momentos externos que serve de definição às funções de Green irredutíveis, podemos ter várias formas deste esquema. Vamos exemplificar com a teoria $\lambda\phi^4$.

Renormalização on - shell

Isto corresponde a uma série de Taylor para os momentos exteriores on - shell. Para a self-energy isto dá

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(m^2) + (p^2 - m^2)\Sigma'(m^2) + \widetilde{\Sigma}(p^2) \tag{3.1}$$

com as condições

$$\begin{cases} \widetilde{\Sigma}(m^2) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\widetilde{\Sigma}(p^2)}{\partial p^2}\right|_{p^2=m^2} = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Em termos de $\Gamma_R^{(2)}(p^2)$ dado por

$$\Gamma_R^2(p) = p^2 - m^2 - \widetilde{\Sigma}(p^2) \tag{3.3}$$

temos

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)}(m^2) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=m^2} = 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Para $\Gamma_R^{(4)}$ uma escolha conveniente é

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -\lambda \qquad \text{para} \qquad \begin{cases} p_i^2 = m^2 \\ s = t = u = \dfrac{4m^2}{3} \end{cases} \tag{3.5}$$

Neste caso os parâmetros m^2 e λ são a massa física e, a menos de factores cinemáticos, a secção eficaz para $s = t = u = \frac{4}{3}m^2$ respectivamente.

Renormalização intermédia

Este esquema corresponde a uma expansão de Taylor em torno de momentos nulos.

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(0) + \Sigma'(0)p^2 + \widetilde{\Sigma}(p^2) \tag{3.6}$$

A parte finita $\widetilde{\Sigma}(p^2)$ obdece às condições

$$\begin{cases} \widetilde{\Sigma}(0) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\widetilde{\Sigma}}{\partial p^2}\right|_{p^2=0} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

que traduzidas em termos de $\Gamma_R^{(2)}$ se escrevem

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)}(0) = m^2 \\ \dfrac{\partial\Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2} = 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Para $\Gamma_R^{(4)}$ a condição é

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, p_2, p_3) = -\lambda \qquad \text{para} \qquad p_1 = p_2 = p_3 = 0 \tag{3.9}$$

Neste esquema m^2 não é a massa física e λ não é nenhuma quantidade mensurável pois os pontos $p_i = 0$ não pertencem à região física. Podemos no entanto exprimir todas as quantidades mensuráveis em termos destes dois parâmetros, como veremos na secç ão 3.3.

Caso geral

Os dois exemplos anteriores são casos particulares do esquema geral onde as condições de normalização podem ser funções de vários *momentos de referência* $\xi_1, \xi_2...$ tais que

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)}(\xi_1^2) = m^2 \\ \left.\dfrac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=\xi_2^2} = 1 \\ \\ \Gamma_R^{(4)}(\xi_3, \xi_4, \xi_5) = -\lambda \end{cases} \tag{3.10}$$

3.1.2 Grupo de renormalização (GR)

Consideremos dois esquemas de renormalização R e R'. Como ambos partem do mesmo Lagrangeano não renormalizado

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \Delta\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_{R'} + \Delta\mathcal{L}_{R'} \tag{3.11}$$

devemos ter

$$\phi_R = Z_\phi^{-1/2}(R)\phi_0 \qquad ; \qquad \phi'_R = Z_\phi^{-1/2}(R')\phi_0 \ . \tag{3.12}$$

Logo

$$\phi'_R = Z_\phi^{-1/2}(R', R)\phi_R \tag{3.13}$$

onde

$$Z_\phi(R', R) = \frac{Z_\phi(R')}{Z_\phi(R)} \tag{3.14}$$

Estas relações indicam que os campos renormalizados em diferentes esquemas estão relacionados por uma constante multiplicativa. Esta constante é finita pois tanto $\phi_{R'}$ como ϕ_R são finitos. De modo semelhante

$$\begin{aligned} \lambda_{R'} &= Z_\lambda^{-1}(R',R)Z_\phi^2(R',R)\lambda_R \\ m_{R'}^2 &= m_R^2 + \delta m^2(R',R) \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde

$$\begin{aligned} Z_\lambda(R',R) &= \frac{Z_\lambda(R')}{Z_\lambda(R)} \\ \delta m^2(R',R) &= \delta m^2(R') - \delta m^2(R) \end{aligned} \tag{3.16}$$

são quantidades finitas. A operação que leva as quantidades num esquema de renormalização R para outro esquema R' pode ser vista como uma transformação de R em R'. O conjunto de todas estas transformaçoes forma o *Grupo de Renormalização*.

3.1.3 Equação de Callan - Symanzik

Vamos agora ver como dar uma expressão analítica à invariância para transformações do grupo de renormalização. A forma da equação do grupo de renormalização depende do esquema de renormalização utilizado. Vamos aqui obter as equações do GR para o esquema com substração de momento, a chamada equação de Callan - Symanzik.

Notemos primeiro que

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2}\left(\frac{i}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}\right) = \frac{i}{p^2-m_0^2+i\varepsilon}(-i)\frac{i}{p^2-m_0^2+i\varepsilon} \tag{3.17}$$

isto é, a derivação duma função de Green não renormalizada em relação à massa despida é equivalente à inserção dum operador composto $\frac{1}{2}\phi^2$ levando momento zero, isto é

$$\frac{\partial\Gamma^{(n)}(p_i)}{\partial m_0^2} = -i\Gamma_{\phi^2}^{(n)}(0,p_i) \tag{3.18}$$

As funções Green irredutíveis renormalizadas são dadas por

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(n)}(p_i;\lambda;m) = Z_\phi^{(n/2)}\Gamma^{(n)}(p_i;\lambda_0;m_0) \\ \Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}(p;p_i;\lambda;m) = Z_{\phi^2}^{-1}Z_\phi^{n/2}\Gamma_{\phi^2}^{(n)}(p;p_i;\lambda_0;m_0) \end{cases} \tag{3.19}$$

Então a equação anterior escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2}\left[Z_\phi^{-n/2}\Gamma_R^{(n)}(p_i,\lambda,m)\right] = -iZ_{\phi^2}Z^{-n/2}\Gamma_{\phi^2R}^{(n)}(0,p_i,\lambda,m) \tag{3.20}$$

e portanto

$$-\frac{n}{2}Z_\phi^{-1}\frac{\partial Z_\phi}{\partial m_0^2}Z_\phi^{-n/2}\Gamma_R^{(n)} + Z_\phi^{-n/2}\frac{\partial}{\partial m_0^2}\Gamma_R^{(n)} = -iZ_{\phi^2}Z_\phi^{-n/2}\Gamma_{\phi^2R}^{(n)}(0,p_i,\lambda,m) \tag{3.21}$$

ou seja

$$\left[\frac{\partial}{\partial m_0^2} - \frac{n}{2}\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial m_0^2}\right]\Gamma_R^{(n)} = -Z_{\phi^2}\Gamma_{\phi^2R}^{(n)}$$

$$\left[\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}\frac{\partial m}{\partial m^2}\frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial\lambda}{\partial m_0^2}\frac{\partial}{\partial\lambda} - \frac{n}{2}\frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial m_0^2}\right]\Gamma_R^{(n)} = -iZ_{\phi^2}\Gamma_{\phi^2R}^{(n)} \tag{3.22}$$

ou ainda

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} + \beta\frac{\partial}{\partial} - n\gamma\right]\Gamma_R^{(n)} = -im^2\alpha\Gamma_{\phi^2R}^{(n)} \tag{3.23}$$

que é a equação de Callan - Symanzik para a teoria ϕ^4, onde α, β e γ são funções sem dimensões

$$\beta = 2m^2\frac{\frac{\partial\lambda}{\partial m_0^2}}{\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}} \tag{3.24}$$

$$\gamma = m^2\frac{\frac{\partial \ln Z_\phi}{\gamma m_0^2}}{\frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}} \tag{3.25}$$

$$\alpha = 2\frac{Z_{\phi^2}}{\frac{\partial m}{\partial m_0^2}} \tag{3.26}$$

A função α está relacionada com γ. De facto se escolhermos as condições de normalização a $p_i = 0$

$$\begin{cases} \Gamma_R^{(2)}(0,\lambda,m) = -m^2 \\ \Gamma_{\phi^2R}^{(2)}(0,0,\lambda,m) = i \end{cases} \tag{3.27}$$

obtemos

$$\alpha = 2(\gamma - 1) \tag{3.28}$$

Como as quantidades $\Gamma_R^{(n)}$ e $\Gamma_{\phi^2 R}^{(n)}$ não dependem do cut - off, esperamos também que α, β e γ sejam independentes do cut - off. Para vermos isso pomos $n = 2$ e diferenciamos em ordem a p^2

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda} - 2\gamma \right] \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_R^{(2)}(p, \lambda, m) = -im^2\alpha\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p, \lambda, m) \tag{3.29}$$

Pondo $p^2 = 0$ e usando

$$\left.\frac{\partial \Gamma_R^{(2)}}{\partial p^2}\right|_{p^2=0} = 1 \tag{3.30}$$

obtemos

$$\gamma = im^2(\gamma - 1)\left[\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\phi^2 R}^{(2)}(0, p, \lambda, m)\right]_{p^2=0} \tag{3.31}$$

o que demonstra que γ é independente do cut - off. Então $\alpha = 2(\gamma - 1)$ também o é e todas as funções excepto β são agora independentes do cut - off. Portanto β também o é. Como α, β e γ são sem dimensões e não dependem do cut - off, então são somente funções da constante de acoplamento que também não tem dimensões, isto é

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\lambda) \\ \beta &= \beta(\lambda) \\ \gamma &= \gamma(\lambda) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Nós vamos sobretudo estar interessados no esquema de subtracção mí nima, por isso não vamos agora calcular as funções α, β e γ para todas as teorias, faremos isso na secção 3.3. Indicaremos no entanto um método expedito para o seu cálculo. Seja por exemplo a função $\beta(\lambda)$. Notando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial m_0^2}(\lambda_0, \Lambda/m) &= \frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}\frac{\partial}{\partial m^2}\lambda(\lambda_0, \Lambda/m) \\ &= \frac{\partial m^2}{\partial m_0^2}\frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial m}\lambda(\lambda_0, \Lambda/m) \end{aligned} \tag{3.33}$$

obtemos da definição 3.24

$$\beta = m\frac{\partial}{\partial m}\lambda(\lambda_0, \Lambda/m) = m\frac{\partial}{\partial m}[\overline{Z}(\lambda_0, \Lambda/m)\lambda_0] = -\lambda_0\Lambda\frac{\partial}{\partial \Lambda}[\overline{Z}(\lambda_0, \Lambda/m)] \tag{3.34}$$

ou

$$\beta = -\lambda\frac{\partial}{\partial \ln \Lambda}[\ln \overline{Z}(\lambda_0, \Lambda/m)] \tag{3.35}$$

onde[1] $\overline{Z} = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2$. O resultado de 1 - loop dá

$$\begin{aligned} Z_\lambda &= 1 + \frac{3\lambda_0}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + O(\lambda_0^2) \\ Z_\phi &= 1 + O(\lambda_0^2) \end{aligned} \tag{3.36}$$

logo

$$\overline{Z} = 1 - \frac{3\lambda_0}{32\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + ... \tag{3.37}$$

e

$$\ln \overline{Z} = \frac{3\lambda_0}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{m} + \cdots \tag{3.38}$$

Portanto para ϕ^4

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^3)\ . \tag{3.39}$$

3.1.4 Teorema de Weinberg e solução da equação do GR

O teorema de Weinberg diz respeito ao comportamento assimptótico das funções de Green $1PI$ na região Euclediana ($p_i^2 < 0$) e para valores não excepcionais dos momentos (nenhuma soma parcial é nula).

Teorema 3.1

Se os momentos não forem excepcionais e se os parametrizarmos com $p_i = \sigma k_i$ as funções de Green irredutí veis de e partícula $\Gamma_R^{(n)}$ comportam-se na região euclediana profunda ($\sigma \to \infty$ e k_i fixos, $p_i^2 < 0$) do modo seguinte

$$\lim_{\sigma\to\infty} \Gamma^{(n)}(\sigma k_i, \lambda, m)\sigma^{4-n}[a_0(\ln\sigma)^{b_0} + a_1(\ln\sigma)^{b_1} + \cdots] \tag{3.40}$$

e

[1] Por definição $\lambda = \overline{Z}\lambda_0$.

$$\lim_{\sigma\to\infty} \Gamma^{(n)}_{\phi^2}(\sigma k_i, \lambda, m)\sigma^{2-n}[a'_0(\ln\sigma)^{b'_0} + a'_1(\ln\sigma)^{b'_1} + \cdots] \ . \tag{3.41}$$

Não faremos a demonstração (ver Bjorken and Drell) mas notemos que as potências de σ são as dimensões canónicas das funções de Green (em termos da massa). Se este comportamento é o verificado assimptoticamente depende da soma da série dos logaritmos. Se esta somar para uma potência de σ, por exemplo $\sigma^{-\gamma}$, então assimptóticamente o comportamento canónico σ^{4-n} é modificado para $\sigma^{4-n-\gamma}$.γ é chamada a *dimensão anómala*. Como vamos ver o GR vai efectuar esta soma de logaritmos e dar-nos qual a dimensão anómala.

3.1.5 Solução assimptótica da equação do GR

Do teorema de Weinberg temos que $\Gamma^{(n)}_R \gg \Gamma^{(n)}_{\phi^2 R}$ para qualquer ordem (finita) em λ na região euclediana profunda ($\sigma \to \infty$). Se admitirmos que isto continua verdade mesmo depois de somar todas as ordens de teoria de perturbações, então podemos desprezar o segundo membro da equação de Callan-Symanzik e obtemos uma equação diferencial homogénea

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - n\gamma(\lambda)\right]\Gamma^{(n)}_{as}(p_i, \lambda, m) = 0 \tag{3.42}$$

onde $\Gamma^{(n)}_{as}$ é a forma assimptótica de $\Gamma^{(n)}_R$. O significado desta equação é que nesta região assimptótica, uma mudança no parâmetro de massa pode ser sempre compensada por mudanças apropriadas do acoplamento e da escala dos campos.

Para resolver esta equação começamos por definir uma quantidade $\overline{\Gamma}^{(n)}_R$ sem dimensões, usando análise dimensional

$$\Gamma^{(n)}_{as}(p_i, \lambda, m) = m^{4-n}\overline{\Gamma}^{(n)}_R(p_i/m, \lambda) \ . \tag{3.43}$$

$\overline{\Gamma}^{(n)}_R$ satisfaz

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)\overline{\Gamma}^{(n)}_R\left(\sigma\frac{p_i}{m}, \lambda\right) = 0 \ . \tag{3.44}$$

Então

$$\left(m\frac{\partial}{\partial m} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)m^{n-4}\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0 \tag{3.45}$$

ou seja

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} + (n-4)\right]\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0 \tag{3.46}$$

Usando esta equação podemos trocar a derivação em ordem à massa pela derivação em ordem à escala na equação de Callan-Symanzik para obter

$$\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\gamma(\lambda) + (n-4)\right]\Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = 0 \tag{3.47}$$

Para resolver esta equação removemos os termos sem derivadas com a transformação

$$\Gamma_{as}^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{n\int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} F^{(n)}(\sigma p_i, \lambda, m)\ . \tag{3.48}$$

Substituindo na equação diferencial vemos que os termos sem derivadas desaparecem e obtemos uma equação diferencial para $F^{(n)}$

$$\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]F^{(n)}(\sigma p, \lambda, m) = 0 \tag{3.49}$$

Introduzindo $t = \ln\sigma$ podemos escrever

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]F^{(n)}(e^t p, \lambda, m) = 0 \tag{3.50}$$

Para resolver esta equação introduzimos a constante de acoplamento efectiva $\overline{\lambda}(t,\lambda)$ como solução da equação

$$\frac{\partial\overline{\lambda}(t,\lambda)}{\partial t} = \beta(\overline{\lambda}) \tag{3.51}$$

com a condição fronteira $\overline{\lambda}(0,\lambda) = \lambda$. Para vermos que esta definição nos vai dar a solução, escrevemos

$$t = \int_\lambda^{\overline{\lambda}(t,\lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} \tag{3.52}$$

e diferenciamos em ordem a λ

$$0 = \frac{1}{\beta(\overline{\lambda})}\frac{\partial\overline{\lambda}}{\partial\lambda} - \frac{1}{\beta(\lambda)} \tag{3.53}$$

ou ainda

$$\beta(\overline{\lambda}) - \beta(\overline{\lambda})\frac{\partial\overline{\lambda}}{\partial\lambda} = 0 \tag{3.54}$$

Usando agora a definição de $\overline{\lambda}$ obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\overline{\lambda}(t,\lambda) = 0 \tag{3.55}$$

O operador diferencial é exactamente o mesmo da equação para $F^{(n)}(e^t p, \lambda, m)$. Portanto $F^{(n)}$ satisfaz aquela equação se depender da t e λ através de $\overline{\lambda}(t,\lambda)$. Portanto a solução geral de $\Gamma^{(n)}_{as}$ é

$$\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{n\int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} F^{(n)}(p_i, \overline{\lambda}(t,\lambda), m) \tag{3.56}$$

Para se obter uma interpretação física desta solução notemos que

$$\begin{aligned} e^{n\int_0^\lambda \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} &= e^{n\int_0^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} e^{n\int_{\overline{\lambda}}^\lambda \frac{\lambda(x)}{\beta(x)}dx} \\ &= e^{n\int_0^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} e^{-n\int_\lambda^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} \\ &= e^{n\int_0^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} e^{-n\int_0^t \gamma(\overline{\lambda}(t',\lambda))dt'} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Portanto

$$\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{-n\int_0^t \gamma(\overline{\lambda}(t',\lambda))dt'} e^{-n\int^{\overline{\lambda}_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}dx} F^{(n)}(p_i, \overline{\lambda}(t,\lambda), m) \tag{3.58}$$

Se pusermos $\sigma = 1 (t = 0)$, vemos que $e^{n\int_0^{\overline{\lambda}} \frac{\gamma}{\beta}dx} F^{(n)}$ é $\Gamma^{(n)}_{as}$. Então obtemos finalmente a solução da equação do GR.

$$\Gamma^{(n)}_{as}(\sigma p_i, \lambda, m) = \sigma^{4-n} e^{-n\int_0^t \gamma(\overline{\lambda}(t',\lambda))dt'} \Gamma^{(n)}_{as}(p_i, \overline{\lambda}(t,\lambda), m) \tag{3.59}$$

Nesta forma a solução tem uma interpretação simples. O efeito de efectuar uma mudança de escala nos momentos p_i nas funções de Green $\Gamma^{(n)}_R$ é equivalente a substituir a constante de acoplamento λ, pela constante de acoplamento efectiva $\overline{\lambda}$ à parte factores multiplicativos. O primeiro é simplesmente resultante do facto de $\Gamma^{(n)}_R$ ter dimensão canónica $4-n$ em unidades de massa. O factor exponencial é o termo da dimensão anómala que resultou de somar todos os logaritmos em teoria de perturbações. Este factor é controlado por γ, a dimensão anómala. Veremos à frente como calcular a dimensão anómala, numa teoria qualquer.

3.2 Esquema de subtracção mínima (MS)

3.2.1 Equação do grupo de renormalização para MS

Vamos agora ver outras formas que pode tomar a equação do grupo de renormalização. A afirmação que a renormalização é multiplicativa pode ser escrita na forma

$$\Gamma^{(n)}(p_i, \lambda_0, m_0) = Z_\phi^{-n/2} \Gamma^{(n)}_R(p_i, \lambda, m, \mu) \tag{3.60}$$

onde μ é a escala usada para definir a normalização das funções de Green. O lado esquerdo da equação não depende de μ, mas o lado direito depende explicitamente e implicitamente através de λ e m. Então temos

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left[Z_\phi^{-n/2}\Gamma_R^{(n)}(p_i,\lambda,m,\mu)\right]=0 \tag{3.61}$$

ou seja

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}+\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma\right)\Gamma_R^{(n)}=0 \tag{3.62}$$

com

$$\begin{aligned}\beta\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right) &= \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\\ \gamma_m\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right) &= \mu\frac{\partial\ln m}{\partial\mu}\\ \gamma\left(\lambda,\frac{m}{\mu}\right) &= \frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ln Z_\phi}{\partial\mu}\end{aligned} \tag{3.63}$$

Esta equação tem a vantagem sobre a equação de Callan - Symantik de ser homogénea. A dificuldade reside nas funções β e γ dependerem de duas variáveis λ e $\frac{m}{\mu}$ e portanto a equação ser de difícil resolução. Existe contudo um esquema de renormalização em que a dependência em $\frac{m}{\mu}$ desaparece e portanto a equação é simples de resolver. É o chamado esquema de subtracção mínima que passamos a expôr.

3.2.2 Esquema de subtracção mínima

O esquema de subtracção mínima (MS) está relacionado com o método de regularização dimensional. As divergências dos integrais aparecem neste método como pólos em $\frac{1}{\varepsilon}$ onde $\varepsilon=4-d$. O esquema de subtracção mínima consiste em escolher os contratermos para cancelar *somente* os pólos.

Vamos exemplificar com a *self-energy* em $\lambda\phi^4$, a que corresponde o diagrama da figura 3.1

Temos

$$\begin{aligned}-i\Sigma(p) &= (-i\lambda)\mu^\varepsilon\frac{1}{2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon}\\ &= -i\lambda\frac{1}{32\pi^2}\mu^\varepsilon\frac{\Gamma(1-d/2)}{m^{2-d}}2^\varepsilon\pi^{\varepsilon/2}\end{aligned} \tag{3.64}$$

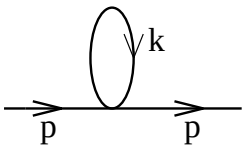


Figura 3.1:

onde $\varepsilon = 4 - d$. Então

$$\begin{aligned}\Sigma(p^2) &= \lambda \frac{1}{32\pi^2}\mu^{\varepsilon}\frac{\Gamma(-1+\varepsilon/2)}{m^{-2+\varepsilon}}\cdot(2\sqrt{\pi})^{\varepsilon} \\ &= \lambda\frac{m^2}{32\pi^2}\left(\frac{\mu}{m}\right)^{\varepsilon}\Gamma(-1+\varepsilon/2)\cdot(2\sqrt{\pi})^{\varepsilon} \qquad (3.65)\end{aligned}$$

Usando[2]

$$\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = -\left[\frac{2}{\varepsilon} + \overbrace{1-\gamma}^{\psi(2)} + O(\varepsilon)\right] \qquad (3.66)$$

e

$$\left(\frac{\mu}{m}\right)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu}{m}\right) \qquad (3.67)$$

obtemos

$$\Sigma(p^2) = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left[\frac{2}{\varepsilon} + \psi(2) + 2\ln(\mu/m) + 2\ln 2\sqrt{\pi} + O(\varepsilon)\right] \qquad (3.68)$$

Portanto no esquema de subtracção mínima devemos adicionar um contratermo

$$\Delta\mathcal{L}_{\phi^2}^{MS} = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\frac{1}{\varepsilon}\phi^2 \qquad (3.69)$$

Se tivéssemos feito subtracção de momento à escala μ, isto é $\Sigma_R(p^2 = \mu^2) = 0$ teríamos o contratermo

$$\Delta\mathcal{L}_{\phi^2}^{MOM} = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\psi(2) + \ln(\mu/m) + \ln 2\sqrt{\pi}\right]\phi^2 \qquad (3.70)$$

Vemos assim que o Lagrangeano de contratermos no esquema de subtracção mínima quando expandido em série de Laurent em ε contém só termos divergentes. Portanto

[2] γ é a constante de Euler e $\psi(x)$ a derivada logaritmica da função Γ. Ver o Apêndice da Mecânica Quântica Relativista.

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sqrt{Z_\phi}\phi \\
m_0 &= Z_m m \\
\lambda_0 &= \mu^\varepsilon Z_\lambda \lambda
\end{aligned} \tag{3.71}$$

tendo as constantes de renormalização Z_ϕ, Z_m e Z_λ a forma

$$\begin{aligned}
Z_\lambda &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)/\varepsilon^r \\
Z_m &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(\lambda)/\varepsilon^r \\
Z_\phi &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(\lambda)/\varepsilon^r
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Assim os coeficientes da equação do grupo de renormalização são independentes de μ, e como são adimensionais, também são independentes de m dependendo somente da constante de acoplamento. Isto simplifica a solução da equação do grupo de renormalização

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} - n\gamma\right)\Gamma_R^{(n)} = 0 \tag{3.73}$$

Usando análise dimensional

$$\left[m\frac{\partial}{\partial m} + (n-4) + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right]\Gamma_R(\sigma p, m, \lambda, \mu) = 0 \tag{3.74}$$

e podemos escrever

$$\left[\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma} - \beta\frac{\partial}{\partial\lambda} - (\gamma_m - 1)\, m\frac{\partial}{\partial m} + n\gamma + (n-4)\right]\Gamma_R(\sigma p, m, \lambda, \mu) = 0 \tag{3.75}$$

que tem a solução

$$\Gamma_R(\sigma p_i, m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n} e^{-n\int_0^t \gamma(\overline{\lambda}(t'))dt'}\Gamma_R^{(n)}(p_i, \overline{m}(t), \overline{\lambda}(t), \mu) \tag{3.76}$$

onde se introduziram a massa efectiva $\overline{m}(t)$ e a constante de acoplamento efectiva $\overline{\lambda}(t)$ definidas por

$$\begin{cases}
\dfrac{d\overline{\lambda}}{dt} = \beta(\overline{\lambda}) \qquad ; \qquad \overline{\lambda}(t=0) = \lambda \\
\dfrac{d\overline{m}(t)}{dt} = \Big[\gamma_m(\lambda) - 1\Big]\overline{m}(t) \qquad ; \qquad \overline{m}(t=0) = m
\end{cases} \tag{3.77}$$

A solução desta equação é

$$\begin{aligned}\overline{m}(t) &= m\ e^{\int_0^t [\gamma_m(\overline{\lambda}(t'))-1]dt'} \\ &= m\ e^{-t} e^{\int_0^t \gamma_m(\overline{\lambda}(t'))dt'} \\ &= m\ e^{-t} e^{\int_\lambda^{\overline{\lambda}(t)} dx \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)}}\end{aligned} \tag{3.78}$$

3.2.3 Parâmetros físicos

Os parâmetros definidos pelo esquema de subtracção mínima não são parâmetros físicos. Os parâmetros físicos podem no entanto ser calculados em função deles. Por parâmetro físico entendemos um elemento de matriz S ou a posição do pólo no propagador. Para eles é válido o teorema seguinte,

Teorema 3.2:

Qualquer parâmetro físico $P(\lambda, m, \mu)$ satisfaz a seguinte equação do grupo de renormalização

$$\mathcal{D}P(\lambda, m, \mu) \equiv \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}\right] P(\lambda, m, \mu) = 0 \tag{3.79}$$

Dem: *Consideremos primeiro o propagador escalar $\Delta(p^2)$ que satisfaz a equação do grupo de renormalização*

$$[\mathcal{D} + 2\gamma]\Delta(p^2, \lambda, m, \mu) = 0 \tag{3.80}$$

Podemos escrever uma série de Laurent em voltado pólo em $p^2 = m_p^2$

$$\Delta(p^2, \lambda, m, \mu) = \frac{R^2}{p^2 - m_p^2} + \widetilde{\Delta} \tag{3.81}$$

A posição do pólo $m_p(\lambda, m, \mu)$ e o resíduo $R^2(\lambda, m, \mu)$ satisfazem as equações do grupo de renormalização que podem ser obtidas por aplicação do operador $(\mathcal{D} + 2\gamma)$ à equação anterior. Igualando os resíduos dos pólos obtemos

$$\mathcal{D}m_p(\lambda, m, \mu) = 0 \tag{3.82}$$

$$[\mathcal{D} + \gamma(\lambda)]R(\lambda, m, \mu) = 0 \tag{3.83}$$

Demonstrámos portanto o teorema para a massa física. Para um elemento da matriz S temos ($S_R = R^n\Gamma^{(n)}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \lim_{p_i^2 \to m_p^2} R^n\Gamma^{(n)} &= \lim_{p_i^2 \to m_p^2} \mathcal{D}(R^n\Gamma^n) \\ &= \lim_{p_i^2 \to m_p^2} [n\mathcal{D}RR^{n-1}\Gamma^n + R^n\mathcal{D}\Gamma^n] \\ &= \lim_{p_i^2 \to m_p^2} [-n\gamma + n\gamma]R^n\Gamma^n = 0 \end{aligned} \tag{3.84}$$

o que completa a demonstração.

Veremos à frente como estes resultados podem ser usados para relacionar os parâmetros físicos com os parâmetros da teoria.

3.2.4 Cálculo das funções do grupo de renormalização em MS

Vimos anteriormente que

$$\begin{cases} \phi_0 &= \sqrt{Z_\phi}\phi \\ m_0 &= Z_m m \\ \\ \lambda_0 &= \mu^\varepsilon Z_\lambda \lambda \end{cases} \tag{3.85}$$

e que as constantes de renormalização têm a forma.

$$\begin{cases} Z_\lambda &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(\lambda)/\varepsilon^r \\ \\ Z_m &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} b_r(\lambda)/\varepsilon^r \\ \\ Z_\phi &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(\lambda)/\varepsilon^r \ . \end{cases} \tag{3.86}$$

Vejamos como se calculam β, γ_m e γ.

i) Cálculo de $\beta(\lambda)$

Por definição

$$\beta(\lambda) = \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu} \tag{3.87}$$

Esta quantidade é finita no limite $\varepsilon \to 0$. Isto quer dizer que antes de fazermos $\varepsilon \to 0$ deve ser uma função analítica em ε. É então conveniente definir

$$\beta(\lambda) = \hat{\beta}(\lambda, \varepsilon = 0) = d_0 \tag{3.88}$$

onde

$$\hat{\beta}(\lambda,\varepsilon) = d_0 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \cdots \tag{3.89}$$

com coeficientes d_r a determinar. Posto isto, usamos o facto de λ_0 não depender da escala μ. Então

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(\mu^\varepsilon Z_\lambda\lambda) \\ &= \varepsilon\mu^\varepsilon Z_\lambda\lambda + \mu^\varepsilon\hat{\beta}(\lambda,\varepsilon)\lambda\frac{\partial Z_\lambda}{\partial\lambda} + \mu^\varepsilon Z_\lambda\hat{\beta}(\lambda,\varepsilon) \end{aligned} \tag{3.90}$$

Então

$$\varepsilon\lambda Z_\lambda + \hat{\beta}(\lambda,\varepsilon)\left(Z_\lambda + \lambda\frac{\partial Z_\lambda}{\partial\lambda}\right) = 0 \tag{3.91}$$

Usando as expressões de Z_λ e $\hat{\beta}$ obtemos

$$\varepsilon\lambda + a_1\lambda + \lambda\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a_{r+1}}{\varepsilon^r} + (d_0 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \cdots)\left[1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^r}\left(a_r + \lambda\frac{da_r}{d\lambda}\right)\right] = 0 \tag{3.92}$$

Então $d_r = 0$ para $r > 1$ e

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda + d_1) \quad &+ \quad \left[a_1\lambda + d_0 + d_1\left(a_1 + \lambda\frac{da_1}{d\lambda}\right)\right] + \sum_r\frac{1}{\varepsilon^r}\left[a_{r+1}\lambda + d_0\left(a_r + \lambda\frac{da_r}{d\lambda}\right)\right. \\ &+ \quad \left. d_1\left(a_{r+1} + \lambda\frac{da_{r+1}}{d\lambda}\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{3.93}$$

logo

$$\begin{aligned} &\lambda + d_1 = 0 \\ &a_1\lambda + d_0 + d_1\left(a_1 + \lambda\frac{da_1}{d\lambda}\right) = 0 \\ &a_{r+1}\lambda + d_0\left(a_r + \lambda\frac{da_r}{d\lambda}\right) + d_1\left(a_{r+1} + \lambda\frac{da_{r+1}}{d\lambda}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.94}$$

Estes cálculos dão

$$d_1 = -\lambda \tag{3.95}$$

$$\beta(\lambda) = d_0 = \lambda^2 \frac{da_1}{d\lambda}$$
$$\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}(a_{r+1}) = \beta(\lambda)\frac{d}{d\lambda}(\lambda a_r) \tag{3.96}$$

Portanto a função $\beta(\lambda)$ depende somente do coeficiente em $\frac{1}{\varepsilon}$ de Z_λ que se calcula fácilmente em teoria de perturbações. Além disso vemos que os resíduos dos pólos de ordem superior se podem calcular em termos do resíduo do pólo simples. Para $\lambda\phi^4$ é fácil de ver que

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3\lambda}{16\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \cdots \tag{3.97}$$

e portanto

$$\beta(\lambda) = \lambda^2 \frac{da_1}{d\lambda} = \lambda^2 \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{3\lambda}{16\pi^2}\right) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \tag{3.98}$$

como tínhamos obtido anteriormente. Para teorias de gauge há uma pequena modificação pois $g_0 = \mu^{\varepsilon/2} Z_g g$. Um cálculo trivial dá neste caso

$$d_1 = -g/2 \tag{3.99}$$

e

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \frac{1}{2}g^2 \frac{da_1}{dg} \\ \frac{1}{2}g^2 \frac{da_{r+1}}{dg} &= \beta(g)\frac{d}{dg}(g a_r) \end{aligned} \tag{3.100}$$

onde, como anteriormente

$$Z_g = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r(g)/\varepsilon^r \ . \tag{3.101}$$

ii) Cálculo de $\gamma_m(\lambda)$

Partimos de $m_0 = Z_m m$. Aplicando $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \mu\frac{\partial Z_m}{\partial\mu} m + Z_m \mu \frac{\partial m}{\partial\mu} \\ &= \hat{\beta}(\lambda,\varepsilon)\frac{\partial Z_m}{\partial\lambda} m + m Z_m \mu \frac{\partial \ln m}{\partial\mu} \end{aligned} \tag{3.102}$$

Como $\mu\frac{\partial \ln m}{\partial \mu} = \gamma_m$, obtemos a equação

$$\left[\hat{\beta}(\lambda,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m\right] Z_m = 0 \tag{3.103}$$

ou seja

$$\left(\gamma_m + d_1\frac{db_1}{d\lambda}\right) + \sum_{r=1}^{\infty}\left[d_0\frac{db_r}{d\lambda} + \gamma_m b_r + d_1\frac{db_{r+1}}{d\lambda}\right] = 0 \tag{3.104}$$

Portanto

$$\gamma_m = -d_1\frac{db_1}{d\lambda} \tag{3.105}$$

$$-d_1\frac{db_{r+1}}{d\lambda} = \beta(\lambda)\frac{db_r}{d\lambda} + \gamma_m b_r \tag{3.106}$$

onde

$$d_1 = \begin{cases} -\lambda & \text{teoria} \quad \lambda\phi^4 \\ -g/2 & \text{teorias de gauge} \end{cases} \tag{3.107}$$

Mais uma vez γ_m depende somente do resíduo do pólo simples.

iii) Cálculo de $\gamma(\lambda)$

Aqui é mais fácil partir da definição de $\gamma(\lambda)$

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\phi = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_\phi\frac{1}{Z_\phi} \tag{3.108}$$

logo

$$\left[\hat{\beta}(\lambda,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\lambda} - 2\gamma(\lambda)\right] Z_\phi = 0 \tag{3.109}$$

o que dá

$$-2\gamma(\lambda) + d_1\frac{dc_1}{d\lambda} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\varepsilon^r}\left[d_0\frac{dc_r}{d\lambda} - 2\gamma c_r + d_1\frac{dc_{r+1}}{d\lambda}\right] = 0 \tag{3.110}$$

Então

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2}d_1\frac{dc_1}{d\lambda} \tag{3.111}$$

$$-d_1\frac{dc_{r+1}}{d\lambda} = \beta(\lambda)\frac{dc_r}{d\lambda} - 2\gamma c_r \tag{3.112}$$

sendo o coeficiente d_1 dado anteriormente, Eq.(3.102).

Podemos concluir dizendo que o coeficiente do pólo simples nas constantes de renormalização, determina univocamente as funções β, γ_m e γ e também os valores dos pólos de ordem superior.

3.2.5 Propriedades de β e γ

Nós adoptamos um esquema particular de renormalização. Se tivéssemos adoptado outro esquema teríamos outra definição dos parâmetros da teoria e funções β, γ_m e γ diferentes. Vamos aqui discutir os aspectos do grupo de renormalização que são independentes do esquema usado.

Consideremos então dois esquemas (ambos independentes da massa). Então

$$\begin{aligned} g' &= gF_g(g) & F_g(g) &= 1 + O(g^2) \\ Z'_m(g') &= Z_m(g)F_m(g) & F_m(g) &= 1 + O(g^2) \\ Z'_\phi(g') &= Z_\phi(g)F_\phi(g) & F_\phi(g) &= 1 + O(g') \end{aligned} \tag{3.113}$$

O 1 nas funções F expressa o facto que ao nível árvore não há ambiguidades. Usando as relações acima podemos ver como estão relacionadas as funções β, γ_m e γ em dois esquemas. Obtemos (estamos a considerar o caso duma teoria de gauge)

$$\begin{aligned} \beta'(g') &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g' = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(gF_g(g)) = \beta(g)\left(F_g + g\frac{\partial F_g}{\partial g}\right) \\ \gamma'_m(g') &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln m' = \mu\frac{\partial \ln}{\partial\mu}(F_m^{-1}(g)m) = \gamma_m(g) - \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\ln F_m \\ \gamma'(g') &= \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z'(g') = \gamma(g) + \frac{1}{2}\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\ln F_\phi \end{aligned} \tag{3.114}$$

As funções β, γ_m e γ só coincidirão se os esquemas forem o mesmo, isto é $F_g = F_m = F_\phi = 1$. Contudo as propriedades seguintes são ainda independentes do esquema.

i) A existência de um zero de $\beta(g)$.

Se $\beta(g_0) = 0$ então $\beta'(g'_0) = 0$ para $g'_0 = g_0F_g(g_0)$. Notar que em geral g_0 depende do esquema, isto é $g_0 \neq g'_0$.

ii) A primeira derivada de $\beta(g)$ no zero.

Seja $\beta(g_0) = 0$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\beta'(g_0')}{\partial g'} &= \left\{\frac{\partial g}{\partial g'}\frac{\partial}{\partial g}\left[\beta(g)\left(F_g + g\frac{\partial F_g}{\partial g}\right)\right]\right\}_{g_0} \\
&= \left[F_g + g\frac{\partial F_g}{\partial g} + g\frac{\partial\beta}{\partial g} + \beta(g)\frac{1}{F_s + g\frac{\partial F_g}{\partial g}}\frac{\partial\left(F_g + g\frac{\partial F_g}{\partial g}\right)}{\partial g}\right]_{g_0} \\
&= \frac{\partial\beta}{\partial g}(g_0)\ \cdot
\end{aligned} \tag{3.115}$$

iii) Os primeiros dois termos em $\beta(g)$.

Seja $\beta(g) = b_0 g^3 + b_1 g^5 + O(g^7)$, e

$$F_g(g) = 1 + ag^2 + O(g^4)\ \cdot \tag{3.116}$$

Então

$$g' = g + ag^3 + O(g^s) \tag{3.117}$$

e

$$g = g' - ag'^3 + O(g^5) \tag{3.118}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\beta'(g') &= \beta(g)\frac{\partial}{\partial g}(gF_g) = (b_0 g^3 + b_1 g^5 + O(g^7))(1 + 3ag^2 + O(g^4)) \\
&= b_0 g^3 + (3ab_0 + b_1)g^5 + O(g^7) \\
&= b_0(g'^3 - 3ag'^5 + O(g'^7) + (3ab_0 + b_1)(g'^5 + O(g'^7)) \\
&= b_0 g'^3 + b_1 g'^5 + O(g'^7)
\end{aligned} \tag{3.119}$$

iv) O primeiro termo em $\gamma(g)$ e $\gamma_m(g)$.

Seja

$$\begin{aligned}
\gamma(g) &= cg^2 + O(g^4) \\
\gamma_m(g) &= dg^2 + O(g^4)
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Então como $\beta(g) = O(g^3)$ é evidente que

$$\begin{aligned} \gamma'(g') &= cg'^2 + O(g'^4) \\ \gamma'_m(g') &= dg'^2 + O(g'^4) \ . \end{aligned} \tag{3.121}$$

v) O valor de $\gamma(g_0)$ e $\gamma_m(g_0)$ se $\beta(g_0) = 0$.

Este resultado é imediato. Como veremos na secção seguinte todos estes resultados são necessários pois eles controlam resultados físicos e estes não podem depender do esquema de renormalização.

3.2.6 Independência da gauge de β e γ_m em MS

A equação do grupo de renormalização em MS foi escrita para a teoria $\lambda\phi^4$. Vamos agora considerar teorias da gauge (abelianas ou não abelianas). Para a quantificação destas teorias é necessário introduzir um termo que fixe a gauge

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 \tag{3.122}$$

onde escolhemos as gauges do tipo de Lorentz. Como não há correcções radiativas para a parte longitudinal do propagador, não é necessário nenhum contratermo para o termo que fixa a gauge. Portanto se pusermos, como habitualmente,

$$A^\mu = Z_A^{-1/2} A_0^\mu \tag{3.123}$$

obtemos

$$\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 = \frac{1}{2\xi Z_A}(\partial \cdot A_0)^2 = \frac{1}{2\xi_0}(\partial \cdot A_0)^2 \tag{3.124}$$

o que quer dizer que o parâmetro de gauge é renormalização de acordo com

$$\xi_0 = Z_A \xi \ . \tag{3.125}$$

As funções de Green irredutíveis renormalizadas, dependem em geral de ξ, isto é

$$\Gamma_R^{(n)}(g, m, \xi, \mu) = Z_A^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(g_0, m_0, \xi_0, \varepsilon) \tag{3.126}$$

A equação do grupo de renormalização é então

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g,\xi)\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m(g,\xi) m\frac{\partial}{\partial m} + \delta(g,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi} - \gamma_A(g,\xi)\right]\Gamma_R^{(n)}(g, m, \xi, \mu) = 0 \tag{3.127}$$

onde

$$\begin{aligned}\delta(g,\xi) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\xi = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_A^{-1}\xi_0) = \\ &= -\xi_0\frac{1}{Z_A^2}\frac{\partial}{\partial\mu}Z_A \\ &= -2\xi\gamma_A(g,\xi) \end{aligned} \tag{3.128}$$

e se admitiu a possibilidade de β, γ_m e γ_A dependerem do parâmetro ξ. Contudo a dependência em ξ não é arbitrária, obedece a certos constrangimentos. Para vermos isso consideremos uma função de Green sem dimensões e correspondendo a operadores invariantes de gauge. Então

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}G_0(g_0,m_0,\xi_0,\varepsilon) = 0 \qquad \text{(independente de gauge)} \tag{3.129}$$

e

$$G_0(g_0,m_0,\xi_0,\varepsilon) = G(g,m,\xi,\mu) \qquad \text{(sem dimensões)} \tag{3.130}$$

e portanto

$$\frac{\partial}{\partial\xi}G = 0 \tag{3.131}$$

ou seja

$$\mathcal{D}_G G \equiv \left[\frac{\partial}{\partial\xi} + \rho(g,\xi)\frac{\partial}{\partial g} + \sigma(g,\xi)m\frac{\partial}{\partial m}\right]G(g,m,\xi,\mu) = 0 \tag{3.132}$$

onde

$$\rho(g,\xi) = \frac{\partial g}{\partial\xi} \qquad ; \qquad \sigma(g,\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\ln m \tag{3.133}$$

Mas G obedece à equação do grupo de renormalização

$$\mathcal{D}G \equiv \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m m\frac{\partial}{\partial m} + \delta\frac{\partial}{\partial\xi}\right]G = 0 \tag{3.134}$$

Usando a equação para $\mathcal{D}_G G = 0$ podemos substituir a derivada em ordem a ξ por derivadas em ordem aos outros parâmetros, obtendo uma equação do grupo de renormalização semelhante à das teorias que não têm campos de gauge, isto é

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \overline{\beta}\frac{\partial}{\partial g} + \overline{\gamma}_m m\frac{\partial}{\partial m}\right]G = 0 \tag{3.135}$$

onde

$$\overline{\beta} \equiv \beta - \rho\delta \qquad\qquad \overline{\gamma}_m = \gamma_m - \sigma\delta \tag{3.136}$$

Calculemos agora o comutador $[\mathcal{D}_G, \mathcal{D}]G = 0$. Obtemos

$$\begin{aligned}\Bigg\{&\left[\frac{\partial\beta}{\partial\xi} + \beta\frac{\partial\beta}{\partial g} - \beta\frac{\partial\rho}{\partial g} - \delta\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right]\frac{\partial}{\partial g} + \left[\frac{\partial\delta}{\partial\xi} + \rho\frac{\partial\delta}{\partial g}\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\\ &+ \left[\frac{\partial\gamma_m}{\partial\xi} + \rho\frac{\partial\gamma_m}{\partial g} - \beta\frac{\partial\sigma}{\partial g} - \frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right] m\frac{\partial}{\partial m}\Bigg\} G = 0\end{aligned} \tag{3.137}$$

Introduzindo as funções $\overline{\beta}$ e $\overline{\gamma}_m$ e o operador

$$\overline{\mathcal{D}} \equiv \frac{\partial}{\partial\xi} + \rho\frac{\partial}{\partial g} \tag{3.138}$$

a equação anterior escreve-se

$$\begin{aligned}\Bigg[&(\overline{\mathcal{D}}\delta)\frac{\partial}{\partial\xi} + \left(\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\beta} + \overline{\mathcal{D}}(\rho\delta) - \overline{\beta}\frac{\partial\rho}{\partial g} - \delta\overline{\mathcal{D}}\rho\right)\frac{\partial}{\partial g}\\ &+ \left(\overline{\mathcal{D}}\overline{\gamma}_m + \overline{\mathcal{D}}(\sigma\delta) - \overline{\beta} - \frac{\partial\sigma}{\partial g} - \delta\overline{\mathcal{D}}\sigma\right) m\frac{\partial}{\partial m}\Bigg] G = 0\end{aligned} \tag{3.139}$$

Multiplicando a equação $\mathcal{D}_G G = 0$ por $(\overline{\mathcal{D}}\delta)$ obtemos

$$\left[(\overline{\mathcal{D}}\delta)\frac{\partial}{\partial\xi} + \rho(\overline{\mathcal{D}}\delta)\frac{\partial}{\partial g} + \sigma(\overline{\mathcal{D}}\delta)m\frac{\partial}{\partial m}\right] G = 0 \tag{3.140}$$

Comparando as duas equações vemos que

$$\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\beta} = \overline{\beta}\frac{\partial\rho}{\partial g} \qquad \text{e} \qquad \overline{\mathcal{D}}\ \overline{\gamma}_m = \overline{\beta}\frac{\partial\sigma}{\partial g} \tag{3.141}$$

Estas equações asseguram que resultados físicos sejam independentes de gauge. Assim $\overline{\beta} = 0$ tem consequências físicas. Então $\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\beta} = 0$ e $\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\gamma}_m = 0$ dizendo que a existência dos zeros de $\overline{\beta}$ e a dimensão anómala da massa $\overline{\gamma}_m$ são independentes de gauge. Também se $\overline{\beta} = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{D}}\left(\frac{\partial\overline{\beta}}{\partial g}\right) &= \frac{\partial}{\partial g}\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\beta} + \left[\overline{\mathcal{D}}, \frac{\partial}{\partial g}\right]\overline{\beta}\\ &= \frac{\partial}{\partial g}\overline{\mathcal{D}}\ \overline{\beta} - \frac{\partial\rho}{\partial g}\frac{\partial\overline{\beta}}{\partial g} = 0\end{aligned} \tag{3.142}$$

e portanto a primeira derivada de $\overline{\beta}$ no zero é independente da gauge. Finalmente como $\rho = O(g^3)$ e $\delta = O(g^2)$ temos então

$$\overline{\beta} = \beta + O(g^5) \ . \tag{3.143}$$

Estes resultados não dependem de se ter adoptado subtracção miníma ou não. Se adoptarmos subtracção mínima temos então

Teorema 3.3

No esquema de subtracção mínima temos $\rho = \sigma = 0$ e portanto

$$\overline{\mathcal{D}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad ; \quad \overline{\beta} = \beta \quad e \quad \overline{\gamma}_m = \gamma_m \tag{3.144}$$

e β e γ_m são independentes da gauge em todas as ordens.

Dem: *Demonstramos só para ρ, para σ é igual.*

$$\rho = g\frac{\partial}{\partial \xi} \ln g = -\frac{g}{Z_g}\frac{\partial Z_g}{\partial \xi} \tag{3.145}$$

Então

$$\begin{aligned} 0 &= Z_g \rho + g\frac{\partial}{\partial \xi}\left(1 + \frac{a_1}{\varepsilon} + \frac{a_2}{\varepsilon^2} + \cdots\right) \\ &= \rho + \frac{1}{\varepsilon}\left(\rho a_1 + g\frac{\partial a_1}{\partial \xi}\right) + O(1/\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.146}$$

obtemos portanto

$$\rho = 0 \ . \tag{3.147}$$

3.3 Constantes de acoplamento efectivas

3.3.1 Pontos fixos

Como vimos na secção anterior, o comportamento assimptótico das funções de Green irredutíveis depende do comportamento assimptótico das soluções das equações para a constante de acoplamento efectivo $\overline{\lambda}(t)$ e para a massa efectiva, que como vimos são

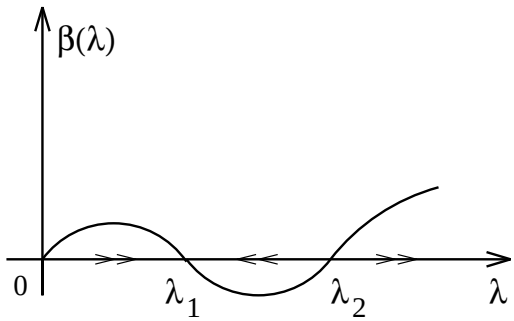


Figura 3.2:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{\lambda}}{dt} &= \beta(\overline{\lambda}) \qquad ; \qquad \overline{\lambda}(0) = \lambda \\ \dfrac{d\overline{m}}{dt} &= \left[\gamma_m(\overline{\lambda}) - 1\right] \overline{m}(t) \qquad ; \qquad \overline{m}(0) = m \end{cases} \tag{3.148}$$

Destas equações resulta que as variações da constante de acoplamento efectiva e da massa efectiva com uma variação de escala de energia são controladas pelas funções β e γ_m, respectivamente. Para estudar o comportamento assimptótico de λ vamos admitir que $\beta(\lambda)$ tem a forma da figura 3.2.
Os pontos, $0, \lambda_1$ e λ_2 onde $\beta(\lambda)$ se anula são chamadas *pontos fixos*, pois se $\overline{\lambda}$ se encontra num desses pontos em $t = 0$ então ficará aí para todos os valores do momento $\left(\frac{d\overline{\lambda}}{dt} = 0\right)$. Os pontos fixos podem ser de dois tipos:

i) Ponto fixo estável ultravioleta(UV)

São aqueles em que $\beta'(\lambda) < 0$. É o caso do ponto λ_1 na figura 3.2. Neste caso $\beta(\lambda) > 0$ para $\lambda < \lambda_1$ e $\beta(\lambda) < 0$ para $\lambda > \lambda_1$. Então se para $t = 0 \quad 0 < \lambda < \lambda_1$ então quando $t \to \infty \quad \overline{\lambda} \to \lambda_1$. Por outro lado se $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ quando $t \to \infty$ também $\overline{\lambda} \to \lambda_1$. Poratnto no intervalo $0 < \lambda < \lambda_2$ a constante de acoplamento é sempre conduzida para λ_1 quanto $t \to \infty$, isto é, para momentos grandes.

ii) Ponto fixo estável infravermelho(IR)

São aqueles em que $\beta'(\lambda) > 0$. É o caso dos pontos 0 e λ_2 da figura. É fácil de ver que quando $t \to \infty$ a constante de acoplamento se afasta de 0 e λ_2, mas que no limite $t \to 0$ se aproxima deles.

Podemos agora estudar o comportamento assimptótico das soluções do grupo de renormalização. Supomos, por exemplo $0 < \lambda < \lambda_2$. Então (ver figura 3.2)

$$\lim_{t \to 0} \overline{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1 \tag{3.149}$$

A maneira como tende para λ_1 depende da primeira derivada de $\beta(\lambda)$. Suponhamos que na vizinhança de λ_1 temos

$$\beta(\lambda) = a(\lambda_1 - \lambda) \quad ; \quad a > 0$$

$$\beta'(\lambda_1) = -a < 0 \tag{3.150}$$

Então

$$\overline{\lambda}(t, \lambda) = \lambda_1 + (\lambda - \lambda_1)e^{-at} \tag{3.151}$$

isto é, a aproximação do ponto fixo é exponencial na variável t. Será tanto maior quanto maior for $|\beta'(\lambda_1)| = a$. Vimos anteriormente que a solução da equação da massa efectiva era

$$\overline{m}(t) = me^{-t}e^{\int_0^t \gamma_m(\overline{\lambda})dt'} \tag{3.152}$$

Se $\lim\limits_{t\to\infty} \overline{\lambda} = \lambda_1$ então temos para $t \to \infty$

$$\overline{m} = me^{-t(1-\gamma_m(\lambda_1))} \tag{3.153}$$

o que mostra que se $\gamma_m(\lambda_1) < 1$ então $m(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Na mesma aproximação

$$\int_0^t \gamma(\overline{\lambda}(t'))dt' \simeq \gamma(\lambda_1)t \tag{3.154}$$

e portanto a solução assimptótica é

$$\lim_{\sigma\to\infty} \Gamma^n(\sigma p_i, m, \lambda, \mu) = \sigma^{4-n[1+\gamma(\lambda_1)]}\Gamma^{(n)}(p_i, \overline{m}, \lambda_1, \mu) \tag{3.155}$$

o que mostra que a dimensão dos campos não é 1 mas $1 + \gamma(\lambda_1)$. Daí o nome de dimensão anómala para $\gamma(\lambda)$.

Em geral é difícil calcular os zeros da função β, pois requere normalmente resultados para além da teoria de perturbações. Contudo $\beta(\lambda), \gamma_m(\lambda)$ e $\gamma(\lambda)$ têm um zero trivial na origem. Se acontecer que a origem seja um ponto fixo estável UV então quer dizer que quando a escala da energia aumenta a constante de acoplamento diminui. No limite $t \to \infty, \overline{\lambda} \to 0$ e por isso se diz destas teorias que são *assimptoticamente livres*. É fácil de ver que isso acontece se $\beta'(0) < 0$. Na secção seguinte vamos ver quais as teorias em que isso pode acontecer.

3.3.2 Função β para teoria com escalares, fermiões e campos de gauge

Vamos nesta secção mostrar que só as teorias de gauge não abelianas podem ser assimptoticamente livres, isto é, só estas verificam a propriedade $\beta'(0) < 0$.

i) Teorias com escalares

Já vimos anteriormente que para a teoria escalar mais simples, $\lambda\phi^4$, temos

$$\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} + O(\lambda^4) \tag{3.156}$$

e portanto não é assimptoticamente livre. Consideramos agora a teoria escalar mais geral com campos ϕ_i e acoplamento

$$\mathcal{L}_I = -\lambda_{ijk\ell}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_\ell \tag{3.157}$$

onde se somam os índices repetidos. Então

$$\beta_{ijk\ell} = \frac{d\overline{\lambda}_{ijk\ell}(t)}{dt} = A(\overline{\lambda}_{i\ell mn}\overline{\lambda}_{kjmn} + \overline{\lambda}_{ijmn}\overline{\lambda}_{k\ell mn} + \overline{\lambda}_{ikmn}\overline{\lambda}_{j\ell mn}) \tag{3.158}$$

com $A > 0$. A teoria não é assimptoticamente livre pois há sempre funções β com derivadas positivas. Por exemplo

$$\frac{d\overline{\lambda}_{1111}}{dt} = \beta_{1111} = 3A|\overline{\lambda}_{11mn}|^2 > 0 \qquad ; \qquad \forall t \tag{3.159}$$

ii) Teorias com escalares + fermiões + acoplamentos de Yukawa

O termo da interacção mais geral para uma teoria com escalares e fermiões é

$$\mathcal{L}_I = -\sum_{i,j,k,\ell}\lambda_{ijk\ell}\phi_i\phi_j\phi_k\phi_\ell + \sum_{a,b,k}\overline{\psi}^a(A^k_{ab} + iB^k_{ab}\gamma_5)\overline{\psi}^b\phi_k \tag{3.160}$$

onde A e B são matrizes reais. Agora já não é possível mostrar que $\frac{d\overline{\lambda}_{iiii}}{dt} > 0$ por causa do loop de fermiões de ordem A^2 ou B^2 com um sinal negativo. Se definirmos $(g^i)_{ab} \equiv A^i_{ab} + iB^i_{ab}$, obtemos

$$\begin{aligned} 16\pi^2\frac{dg^i}{dt} &= (\mathrm{Tr}g^i g^{j\dagger})g^j + \mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^j)g^j + M^{ij}g^j \\ &\quad + \frac{1}{2}g^i g^{\dagger j}g^j + \frac{1}{2}g^j g^{\dagger j}g^i + 2g^j g^{\dagger i}g^j \end{aligned} \tag{3.161}$$

onde $M^{ij} \equiv \frac{1}{4}\lambda_{ik\ell m}\lambda_{jk\ell m}$. Usando este resultado é possível demonstrar o teorema seguinte:

Teorema 3.4

A teoria mais geral com escalares e fermiões não é assimptoticamente livre pois $\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^i) > 0$ *e portanto não é possivel* $g_i \to 0$ *quando* $t \to \infty$.

Dem:

$$\begin{aligned} 8\pi^2\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^i) &= 8\pi^2\frac{d}{dt}\sum_{a,b,i}|g^i_{ab}|^2 \\ &= \mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger})\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^j) + \mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger})(\mathrm{Tr}g^ig^{j\dagger}) \\ &\quad +\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^ig^{i\dagger}g^jg^{j\dagger}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^ig^{j\dagger}g^j) \\ &\quad +2\mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger}g^ig^{j\dagger}) + M^{ij}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^j) \end{aligned} \tag{3.162}$$

Agora o último termo é positivo, assim como o terceiro e o quarto. O primeiro é maior que o segundo e portanto

$$8\pi^2\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^i \geq 2\Big[\mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger})\mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger}) + \mathrm{Tr}(g^ig^{j\dagger}g^ig^{j\dagger})\Big] \tag{3.163}$$

e o segundo membro é positivo pois pode ser escrito

$$8\pi^2\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(g^{i\dagger}g^i) \geq (g^i_{ab}g^i_{cd} + g^i_{ad}g^i_{cd})(g^{j\dagger}_{ba}g^{j\dagger}_{dc} + g^{j\dagger}_{da}g^{j\dagger}_{bc}) \geq 0 \tag{3.164}$$

como queríamos demonstrar.

iii) Teorias gauge abelianas

Consideremos o caso de QED. Temos

$$Z_e = Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2} = Z_3^{-1/2} \tag{3.165}$$

Z_3 pode ser calculado do diagrama de polarização do vácuo representado na figura 3.3, e o resultado é

$$Z_3^{-1/2} = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} + \cdots \tag{3.166}$$

logo

$$\beta(e) = \frac{1}{2}e^2\frac{da_1}{de} = \frac{e^3}{12\pi^2} > 0 \tag{3.167}$$

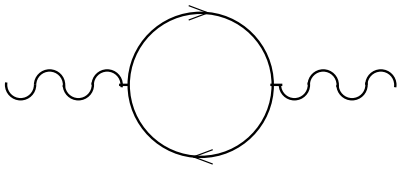


Figura 3.3:

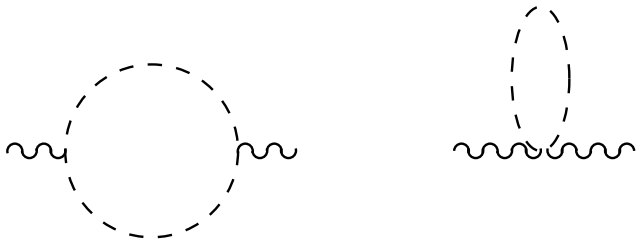


Figura 3.4:

Se tivéssemos electrodinâmica escalar Z_3 seria obtido a partir dos diagramas da figura 3.4, e o resultado seria

$$Z_3^{-1/2} = 1 + \frac{e^2}{48\pi^2}\frac{1}{\varepsilon} \tag{3.168}$$

o que dá neste caso $\beta(e) = \frac{e^3}{48\pi^2} > 0$. Portanto as teorias de gauge abelianas não são livres assimptoticamente.

iv) Teorias de gauge não abelianas

Comecemos pela teoria de gauge pura definida no capítulo 2. A renormalização da função de onda para os campos de gauge é obtida a partir dos diagramas da figura 3.5. Em subtracção mínima obtemos,

$$Z_A = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{13}{3} - \xi\right) C_2(V)\frac{1}{\varepsilon} \tag{3.169}$$

onde $C_2(V)$ é o operador de Casimir definido no capítulo 2 para a representação adjunta, a que pertencem os campos da gauge (vectores). A constante de renormalização do vértice triplo, Z_1, é obtida a partir dos diagramas da figura 3.6.
Obtemos

$$Z_1 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{17}{6} - \frac{3\xi}{2}\right) C_2(V)\frac{1}{\varepsilon} + \cdots \tag{3.170}$$

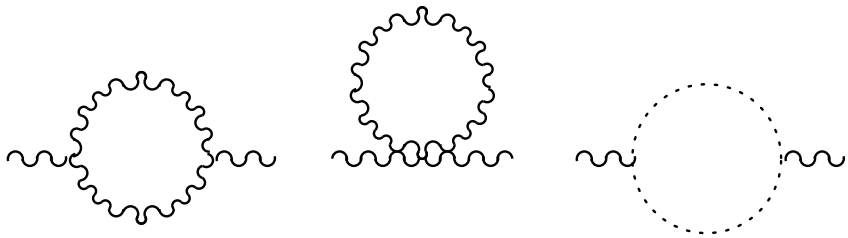


Figura 3.5:

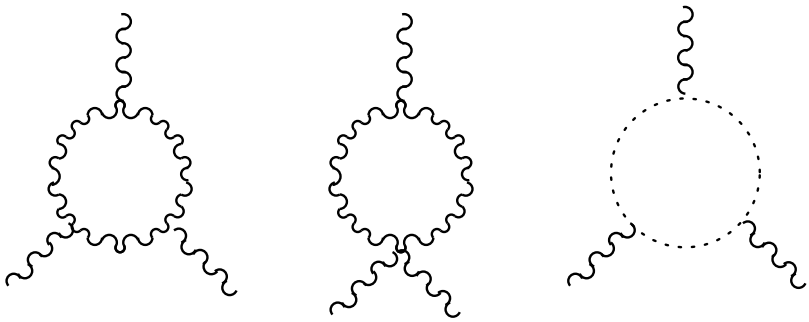


Figura 3.6:

Então

$$Z_g \equiv Z_1 Z_A^{-3/2} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(V)\right)\frac{1}{\varepsilon} + \cdots \tag{3.171}$$

Usando Z_A e Z_g e as definições de β e γ obtemos

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2}\frac{11}{3}C_2(V) < 0 \tag{3.172}$$

e

$$\gamma_A = -\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{2}\left(\frac{13}{3} - \xi\right)C_2(V) \tag{3.173}$$

Portanto as teorias de gauge não abelianas sem campos de matéria são assimptoticamente livres. Notar que a dependência da gauge (em ξ) desapareceu de β de acordo com o resultado demonstrado anteriormente.

A inclusão de fermiões e escalares acoplados mínimamente é agora trivial. O lagrangeano de interacção é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= g\overline{\psi}_i\gamma^\mu\psi_j T^a_{Fij}A^a_\mu \\ &\quad + ig\phi_i^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi_j T^a_{Sij}A^{\mu a} \\ &\quad + g^2\phi_i^* T^a_{Sij}T^b_{Sjk}\phi_k A^a_\mu A^{\mu b}\end{aligned} \tag{3.174}$$

onde T^a_F e T^a_S são os geradores na representação em que se encontram os fermiões e os escalares respectivamente. Para se encontrar a contribuição destas partículas para a função β temos que calcular a contribuição delas para Z_g. O mais fácil é usar os resultados de QED e electrodinâmica escalar que dizem que

$$Z_g = Z_A^{-1/2} \tag{3.175}$$

e calcular a contribuição para Z_A dos fermiões e escalares devido aos diagramas da figura 3.7. O resultado é

$$Z_A(\text{fermiões + escalares}) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\left[\frac{4}{3}T(R_F) + \frac{1}{3}T(R_S)\right]\frac{1}{\varepsilon} + \cdots \tag{3.176}$$

pelo que

$$\beta(\text{fermiões}) = \frac{g^3}{16\pi^2}\frac{4}{3}T(R_F) \tag{3.177}$$

e

$$\beta(\text{escalares}) = \frac{g^3}{16\pi^2}\frac{1}{3}T(R_S) \tag{3.178}$$

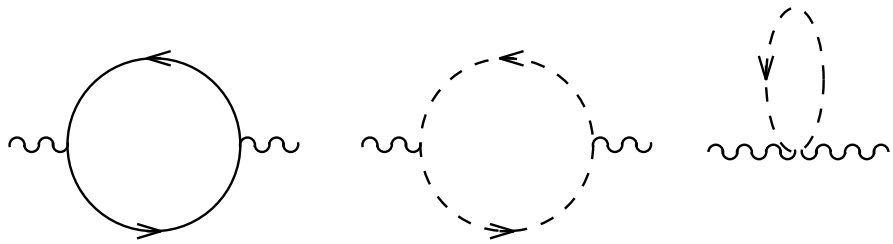


Figura 3.7:

Pondo tudo junto obtemos

$$\beta = \frac{g^3}{16\pi^2}\left[-\frac{11}{3}C_2(V) + \frac{4}{3}T(R_F) + \frac{1}{3}T(R_s)\right] \tag{3.179}$$

onde as quantidades $T(R)$ são definidas para uma dada representação por

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = T(R)\delta^{ab} \tag{3.180}$$

Se a teoria contém fermiões de Majorana (ou spinores de Weyl) ou campos escalares, os coeficientes em frente de $T(R_F)$ e $T(R_S)$ são multiplicados por um factor adicional de 1/2. Consideremos agora um exemplo simples:

Exemplo 3.1:

QCD ($SU(3)$) com as três familias de quarks.

Para $SU(N)$ temos

$$C_2(V) = N \tag{3.181}$$

e como os quarks se encontram na representação fundamental

$$T(R_F) = \frac{1}{2} \tag{3.182}$$

Então

$$\beta = \frac{g}{16\pi^2}\left[-\frac{33}{3} + \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\times 2N_g\right] \tag{3.183}$$

ou seja (N_g = número de gerações ou famílias)

$$\beta = \frac{g^3}{16\pi^2}\left[-\frac{33-4N_g}{3}\right] \tag{3.184}$$

Portanto $SU(3)$ será assimptoticamente livre se

$$33 - 4N_g > 0 \tag{3.185}$$

ou ainda

$$N_g < \frac{33}{4} \rightarrow N_g \leq 8 \tag{3.186}$$

São portanto permitidas 8 *famílias ou seja* 16 *tripletos de* $SU(3)$.

3.3.3 O vácuo de $NAGT$ como um meio paramagnético ($\mu > 1$)

Um argumento recente (Nielsen 1981, Hughs 1981) permite compreender melhor o que se passa de diferente nas teorias de gauge não abelianas para que elas tenham liberdade assimptotica. Primeiro o facto de a carga diminuir a curta distância pode ser interpretado como um *anti - shielding* do vácuo, isto é

$$\varepsilon < 1 \tag{3.187}$$

O problema em compreender o que se passa resulta do facto de não conhecermos substâncias[3] com $\varepsilon < 1$. Contudo o vácuo deve ser invariante relativista e portanto deve ter uma permeabilidade μ tal que (estamos a fazer $c = 1$)

$$\mu\varepsilon = 1 \tag{3.188}$$

Assim o *antiscreening* corresponde a $\mu > 1$. Portanto o vácuo duma teoria de gauge não abeliana é um *paramagnético* e este conceito pode ser compreendido mais facilmente.

A permeabilidade magnética pode ser calculada calculando a densidade de energia do vácuo num campo exterior

$$u_0 = \frac{1}{2\mu} B_{ext}^2 \tag{3.189}$$

Nielsen e Hughes mostraram que $\mu = 1 + \chi$ onde a susceptibilidade χ é dada por

$$\chi \sim (-1)^{2s} q^2 \sum_{s_3} \left(-\frac{1}{3} + \gamma^2 s_3^2 \right) \tag{3.190}$$

onde s é o spin, q a carga, γ a razão giromagnética e s_3 a projecção de spin na direcção do campo magnético externo. Assim para escalares, fermiões e campos de gauge obtemos

[3] Em QED a carga aumenta a curta distância e portanto o vácuo é um dieléctrico normal $\varepsilon > 1$.

Escalares

$$\chi_S \sim -\frac{1}{3}q_S^2 < 0 \qquad \text{(diamagnético)} \tag{3.191}$$

Fermiões ($\gamma_F = 2$)

$$\chi_F \sim (-1)q_F^2 2\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -\frac{4}{3}q_F^2 \qquad \text{(diamagnético)} \tag{3.192}$$

Bosões de gauge ($\gamma_V = 2$)

$$\chi_V \sim q_V^2 2\left(-\frac{1}{3}+4\right) = \frac{22}{3}q_V^2 \qquad \text{(paramagnético)} \tag{3.193}$$

e portanto

$$\chi_{\text{Total}} \sim \frac{22}{3}q_V^2 - \frac{4}{3}q_F^2 - \frac{1}{3}q_S^2 \tag{3.194}$$

Comparando com a função β podemos fazer a correspondência

$$\begin{aligned} q_V^2 &\to \frac{1}{2}C_2(V) \\ q_F^2 &\to T(R_F) \\ q_S^2 &\to T(R_S) \end{aligned} \tag{3.195}$$

o que permite compreender o vácuo das teorias de gauge não abelianas como um meio paramagnético.

3.4 Aplicações do Grupo de Renormalização

Consideremos a teoria de grande unificação com o grupo $SU(5)$, isto é

$$SU(5) \supset SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)\ . \tag{3.196}$$

A unificação dá-se à escala M_X. Usando o grupo de renormalizaç ão é possível determinar a escala M_X bem como efectuar outras previsões sobre a teoria à escala M_W. Para isso temos que ver como evoluem as diferentes constantes de acoplamento com a energia.

i) Escala M_X

Comecemos por escrever as derivadas covariantes para a teoria unificada e para a teoria com a simetria quebrada

$$SU(5) : D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{a=0}^{23} A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \tag{3.197}$$

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1) : D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \sum_{\alpha}^{8} G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}_2 + ig_2 \sum_{\alpha}^{3} A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}_2 + ig' \frac{Y}{2} B_\mu \tag{3.198}$$

À escala M_X onde se dá a unificação temos

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1 \tag{3.199}$$

onde g_1 é a constante de acoplamento do subgrupo abeliano de $SU(5)$. Contudo para os grupos abelianos não há constrangimetos na normalização e portanto o gerador λ^0 desse $U(1)$ pode estar normalizado de maneira diferente da hipercarga. Devemos ter

$$g_1 \lambda^0 = g' Y \tag{3.200}$$

Mas λ^0 é gerador de $SU(5)$ e portanto está normalizado de acordo com

$$T_F(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab} \tag{3.201}$$

isto é, para a representação fundamental, devemos ter

$$\lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{bmatrix} \tag{3.202}$$

Mas para a representação fundamental

$$5 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^+ \\ \nu_e^c \end{pmatrix}_R \tag{3.203}$$

a hipercarga obtém-se por leitura directa

$$Y = \begin{bmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.204}$$

Logo $Y = -\sqrt{\frac{5}{3}}\lambda^0$ e $g' = -\sqrt{\frac{3}{5}}g_1$. Isto permite imediatamente determinar $\sin^2\theta_W$ à escala M_X,

$$\sin^2\theta_W(M_X) = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3}{5}g_1}{g_2 + \frac{3}{5}g_1} = \frac{3}{8} \tag{3.205}$$

ii) Escala M_W

Vejamos agora o que se passa a outra escala, por exemplo à escala M_W. A evolução das constantes de acoplamento é governada pelas equações

$$\frac{dg_n}{dt} = -b_n g_n^3 \tag{3.206}$$

onde os coeficientes b_n podem ser facilmente obtidos a partir da função β

$$\beta = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(V) - \frac{4}{3}T(R_F) - \frac{1}{3}T(R_S)\right] \tag{3.207}$$

Vamos nesta análise desprezar os Higgs (podem ser incorporados facilmente) e designar por N_F o número de sabores. No modelo standard $N_F = 2N_g$ (N_g é o número de gerações ou famílias). Então

$$b_3 = \frac{1}{48\pi^2}\left[33 - 4 \times \frac{1}{2} \times N_F\right] \tag{3.208}$$

$$b_2 = \frac{1}{48\pi^2}\left[22 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times N_g(1+3)\right] \tag{3.209}$$

e finalmente

$$b_1 = \frac{1}{48\pi^2}\left[-4 \times \frac{1}{2} \times \sum\left(\frac{Y}{2}\right)^2\right] \times \frac{3}{5} \tag{3.210}$$

onde

$$\sum\left(\frac{Y}{2}\right)^2 = N_g\frac{1}{4}\left[2 \times (-1)^2 + 2 \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-2)^2 + 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{5}{3}N_F \tag{3.211}$$

Portanto podemos finalmente pôr

$$\begin{cases} b_n &= \frac{1}{48\pi^2}(11n - 2N_F) \qquad n \geq 2 \\ b_1 &= \frac{1}{48\pi^2}(-2N_F) \end{cases} \tag{3.212}$$

A solução das equações é

$$\frac{1}{g_n^2(\mu)} = \frac{1}{g_5^2} + b_n \ln\left(\frac{\mu^2}{M_X^2}\right) \tag{3.213}$$

Podemos escrever estas equações em termos dos parâmetros $\alpha(\mu)$ e $\alpha_s(\mu)$ mensuráveis a baixa energia

$$\begin{cases} \alpha_s^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + 4\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu^2}{M_X^2}\right) \\ \alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W(\mu) = \alpha_5^{-1} + 4\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu^2}{M_X^2}\right) \\ \frac{3}{5}\cos^2\theta_W(\mu)\alpha^{-1}(\mu) = \alpha_5^{-1} + 4\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu^2}{M_X^2}\right) \end{cases} \tag{3.214}$$

onde se fez, como é usual

$$\alpha_i \equiv \frac{g_i^2}{4\pi} \tag{3.215}$$

Destas equações pode-se obter

$$\ln\frac{M_X^2}{\mu^2} = \frac{2\pi}{11}\left[\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3}\frac{1}{\alpha_s(\mu)}\right] \tag{3.216}$$

que permite determinar M_X uma vez que conhecidas $\alpha(\mu)$ e $\alpha_s(\mu)$ à escala μ, e

$$\sin^2\theta_W(\mu) = \frac{3}{8}\left[1 - \frac{110}{9}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)\ln\left(\frac{M_X^2}{\mu^2}\right)\right] \tag{3.217}$$

Conhecido M_X esta equação permite determinar $\sin^2\theta_W$ à escala $\mu = M_W$. Um cálculo mais cuidadoso incluindo Higgs e correcç ões de ordem superior dá

$$\begin{aligned} M_X &\simeq 4 \times 10^{14} GeV \\ \sin^2\theta_W(M_W) &\simeq 0.21 \ . \end{aligned} \tag{3.218}$$

A evolução das constantes de acoplamento é então a representada na figura 3.8.

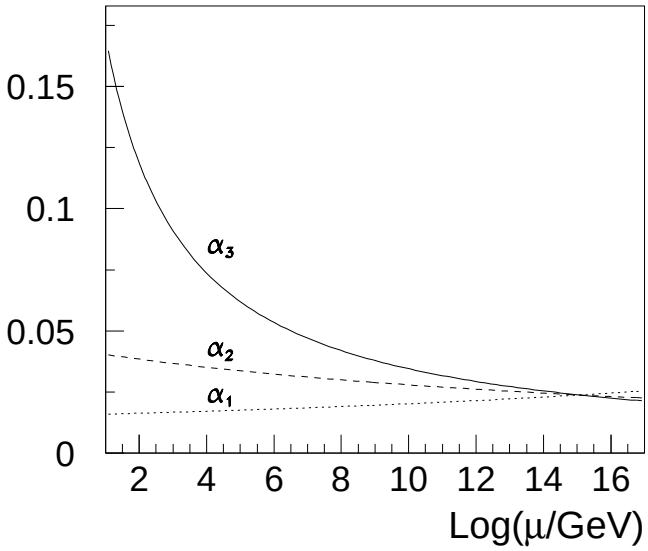
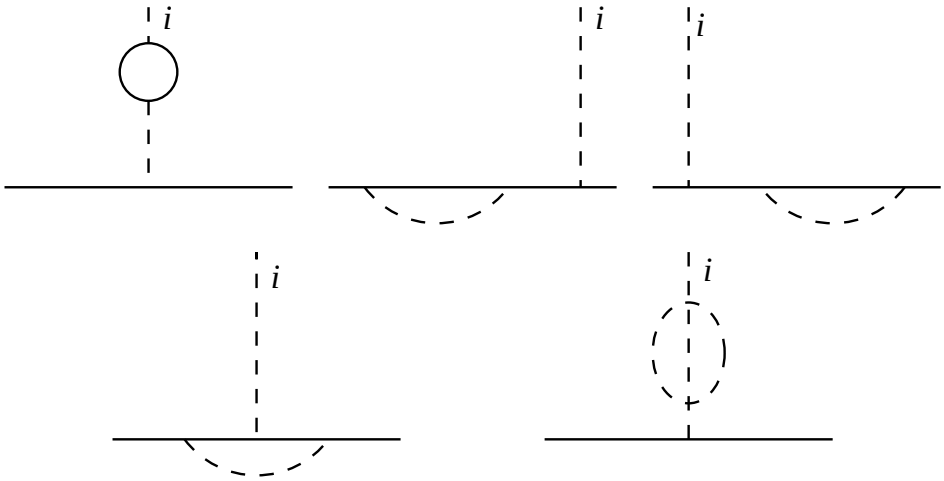


Figura 3.8:

Quando estes resultados foram encontrados pela primeira vez eram apontados como um sucesso do modelo $SU(5)$. Hoje as constantes $\alpha(\mu)$ e $\alpha_s(\mu)$ são mais bem conhecidas, assim como o valor de $\sin^2\theta_W$ e sabe-se que dentro dos erros as três curvas não se encontram. Contudo generalizações supersimétricas da teoria $SU(5)$ parecem estar em acordo com os resultados experimentais.

Problemas Capítulo 3

3.1 Verifique a equação 3.161. Para isso note que $\beta^i = \frac{dg^i}{dt}$ onde β^i é calculada a partir dos diagramas seguintes



3.2 Calcule em subtração mínima (MS) a constante de renormalização Z_3 para QED, equação 3.166.

3.3 Calcule em MS a constante de renormalização Z_3 em electrodinâmica escalar, equação 3.168.

3.4 Considere uma teoria não abeliana com grupo de simetria G e sem matéria. Calcule as constantes de renormalização do propagador Z_A, e do vértice triplo Z_1.

3.5 Considere uma teoria não abeliana em interacção com campos escalares e fermiónicos. Calcule a contribuição destes campos para Z_A e Z_1. Utilize estes resultados juntamente com os resultados do problema 3.4 para determinar a função β do grupo de renormalização para essa teoria.

3.6 Considere o modelo padrão das interacções electrofracas e fortes. Considerando todos os campos do modelo (incluindo os Higgs) calcule os coeficientes b_1, b_2 e b_3 definidos na equação (3.201).

3.7 Considere agora o modelo padrão supersimétrico mínimo (MSSM). Calcule os coeficientes b_1, b_2 e b_3 definidos na equação (3.201). Refaça a análise da convergência das constantes de acoplamento no quadro duma teoria de grande unificação supersimétrica com o grupo $SU(5)$.

Apêndice A

O integral de caminho em Mecânica Quântica

A.1 Introdução

A formulação usual é dada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|a(t)\right\rangle = H\left|a(t)\right\rangle \tag{A.1}$$

onde

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(Q) \tag{A.2}$$

e

$$[Q, P] = i\hbar \tag{A.3}$$

Esta formulação é equivalente a uma outra definida em termos de integrais de caminho. Para isso baseamo-nos na observação que em mecânica quântica sabemos responder a qualquer pergunta sobre o sistema se soubermos calcular as amplitudes de transição

$$\langle b(t')|a(t)\rangle = \langle b|\, e^{-iH(t'-t)}\,|a\rangle \tag{A.4}$$

São estas amplitudes de transição que são definidas em termos de integrais de caminho. Conforme a representação escolhida para os estados $|a\rangle$ e $|b\rangle$ as expressões para o integral de caminho vêm diferentes. Assim vamos analisar separadamente os casos das representações no espaço das configurações (coordenadas), no espaço de fase e por meio de estados coerentes (espaço de Bargmann-Fock).

A.2 Espaço das configurações

Introduzimos os estados $|q\rangle$ e $|p\rangle$ tais que

$$\begin{aligned} Q\,|q\rangle &= q\,|q\rangle \qquad ; \qquad P\,|p\rangle = p\,|p\rangle \\ \langle q'|q\rangle &= \delta(q'-q) \qquad ; \qquad \langle p'|p\rangle = \delta(p'-p) \\ \langle q|p\rangle &= \langle p|q\rangle^* = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipq} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Então

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i\rangle = \int \mathcal{D}(q) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt L(q,\dot{q})} \tag{A.6}$$

onde $\mathcal{D}$ é uma medida de integração definida pelo limite

$$\mathcal{D}(q) = \lim_{n\to\infty} \prod_1^{n-1} dq_p \left[\frac{nme^{-i\pi/2}}{2\pi(t_f - t_i)}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{A.7}$$

sendo n o número de intervalos em que se fez a partição do intervalo (t_i, t_f). O limite $n \to \infty$ é bastante complicado e só existe prova matemática para certas classes de potenciais. A expressão (A.4) permite uma interpretação da mecânica clássica como limite da mecânica quântica. De facto quando $\hbar \to 0$ a maior contribuição para a amplitude vem das trajectórias que minimizam a ac cão, isto é, as trajectórias clássicas. A mecânica quântica é então vista como o estudo das flutuações à volta da trajectória clássica.

A.2.1 Elementos de matriz de operadores

Usando a propriedade dos integrais de caminho

$$\int \mathcal{D}(q) e^{iS(f,i)} = \int dq(t) \int \mathcal{D}(q) e^{iS(f,t)} \int \mathcal{D}(q) e^{iS(t,i)} \tag{A.8}$$

onde $t_i < t < t_f$, é fácil mostrar que

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | \mathcal{O}(t) | q_i, t_i\rangle &= \int dq' dq'' \int \mathcal{D}(q) e^{iS(q_f,t_f;q'',t)} \\ &\quad \langle q''| \mathcal{O} |q'\rangle \int \mathcal{D}(q) e^{iS(q',t;q_i,t_i)} \end{aligned} \tag{A.9}$$

Então se $\mathcal{O}$ for diagonal no espaço das coordenadas, isto é, se

$$\langle q''| \mathcal{O} |q'\rangle = \mathcal{O}(q')\delta(q'-q'') \tag{A.10}$$

obtemos

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O} | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q)\ e^{iS(f,i)} \mathcal{O}(q(t)) \tag{A.11}$$

A.2.2 Produto ordenado no tempo de operadores

Seja $\mathcal{O}_1(t_1)\mathcal{O}_2(t_2)\cdots\mathcal{O}_n(t_n)$ com $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$. Então é fácil de mostrar que a ordenação no tempo é automática no integral de caminho, isto é,

$$\langle q_f, t_f | \mathcal{O}_1(t_1)\mathcal{O}_2(t_2)\cdots\mathcal{O}_n(t_n) | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}(q) e^{iS(f,i)} \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\cdots\mathcal{O}_n \tag{A.12}$$

Este resultado é particularmente importante, pois permitirá escrever as funções de Green de produtos de operadores ordenados no tempo como simples integrais de caminho de produtos dos equivalentes clássicos desses operadores.

A.2.3 Resultados exactos I: Oscilador harmónico

Para alguns potenciais é possível calcular exactamente o limite introduzido em (A.5). Para esses casos o integral de caminho é portanto perfeitamente bem definido. Esses potenciais não são muitos, mas são particularmente importantes. Para o seguimento interessa-nos discutir dois deles. O primeiro é o oscilador harmónico definido pelo potencial

$$V(Q) = m\frac{\omega^2}{2}Q^2 \tag{A.13}$$

Para este caso obtém-se, (os integrais são gaussianos e por isso podem ser explicitamente calculados)

$$\langle f|i\rangle = \left(\frac{m\omega e^{-i\pi/2}}{2\pi \sin\omega t}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{i\frac{m\omega}{2}\left[(q_f^2 + q_i^2)\cot\omega t - \frac{2q_f q_i}{\sin\omega t}\right]\right\} \tag{A.14}$$

Este resultado vai ser útil adiante.

A.2.4 Resultados exactos II: Força exterior

Consideremos agora uma força exterior tal que o potencial é dado por

$$V(Q) = -QF(t) \tag{A.15}$$

Neste caso obtemos

$$\langle f|i\rangle_F = \left[\frac{me^{-i\pi/2}}{2\pi(t_f - t_i)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{iS(f,i)} \tag{A.16}$$

onde $S(f,i)$ é a acção calculada ao longo da trajectória clássica,

$$\begin{aligned} S(f,i) &= \frac{m}{2}\frac{(q_f-q_i)^2}{t_f-t_i} + \int_{t_i}^{t_f} dt F(t)\left(q_f\frac{t-t_i}{t_f-t_i} + q_i\frac{t_f-t}{t_f-t_i}\right) \\ &+\frac{1}{2m}\int_{t_i}^{t_f}\int_{t_i}^{t_f} dt'dt'' F(t')G(t',t'')F(t'') \end{aligned} \tag{A.17}$$

onde $G(t',t'') = \frac{t't''}{T} - \mathrm{Inf}(t',t'')$ é a função de Green simétrica para o problema $\ddot{q} = F(t)/m$ com as condições na fronteira $G(0,t'') = G(t',0) = 0$.

A.2.5 Teoria das perturbações

A importância do resultado exacto para a força exterior deve-se ao facto que usando esse resultado podemos formalmente resolver o problema dum potencial qualquer. Para isso notemos que a derivação funcional em realação à fonte $F(t)$ faz baixar $Q(t)$. Mais explicitamente

$$\langle f|\, Q(t)\, |i\rangle_F = \frac{\delta}{i\delta F(t)}\ \langle f|i\rangle_F \tag{A.18}$$

onde $\langle|\rangle_F$ significa calculado na presença da fonte exterior (i.e. para o hamiltoniano $H = P^2/2m - QF(t)$). Então para um potencial arbitrário $V(q)$ temos

$$\begin{aligned} \langle f|i\rangle &= \int \mathcal{D}(q) e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right]} \\ &= \exp\left\{-i\int_{t_i}^{t_f} dt V\left[\frac{\delta}{i\delta F(t)}\right]\right\}\langle f|i\rangle_F\Big|_{F=0} \end{aligned} \tag{A.19}$$

Esta expressão formal torna-se muito útil quando a exponencial é expandida em série. Então todos os integrais são do tipo gaussiano e podem ser exactamente executados. Obtemos assim a teoria das perturbações. Claro que só terá significado se houver um parâmetro *pequeno* no potencial. É importante notar que enquanto se faça teoria das perturbações não há qualquer problema com a indefinição matemática do integral de caminho, pois todas as integrações são gaussianas.

A.3 Formulação no espaço de fase

Para este caso obtemos

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = \int \mathcal{D}(p,q) e^{i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[p\dot{q} - h(p,q)\right]} \tag{A.20}$$

onde $h(p,q)$ é o hamiltoniano clássico e a medida é dada pelo limite

$$\mathcal{D}(p,q) = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_1^n dp_s \prod_1^{n-1} dq_r}{(2\pi)^n} \tag{A.21}$$

A fase da exponencial é novamente a acção clássica expressa nas variáveis canónicas p e q. Se $h(p,q)$ depender quadraticamente de p como é usual, pode-se fazer a integração gaussiana em p e a expressão reduz-se à do caso anterior, equação (A.4).

A.4 Formulação no espaço de Bargmann-Fock (estados coerentes)

Nesta representação usamos funções analíticas de variável complexa para descrevermos os operadores a e $a^\dagger$ ($[a, a^\dagger] = 1$). A correspondência é feita do modo seguinte. As funções analíticas geram um despaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle g|f\rangle \equiv \int \frac{dzd\overline{z}}{2\pi i}\, e^{-z\overline{z}}\, \overline{g}(z) f(\overline{z}) \tag{A.22}$$

Os operadores a e $a^\dagger$ são representados neste espaço por

$$\begin{aligned} a &\to \frac{\partial}{\partial z} \\ a^\dagger &\to \overline{z} \end{aligned} \tag{A.23}$$

Dado um estado $|f\rangle$, representado pela função $f(\overline{z})$, a acção do operador A em $|f\rangle$ produz outro estado que também pode ser representado por funções analíticas. Se designarmos por $g(\overline{z})$ essa função temos

$$g(\overline{z}) \equiv \langle \overline{z}|\, A\, |f\rangle \equiv \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i}\, e^{-\xi\overline{\xi}} A(\overline{z},\xi) f(\overline{\xi}) \tag{A.24}$$

onde $A(\overline{z},\xi)$ é o kernel do operador A. Uma representação explicita para o kernel é fácil de obter. Para isso introduzimos os estados $|n\rangle$, definidos por

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\, |0\rangle \tag{A.25}$$

É fácil de verificar (ver Problema A.2) que com a definição de produto interno acima introduzida estes estados são ortonormados, isto é $\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{mn}$.
Então

$$\begin{aligned}
\langle \overline{z}| A |f\rangle &= \sum_{n,m} \frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}} \langle n| A |m\rangle \langle m|f\rangle \\
&= \sum_{n,m} \frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\overline{\xi}} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} f(\overline{\xi}) \\
&= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\overline{\xi}} \left[\sum_{n,m} \frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} \right] f(\overline{\xi}) \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}$$

Portanto

$$A(\overline{z},\xi) \equiv \sum_{n,m} \frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}} A_{n,m} \frac{\xi^m}{\sqrt{m!}} \qquad \text{(A.27)}$$

O kernel de qualquer operador é assim obtido desde que se conheçam os seus elementos de matriz na base $|n\rangle$.

Já vimos como se representam estados e operadores. Vamos ver como representar produtos de operadores. Sejam dois operadores A_1 e A_2 e um estado $|f\rangle$. Seja ainda

$$g(\overline{\eta}) = \langle \overline{\eta}| A_2 |f\rangle = \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\overline{\xi}} A_2(\overline{\eta},\xi) f(\overline{\xi}) \qquad \text{(A.28)}$$

Então

$$\begin{aligned}
\langle \overline{z}| A_1 |g\rangle &= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \; e^{-\xi\overline{\xi}} A_1(\overline{z},\eta) g(\overline{\eta}) \\
&= \int \frac{d\eta d\overline{\eta}}{2\pi i} \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \; e^{-\xi\overline{\xi}} e^{-\eta\overline{\eta}} \; A_1(\overline{z},\eta) A_2(\overline{\eta},\xi) f(\overline{\xi}) \\
&= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \; e^{-\xi\overline{\xi}} \; \left[\int \frac{d\eta d\overline{\eta}}{2\pi i} \; e^{-\eta\overline{\eta}} \; A_1(\overline{z},\eta) A_2(\overline{\eta},\xi) \right] f(\overline{\xi}) \\
&= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \; e^{-\xi\overline{\xi}} \; A_3(\overline{z},\xi) f(\overline{\xi}) \qquad \text{(A.29)}
\end{aligned}$$

Portanto o kernel do operador $A_3 = A_1 A_2$ é obtido por convolução dos kernéis de A_1 e A_2, isto é

$$A_3(\overline{z},\eta) = \int \frac{d\eta d\overline{\eta}}{2\pi i} \; e^{-\eta\overline{\eta}} \; A_1(\overline{z},\eta) A_2(\overline{\eta},\xi) \qquad \text{(A.30)}$$

A.4.1 Forma normal dum operador

Como já sabemos representar estados, operadores e produtos de operadores já temos toos os ingredientes para fazer mecânica quântica neste espaço. Há contudo um outro

assunto que é importante tendo em atenção que pretendemos aplicar este formalismo em teoria quântica dos campos. Trata-se da *forma normal* dum operador[1]. O operador A na sua forma normal é definido por

$$A = \sum_{n,m} A^N_{n,m} \, \frac{a^{\dagger n} a^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \tag{A.31}$$

isto é, os operadores de destruição estão à direita dos operadores de criação. O *kernel normal* é definido por

$$A^N(\overline{z}, z) \equiv \sum_{n,m} \frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}} \, A^N_{n,m} \, \frac{z^m}{\sqrt{m!}} \tag{A.32}$$

isto é, é obtido por subtituição directa dos operadores de destruição por z e dos de criação por $\overline{z}$. Para um operador dado na sua forma normal este é o kernel imediato de obter. É contudo diferente do kernel atrás definido. Para ver a relação entre eles notemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= \sum_n \frac{\overline{z}}{\sqrt{n!}} \, \langle n|f\rangle \\ &= \sum_n \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \, e^{-\xi\overline{\xi}} \, \frac{\overline{z}^n \xi^n}{n!} f(\overline{\xi}) \\ &= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \, e^{-\xi\overline{\xi}} \, e^{\overline{z}\xi} \, f(\overline{\xi}) \end{aligned} \tag{A.33}$$

O kernel $e^{\overline{z}\xi}$ é portanto uma função delta neste espaço. Usando este resultado obtemos

$$\begin{aligned} \langle \overline{z}| \, A \, |f\rangle &= \sum_{n,m} \frac{A^N_{n,m}}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \, \overline{z}^n \, \frac{d^m}{d\overline{z}^m} \, f(\overline{z}) \\ &= \sum_{n,m} \frac{A^N_{n,m}}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}} \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} e^{-\xi\overline{\xi}} \, e^{\overline{z}\xi} \, \overline{z}^n \xi^m f(\overline{\xi}) \\ &= \int \frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i} \, e^{-\xi\overline{\xi}} \, e^{\overline{z}\xi} \, A^N(\overline{z}, \xi) f(\overline{\xi}) \end{aligned} \tag{A.34}$$

donde resulta

$$A(\overline{z}, \xi) = e^{\overline{z}\xi} \, A^N(\overline{z}, \xi) \tag{A.35}$$

[1]Notar que em teoria quântica dos campos tem que se proceder ao ordenamento normal do hamiltoniano para definir o zero da energia.

Esta relação é muito importante pois permite imediatamente escrever o kernel dum operador qualquer uma vez que seja conhecida a sua forma normal. Isto é particularmente útil em teoria quântica dos campos onde o hamiltoniano é dado na sua forma normal.

A.4.2 Operador evolução

Podemos obter agora a expressão para o operador de evolução nesta representação. De acordo com aquilo que acabámos de dizer, para um intervalo infinitesimal, devemos ter para o kernel de U

$$U(\overline{z}, \xi, \Delta t) = e^{\overline{z}\xi} \; e^{-i\Delta t \; h(\overline{z},\xi)} \tag{A.36}$$

onde $h(\overline{z}, \xi)$ é o kernel normal obtido por substituição directa dos operadores $a^\dagger$ e a pelas variáveis complexas $\overline{z}$ e ξ. Notar que quando $\Delta t \to 0$ o kernel do operador de evolução se reduz ao kernel da identidade, $e^{\overline{z}\xi}$, que como vimos é a função δ neste espaço.

Para um intervalode tempo finito $t = t_f - t_i$, dividimos o intervalo em n intervalos

$$\Delta t = \frac{t}{n}$$

$$z_0 \qquad z_1 \qquad z_2 \qquad \cdots \qquad z_{n-1} \qquad z_n \tag{A.37}$$

Então

$$\begin{aligned} U(\overline{z}_1, z_0) &\simeq e^{\overline{z}_1 z_0 - i\Delta t h(\overline{z}_1, z_0)} \\ U(\overline{z}_2, z_1) &\simeq e^{\overline{z}_2 z_1 - i\Delta t h(\overline{z}_2, z_1)} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\ U(\overline{z}_n, z_{n-1}) &\simeq e^{\overline{z}_n z_{n-1} - i\Delta t h(\overline{z}_n, z_{n-1})} \end{aligned} \tag{A.38}$$

Aplicando agora a regra de multiplicação dos kernéis obtemos

$$\begin{aligned} U(\overline{z}_f, t_f; z_i, t_i) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dz_k d\overline{z}_k}{2\pi i} \; \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k \; z_{k-1} \\ - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{z}_k z_k - i \sum_{k=1}^{n} h(\overline{z}_k, z_{k-1}) \Delta t \Big] \end{aligned} \tag{A.39}$$

ou seja

$$U(\overline{z}_f, t_f; z_i, t_i) \equiv \int \mathcal{D}(z, \overline{z}) \; e^{\frac{1}{2} \; (\overline{z}_f z_f + \overline{z}_i z_i) + i \int_{t_i}^{t_f} \left[\frac{1}{2i} (\dot{\overline{z}} z - \overline{z} \dot{z}) - h(\overline{z}, z) \right] dt} \tag{A.40}$$

Nesta expressão $\overline{z}_f(t_f)$ e $z_i(t_i)$ são fixados pelas condições fronteiras mas $\overline{z}_f(t_i)$ e $z_i(t_f)$ são arbitrários. A fase da exponencial é novamente a acção, agora escrita nas variáveis complexas z e $\overline{z}$. Para ver isso basta lembrar que

$$\frac{1}{2}(pdq + qdp) = \frac{1}{2i}(zd\overline{z} - \overline{z}dz) \tag{A.41}$$

A.4.3 Resultados exactos I: Oscilador harmónico

Também aqui vamos analisar os casos importantes em que há resultados exactos, nomeadamente o oscilador hamónico e o caso das fontes externas. Comecemos pelo oscilador harmónico. O hamiltoniano é dado por

$$H_0 = \omega\ a^\dagger a \tag{A.42}$$

Trata-se portanto dum caso em que o hamiltoniano é dado na forma normal. Este problema pode ser resolvido exactamente. Temos

$$\begin{aligned} U(\overline{z}_f, z_i, t) &= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dz_k d\overline{z}_k}{2\pi i}\ \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k\ z_{k-1} \\ &\qquad - \sum_{k=1}^{n-1} \overline{z}_k z_k - i\omega \frac{t}{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{z}_k z_{k-1}\Big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \prod_{k=1}^{n-1} \frac{dz_k d\overline{z}_k}{2\pi i}\ e^{\left[-\overline{X}AX + \overline{X}B + \overline{B}X\right]} \end{aligned} \tag{A.43}$$

onde

$$X = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{X} = (\overline{z}_1, \overline{z}_2, \cdots, \overline{z}_{n-1}) \tag{A.44}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} z_0 a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \overline{B} = (0, 0, \cdots, 0, z_n a) \tag{A.45}$$

com $z_0 = z_i$ e $z_n = z_f$. A matriz A de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & 0 & -a & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a & 1 \end{bmatrix} \tag{A.46}$$

onde se definiu

$$a \equiv 1 - i\hbar\omega\frac{t}{n} \tag{A.47}$$

As $(n-1)$ integrações gaussianas podem ser facilmente feitas usando o resultado (ver Problema A.3),

$$\int \prod \frac{dz_k d\overline{z}_k}{2\pi i}\; e^{-\overline{z}Az+\overline{u}z+\overline{z}u} = (\det A)^{-1}\; e^{\overline{u}A^{-1}u} \tag{A.48}$$

obtemos então

$$\begin{aligned} U_0(\overline{z}_f, z_i; t) &= \lim_{n\to\infty}\left[(\det A)^{-1}\; e^{\overline{B}A^{-1}B}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[(\det A)^{-1}\; e^{\overline{z}_f z_i a^2 (A^{-1})_{n-1,1}}\right] \end{aligned} \tag{A.49}$$

É fácil de verificar que para a matriz A se tem

$$(A^{-1})_{k,m} = \begin{cases} a^{k-m} & \text{se } k \geq m \\ 0 & \text{se } k < m \end{cases} \tag{A.50}$$

e portanto

$$\det A = 1 \tag{A.51}$$

e

$$A^{-1}_{n-1,1} = (-1)^n (-a)^{n-2} \tag{A.52}$$

donde se conclui que

$$\lim_{n\to\infty} a^2 (A_{-1})_{n-1,1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{i\omega t}{n}\right)^n = e^{-i\omega t} \tag{A.53}$$

Obtemos então finalmente

$$U_0(\overline{z}_f, z_i; t) = \exp\left\{\overline{z}_f z_i e^{-i\omega t}\right\} \tag{A.54}$$

Podemos verificar que este resultado é da forma e^{iS} onde S é a acção calculada ao longo da trajectória clássica. De facto a estacionaridade do expoente da exponencial dá

$$\begin{aligned}
\delta\left\{\frac{1}{2}(\overline{z}_f z(t_f)+\overline{z}(t_i)z_i) \;+\int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{\dot{\overline{z}}z-\overline{z}\dot{z}}{2}-i\omega\overline{z}z\right]dt\right\}\\
=\frac{1}{2}\overline{z}_f\delta z(t_f)+\frac{1}{2}z_i\delta\overline{z}(t_i)-\frac{1}{2}\overline{z}_f\delta z(t_f)-\frac{1}{2}z_i\delta\overline{z}(t_i)\\
+\int_{t_i}^{t_f}\left[\delta z(\dot{\overline{z}}-i\omega\overline{z})-\delta\overline{z}(\dot{z}+i\omega z)\right]dt
\end{aligned} \tag{A.55}$$

pois $\delta\overline{z}_f=\delta z_i=0$. As equações de movimento são portanto

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{\overline{z}}-i\omega\overline{z}=0\\ \\ \dot{z}+i\omega z=0\end{array}\right. \quad \text{com} \quad \left\{\begin{array}{l}\overline{z}(t_f)=z_f\\ \\ z(t_i)=z_i\end{array}\right. \tag{A.56}$$

que têm como solução

$$\left\{\begin{array}{l}z(t)=z_i\;e^{i\omega(t_i-t)}\\ \\ \overline{z}(t)=\overline{z}_f\;e^{i\omega t-t_f)}\end{array}\right. \tag{A.57}$$

Substituindo estas soluções no expoente obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[\overline{z}_f z(t_f)+z_i\overline{z}(t_i)\right] \;&+\; \int_{t_i}^{t_f}\left[\frac{1}{2}(\dot{\overline{z}}z-\overline{z}\dot{z})-i\omega\overline{z}z\right]dt\\
&=\; \overline{z}_f z_i\;e^{i\omega(t_i-t_f)}\\
&=\; \overline{z}_f z_i\;e^{-i\omega t}
\end{aligned} \tag{A.58}$$

para $t\equiv t_f-t_i$, como queríamos mostrar.

Um outro resultado importante do oscilador harmónico é que a evolução dum estado sob a acção de $H_0=\omega a^\dagger a$ é particularmente simples neste espaço das funções de variável complexa. Seja $f(\overline{z})$ a representação do estado $|f\rangle$. A evolução debaixo de H_0 é dada por

$$\begin{aligned}
U_0(t)f(\overline{z}) \;&=\; \int\frac{d\xi d\overline{\xi}}{2\pi i}\;e^{-\xi\overline{\xi}}\;e^{\overline{z}\xi e^{-i\omega t}}\;f(\overline{\xi})\\
&=\; f(\overline{z}e^{-i\omega t})
\end{aligned} \tag{A.59}$$

isto é, é reduzida à multiplicação por $e^{-i\omega t}$

$$\overline{z} \to \overline{z}\, e^{-i\omega t} \tag{A.60}$$

Isto é importante para descrever a matriz S, em que os estados assimptóticos evoluem de acordo com o hamiltoniano livre.

A.4.4 Resultados exactos I: Oscilador harmónico

Seja o hamiltoniano

$$H = \omega a^\dagger a - f(t)a^\dagger - \overline{f}(t)a \tag{A.61}$$

Este hamiltoniano também conduz a um resultado exacto. Usando os mesmos métodos que foram utilizados para o oscilador harmónico pode-se mostrar que neste caso também temos

$$U(\overline{z}_f, z_i; t) = e^{iS(f,i)} \tag{A.62}$$

onde $S(f,i)$ é a acção calculada ao longo das trajectórias clássicas (ver Problema A.1).

A.5 Sistemas de fermiões

Vamos generalizar os resultados anteriores ao caso de sistemas de fermiões. Começamos com sistemas com dois níveis com os operadores $a^\dagger$ e a tais que

$$\left\{a^\dagger, a\right\} = 1 \qquad ; \qquad a^2 = a^{2\dagger} = 0 \tag{A.63}$$

Para efectuar a construção anterior vamos tentar representar estes operadores num espaço de Hilbert de funções analíticas. Isto é possível se considerarmos funções (de facto polinómios) com coeficientes complexos em duas variáveis que anticomutam η e $\overline{\eta}$, designadas por variáveis de Grassmann e que obedecem a

$$\eta\overline{\eta} + \overline{\eta}\eta = 0 \qquad ; \qquad \overline{\eta}^2 = \eta^2 = 0 \tag{A.64}$$

Então qualquer função $P(\eta, \overline{\eta})$ terá a forma

$$P(\eta, \overline{\eta}) = p_0 + p_1\overline{\eta} + \widetilde{p}_1\eta + p_{12}\eta\overline{\eta} \tag{A.65}$$

A.5.1 Derivação

Neste espaço a derivação é definida por (as derivadas são esquerdas)

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \widetilde{p}_1 + p_{12}\overline{\eta}$$
$$\frac{\partial P}{\partial \overline{\eta}} = p_1 - p_{12}\eta \tag{A.66}$$

De entre todas as funções nas variáveis η e $\overline{\eta}$ definimos o subconjunto das *funções analíticas* tais que

$$\frac{\partial}{\partial \eta} f = 0 \tag{A.67}$$

isto é as funções analíticas têm a forma

$$f = f_0 + f_1\overline{\eta} \tag{A.68}$$

A.5.2 Produto interno

No espaço das funções analíticas define-se o produto interno

$$(g, f) = \overline{g}_0 \ f_0 + \overline{g}_1 \ f_1 \tag{A.69}$$

este produto interno pode ser representado por um integral desde que definamos a integração convenientemente (ver equação (A.74)) .

A.5.3 Integração

A integração nas variáveis de Grassmann é definida pelas relações

$$\int d\eta \ \eta = \int d\overline{\eta} \ \overline{\eta} = 1$$
$$\int d\eta \ 1 = \int d\overline{\eta} \ 1 = 0 \tag{A.70}$$

Notar que a integração assim definida é semelhante à derivação. De facto[2]

[2]Estamos a usar a notação compacta

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial \eta} \qquad ; \qquad \overline{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}} \tag{A.71}$$

$$\int d\eta\ P = \partial P \qquad ; \qquad \int d\overline{\eta}\ P = \overline{\partial} P$$

$$\int d\overline{\eta} d\eta\ P = \overline{\partial}\partial P \tag{A.72}$$

Devido à forma da equação A.62 é claro que se tem

$$\overline{\partial}^2 = \partial^2 = 0 \tag{A.73}$$

e que portanto o integral duma derivada é zero. Consideremos agora a mudança de variáveis nos integrais. Seja

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \overline{\eta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \overline{\xi} \end{pmatrix} \tag{A.74}$$

Então obtemos

$$\begin{aligned} \eta\overline{\eta} &= (A_{11}\xi + A_{12}\overline{\xi})(A_{21}\xi + A_{22}\overline{\xi}) \\ &= (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\xi\overline{\xi} \\ &= \det A\ \xi\overline{\xi} \end{aligned} \tag{A.75}$$

Pelo que

$$\int d\overline{\eta} d\eta P(\eta, \overline{\eta}) = \int d\overline{\xi} d\xi (\det A)^{-1} Q(\xi, \overline{\xi}) \tag{A.76}$$

onde $Q(\xi, \overline{\xi})$ é o polinómio que se obtém de $P(\eta, \overline{\eta})$ por substituição de η e $\overline{\eta}$ por ξ e $\overline{\xi}$.
Finalmente notemos que se definirmos a conjugação complexa de f por

$$\overline{f} = \overline{f}_0 + \overline{f}_1 \eta \tag{A.77}$$

então podemos encontrar uma representação integral para o produto interno dada por

$$(g, f) \equiv \int d\overline{\eta} d\eta\ e^{-\overline{\eta}\eta}\ \overline{g}\ f \tag{A.78}$$

Para vermos isso calculemos o integral. Obtemos

$$\begin{aligned} &\int d\overline{\eta} d\eta\ e^{-\overline{\eta}\eta}\ \overline{g}\ f \\ &\qquad = \int d\overline{\eta} d\eta (1 - \overline{\eta}\eta)(\overline{g}_0 + \overline{g}_1\eta)(f_0 + f_1\overline{\eta}) \end{aligned}$$

$$= \overline{g}_0 f_0 + \overline{g}_1 f_1$$
$$= (g, f) \tag{A.79}$$

A.5.4 Representação de operadores e seus kernéis

Os operadores a e $a^\dagger$ podem ser representados por

$$a \to \overline{\partial}$$
$$a^\dagger \to \overline{\eta} \tag{A.80}$$

É fácil de ver que com estas definições temos $a^2 = a^{\dagger 2} = 0$ e $aa^\dagger + a^\dagger a = 1$.

Consideremos agora os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle = a^\dagger |0\rangle$ a que correspondem as funções 1 e $\overline{\eta}$. Então podemos encontrar o kernel de qualquer operador

$$A = \sum_{n,m} |n\rangle \, A_{n,m} \, \langle m| \tag{A.81}$$

De facto

$$\begin{aligned}
(Af)\overline{\eta} &= \sum_{n,m} \overline{\eta}^n A_{n,m} \langle m|f\rangle \\
&= \int d\overline{\xi} d\xi \; e^{\overline{\xi}\xi} \sum_{n,m} \overline{\eta}^n \; A_{n,m} \; \xi^m \; f(\overline{\xi}) \\
&= \int d\overline{\xi} d\xi \; e^{-\overline{\xi}\xi} \; A(\overline{\eta}, \xi) \; f(\overline{\xi})
\end{aligned} \tag{A.82}$$

onde

$$A(\overline{\eta}, \xi) \equiv \sum_{n,m} \overline{\eta}^n \; A_{n,m} \; \xi^m \qquad ; \qquad n, m = 0, 1 \tag{A.83}$$

Para o produto de operadores é fácil de ver que temos como anteriormente

$$A_1 A_2(\overline{\eta}, \eta) = \int d\overline{\xi} d\xi \; e^{-\overline{\xi}\xi} \; A_1(\overline{\eta}, \xi) \; A_2(\overline{\xi}, \eta) \tag{A.84}$$

A.5.5 Forma normal dos operadores

Seja um operador definido por

$$A = \sum_{n,m} |n\rangle \, A_{n,m} \, \langle m| = \sum_{n,m} a^{\dagger n} \, |0\rangle \, \langle 0| \, a^m \; A_{n,m} \tag{A.85}$$

O projector do estado base é

$$|0\rangle \, \langle 0| =: e^{-a^\dagger a} : \tag{A.86}$$

logo

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n,m} A_{n,m} : a^{\dagger n} \; e^{-a^\dagger a} \; a^m : \\ &\equiv \sum_{n,m} A^N_{n,m} \; a^{\dagger n} a^m \end{aligned} \tag{A.87}$$

O *kernel normal* é então definido pela substituição $a^\dagger \to \overline{\eta}$ e $a \to \eta$, isto é

$$A^N(\overline{\eta}, \eta) = \sum_{n,m} A^N_{n,m} \; \overline{\eta}^n \eta^m \tag{A.88}$$

O kernel da identidade é $e^{\overline{\eta}\eta}$, isto é

$$f(\overline{\eta}) = \int d\overline{\xi} d\xi \; e^{-\overline{\xi}\xi + \overline{\eta}\xi} \; f(\overline{\xi}) \tag{A.89}$$

o que permite obter a relação entre o kernel usual e kernel normal. De facto

$$\begin{aligned} \left[a^{\dagger n} a^m f\right] \overline{\eta} &= \overline{\eta}^n \; \frac{\partial^m}{\partial \overline{\eta}^m} f(\overline{\eta}) \\ &= \int d\overline{\xi} d\xi \; e^{-\overline{\xi}\xi} \; e^{\overline{\eta}\xi} \; \overline{\eta}^n \xi^m \; f(\overline{\xi}) \end{aligned} \tag{A.90}$$

o que permite escrever a relação procurada

$$A(\overline{\eta}, \eta) = e^{\overline{\eta}\eta} \; A^N(\overline{\eta}, \eta) \tag{A.91}$$

Finalmente seguindo um raciocínio análogo ao do sistema de bosões é fácil obter o kernel do operador de evolução

$$U(\overline{\eta}_f, t_f; \eta_i, t_i) = \int \mathcal{D}(\overline{\eta}, \eta) \; e^{\frac{1}{2}(\overline{\eta}_f \eta_f + \overline{\eta}_i \eta_i)} \; e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2i}(\overline{\eta}\dot{\eta} - \dot{\overline{\eta}}) - h(\overline{\eta}, \eta)\right]} \tag{A.92}$$

Problemas do Apêndice A

Problemas Apêndice A

A.1 Mostre o resultado da equação A.59. Em particular mostre que

$$\begin{aligned} iS(f,i) &= \overline{z}_f\ e^{-i\omega(t_f-t_i)}\ z_i + i\int_{t_i}^{t_f} dt\left[\overline{z}_f\ e^{-i\omega(t_f-t)}\ f(t) + \overline{f}(t)\ e^{-i\omega(t-t_i)}\ z_i\right] \\ &\quad - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt'\ \overline{f}(t)\ e^{-i\omega(t-t')}\ f(t')\theta(t-t') \end{aligned} \tag{A.93}$$

Este resultado é útil em muitas aplicações (ver equação B.9).

A.2 Mostre que os representantes dos estados $|n\rangle$ e $|m\rangle$, $\frac{\overline{z}^n}{\sqrt{n!}}$ e $\frac{\overline{z}^m}{\sqrt{m!}}$, respectivamente, são ortonormados, isto é, $\langle f_n|f_m\rangle = \delta_{n,m}$.

A.3 Mostrar que para integrais gaussianos se tem

$$\int \prod \frac{dz_k d\overline{z}_k}{2\pi i}\ e^{-\overline{z}Az+\overline{u}z+\overline{z}u} = (\det A)^{-1}\ e^{\overline{u}A^{-1}u} \tag{A.94}$$

Notar que o expoente é o valor no ponto de estacionaridade.

A.4 Mostrar que para integrais gaussianos se obtém

$$\begin{aligned} &\int \prod_1^n d\overline{\eta}_k d\eta_k\ e^{\sum \overline{\eta}_k A_{k\ell}\eta_\ell + \sum(\overline{\eta}_k\xi_k + \overline{\xi}_k\eta_k)} \\ &\qquad = \det A\ e^{\sum \overline{\xi}_k (A^{-1})_{k\ell}\xi_\ell} \end{aligned} \tag{A.95}$$

Comparar com o resultado do problema A.3.

Apêndice B

O integral de caminho em teoria quântica dos campos

B.1 Quantificação via integral de caminho

Vamos aqui generalizar os resultados do apêndice A para o caso de sistemas com um número infinito de graus de liberdade que são os que interessam em teoria quântica dos campos. Para evitar complicações com índices e com problemas decorrentes da invariância de gauge vamos estudar o caso do campo escalar cuja acção clássica em presença duma fonte exterior é

$$S(\phi, J) = S_0(\phi, J) + \int d^4x \; V(x) \tag{B.1}$$

onde

$$S_0(\phi, J) = \int d^4x \; \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\; m^2\phi^2 + J\phi\right] \tag{B.2}$$

é a acção do campo escalar livre acoplada a uma fonte exterior. Vamos primeiro estudar este caso, isto é, supor que $V = 0$. O caso geral é fácil, de obter a partir deste, como veremos mais à frente. O hamiltoniano é dado por

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi_{\text{op}}^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi_{\text{op}}\right)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_{\text{op}}^2 - J\phi_{\text{op}}\right] \tag{B.3}$$

e podemos introduzir os operadores $a(k)$ e $a^\dagger(k)$ tais que num certo instante

$$\phi_{\text{op}} = \int \tilde{dk} \left[a(k)\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a^\dagger(k)\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \tag{B.4}$$

e

$$\pi_{\text{op}} = -i \int \tilde{dk} \left[a(k)\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a^\dagger(k)\; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \omega(k) \tag{B.5}$$

então

$$H = \int \tilde{dk} \left[\omega(k) a^\dagger(k) a(k) - f(t,\vec{k}) a^\dagger(k) - \overline{f}(t,\vec{k}) a(k) \right] \tag{B.6}$$

onde introduzimos a transformada de fourier espacial da fonte,

$$f(t,\vec{k}) = \int d^3x \; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \; j(t,\vec{x}) \tag{B.7}$$

e onde definimos

$$\tilde{dk} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) \tag{B.8}$$

usando os resultados do problema A.1 podemos escrever imediatamente o kernel do operador de evolução

$$\begin{aligned} U(\overline{z}_f, t_f; z_i, t_i) \;=\; & \exp\Bigg\{ \int \tilde{dk} \Bigg[\overline{z}_f(k) \; e^{-i\omega(k)(t_f - t_i)} \; z_i(k) \\ & + i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\overline{z}_f(k) \; e^{-i\omega(k)(t_f - t)} \; f(t,\vec{k}) + \overline{f}(t,\vec{k}) \; e^{-i\omega(k)(t - t_i)} \; z_i(k) \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \; \overline{f}(t,\vec{k}) \; e^{-i\omega(k)(t-t')} \; f(t',\vec{k}) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{B.9}$$

A matriz S é então definida como o limite

$$\lim_{-t_i, t_f \to \infty} e^{it_f H_0} \; U(t_f, t_i) \; e^{-it_i H_0} \tag{B.10}$$

onde H_0 é obtido a partir de H fazendo $J = 0$. Na representação que estamos a usar a acção de e^{-itH_0} é uma simples multiplicação (ver eq. A.60).

$$\overline{z} \to \overline{z} \; e^{-i\omega t} \tag{B.11}$$

Portanto o kernel da matriz S é

$$\begin{aligned} S(\overline{z}_f, z_i) \;=\; & \lim_{-t_i, t_f \to \infty} \exp\left[\int \tilde{dk} \overline{z}_f(k) z_i(k) \right] \; \exp\Bigg\{ \int \tilde{dk} \Bigg[\\ & i \int_{t_i}^{t_f} \left[\overline{z}_f(k) \; e^{i\omega(k)t} \; f(t,\vec{k}) + \overline{f}(t,\vec{k}) \; e^{-i\omega(k)t} z_i(k) \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \overline{f}(t,\vec{k}) \; e^{-i\omega(k)(t-t')} \; f(t',\vec{k}) \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{B.12}$$

O primeiro factor é aquilo que é necessário para passar do kernel usual para o kernel normal. O restante pode ser interpretado se definirmos

$$\phi_{\text{as}} \equiv \int \tilde{dk} \left[z_i(k) \; e^{-ik\cdot x} + \overline{z}_f(k) \; e^{ik\cdot x} \right] \tag{B.13}$$

Como $\overline{z}_f$ não é o complexo conjugado de z_i então $\phi_{\rm as}$ é dado em termos de condições na fronteira com frequências positivas para $t \to -\infty$ e frequências negativas para $t \to \infty$. Estas são precisamente as condições na fronteira de Feynman. Com estas convenções e notações obtemos para o primeiro termo

$$\begin{aligned}
&\int \tilde{dk} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\overline{z}_f(k)\ e^{i\omega(k)t}\ f(t,\vec{k}) + \overline{f}(t,\vec{k})\ e^{-i\omega(k)t}\ z_i(k)\right] \\
&= \int d^4x \int \tilde{dk} J(x) \left[\overline{z}_f e^{i\omega(k)t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} + z_i(k)\ e^{-i\omega(k)t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \\
&= \int d^4x J(x) \phi_{\rm as}(x) \qquad \text{(B.14)}
\end{aligned}$$

e para o segundo

$$\begin{aligned}
&\int \tilde{dk} \int dt \int dt'\ \overline{f}(t,\vec{k})\ e^{-i\omega(k)(t-t')}\ f(t',\vec{k}) \\
&= \int d^4x d^4x' J(x) J(x') \int \tilde{dk}\ e^{-i\omega(k)(t-t') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&= \int d^4x d^4x'\ J(x) G_F(x-x') J(x') \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
&\int \tilde{dk}\ e^{-i\omega(k)(t-t') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&\qquad = \int \tilde{dk}\ e^{-i\omega(k)(t-t') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\ \theta(t-t') \\
&\qquad\quad + \int \tilde{dk}\ e^{i\omega(k)(t-t') + i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\ \theta(t'-t) \\
&\qquad = i \int d^4k\ e^{-ik\cdot(x-x')}\ \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
&\qquad = G_F(x-x') \qquad \text{(B.16)}
\end{aligned}$$

Notar que as condições na fronteira mistas conduzem ao propagador de Feynman. Podemos portanto finalmente escrever o *kernel normal* da matriz S na presença da fonte J,

$$S^N(\overline{z}_f, z_i)|_J = e^{i\int d^4x\ j(x)\phi_{\rm as}(x)}\ e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4x'\ J(x) G_F^0(x-x') J(x')} \qquad \text{(B.17)}$$

Para se obter o operador S substituimos $\phi_{\rm as}$ por $\phi_{\rm op}$ e fazemos o ordenamento normal, isto é

$$S_0(J) =: e^{i\int d^4x\ J(x)\phi_{\rm op}(x)} :\ e^{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4x'\ J(x)G_F^0(x-x')J(x')} \tag{B.18}$$

Como o funcional gerador das funções de green é $\langle 0|S_0(J)|0\rangle$ obtemos imediatamente

$$Z_0(J) = e^{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4x' J(x)G_F^0(x-x')J(x')} \tag{B.19}$$

Este resultado permite resolver o problema de qualquer potencial $V(x)$. De facto é fácil de mostrar que no caso geral os kernéis estão relacionadoss por

$$S^N = \exp\left[-i\int d^4xV\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\ S^N(J)|_{J=0} \tag{B.20}$$

e o operador S é

$$S =: e^{\int d^4xJ(x)\phi_{\rm op}(x)} :\ \exp\left[-i\int d^4x\ V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\ Z_0(J)|_{J=0} \tag{B.21}$$

ou seja

$$Z(J) = \exp\left[-i\int d^4x\ V\left(\frac{\delta}{i\delta J(x)}\right)\right]\ Z_0(J) \tag{B.22}$$

com

$$Z_0(J) = e^{-\frac{1}{2}\int d^4xd^4x'\ J(x)G_F^0(x-x')J(x')} \tag{B.23}$$

Estas expressões permitem calcular qualquer função de green com as regras usuais da teoria das perturbações. A quantificação usando os integrais de caminho conduziu aos mesmos resultados (em teoria das perturbações) que a quantificação canónica. As expressões para os funcionais geradores embora dêem resultados perturbativos duma forma imediata não são as mais úteis quando estamos interessados em encontrar resultados válidos para além da teoria das perturbações. Para esses casos (identidades de Ward, etc) é mais útil ter uma expressão formal em termos dum integral de caminho. É isso que vamos agora estudar.

B.2 Representação dos funcionais geradores por integrais de caminho

O ponto de partida é a expressão para o kernel da matriz S,

$$\begin{aligned} S(\overline{z}_f, z_i) \ &= \lim_{-t_i,t_f\to\infty}\int \mathcal{D}(\overline{z},z)\ e^{\frac{1}{2}\int \tilde{d}k[\overline{z}(k,t_f)z(k,t_f)+\overline{z}(k,t_i)z(k,t_i)]} \\ &\qquad \exp\left\{i\int_{t_i}^{t_f} dt\int \tilde{d}k\left[\frac{1}{2i}(\dot{\overline{z}}(k,t)z(k,t)-\overline{z}(k,t)\dot{z}(k,t))\right.\right. \end{aligned}$$

$$-\omega(k)\overline{z}(k,t)z(k,t) - V(\overline{z},z)\Big]\Big\} \quad \text{(B.24)}$$

com as condições na fronteira[1]

$$\begin{cases} \overline{z}(k,t_f) = \overline{z}_f(k)\ e^{i\omega t_f} \\ \\ z(k,t_i) = z_i(k)\ e^{-i\omega t_i} \end{cases} \quad \text{(B.25)}$$

Em vez das variáveis $z(k,t)$ e $\overline{z}(k,t)$ vamos introduzir os campos clássicos $\phi(\vec{x},t)$ e $\pi(\vec{x},t)$ definidos por

$$\phi(\vec{x},t) = \int \tilde{dk}\left[z(k,t)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \overline{z}(k,t)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \quad \text{(B.26)}$$

e

$$\pi(\vec{x},t) = -i\int \tilde{dk}\ \omega(k)\left[z(k,t)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - \overline{z}(k,t)\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\right] \quad \text{(B.27)}$$

Estas fórmulas são obviamente sugeridas pelas relações entre ϕ_{op}, π_{op} e $a(k)$, $a^\dagger(k)$ expressas nas equações B.4 e B.5, só que aqui não se trata de operadores mas sim de campos clássicos. Comecemos por escrever a acção em termos das novas variáveis,

$$\begin{aligned} &\int_{t_i}^{t_f} dt \int \tilde{dk}\left[\frac{1}{2i}(\dot{\overline{z}}(k,t)z(k,t) - \overline{z}(k,t)\dot{z}(k,t))\right. \\ &\qquad\qquad \left. -\omega(k)\overline{z}(k,t)z(k,t) - V(\overline{z},z)\right] \\ &= \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt\left[\frac{1}{2}(\pi\partial_0\phi - \partial_0\pi\phi) - \frac{1}{2}\pi^2\right. \\ &\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}(\partial_k\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)\right] \end{aligned} \quad \text{(B.28)}$$

Introduzimos agora novas variáveis $\phi_1(\vec{x},t)$ e $\pi_1(\vec{x},t)$ definidas do modo seguinte

$$\begin{cases} \phi(\vec{x},t) \equiv \phi_{\text{as}}(\vec{x},t) + \phi_1(\vec{x},t) \\ \\ \pi(\vec{x},t) \equiv \partial_0\phi(\vec{x},t) + \phi_1(\vec{x},t) \end{cases} \quad \text{(B.29)}$$

onde

$$\phi_{\text{as,in}}(\vec{x},t) = \int \tilde{dk}\left[\overline{z}_{\text{in}}(k)\ e^{ik\cdot x} + z_{\text{in}}(k)\ e^{-ik\cdot x}\right] \quad \text{(B.30)}$$

e

$$\phi_{\text{as,out}}(\vec{x},t) = \int \tilde{dk}\left[\overline{z}_{\text{out}}(k)\ e^{ik\cdot x} + z_{\text{out}}(k)\ e^{-ik\cdot x}\right] \quad \text{(B.31)}$$

[1] Não há restrições em $\overline{z}(k,t_i)$ e $z(k,t_f)$.

onde $in \equiv t \to -\infty$ e $out \equiv t \to +\infty$ com

$$\begin{cases} \overline{z}_{\text{out}}(k) \equiv \overline{z}_f(k) \\ \\ z_{\text{in}}(k) \equiv z_i(k) \end{cases} \tag{B.32}$$

O campo ϕ_{as} tem portanto as condições fronteira apropriadas para o problema e satisfaz à equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\phi_{\text{as}} = 0 \tag{B.33}$$

Escrevemos a acção nas novas variáveis

$$\begin{aligned}
&\int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{1}{2}(\pi\partial_0\phi - \partial_0\pi\phi) - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\partial_k\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi)\right] \\
&\quad = \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi\phi\right]_{t_i}^{t_f} \\
&\quad + \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\pi\partial_0\phi - \frac{1}{2}(\pi_1^2 + 2\pi\partial_0\phi - (\partial_0\phi)^2) - \frac{1}{2}(\partial_k\phi_{\text{as}})^2 - \frac{1}{2}(\partial_k\phi_1)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\partial_k\phi_{\text{as}}\partial_k\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_{\text{as}}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - m^2\phi_{\text{as}}\phi_1 - V(\phi)\right] \\
&= \int d^3x \left[-\frac{1}{2}\pi\phi\right]_{t_i}^{t_f} \\
&\quad + \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}(\partial_0\phi_{\text{as}})^2 + \partial_0\phi_{\text{as}}\partial_0\phi_1 + \frac{1}{2}(\partial_0\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial_k\phi_{\text{as}})^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\frac{1}{2}(\partial_k\phi_1)^2 - \partial_k\phi_{\text{as}}\partial_k\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_{\text{as}}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - m^2\phi_{\text{as}}\phi_1 - V(\phi)\right] \\
&= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\partial_0\phi_{\text{as}}\phi_{\text{as}} + \partial_0\phi_{\text{as}}\phi_1 - \frac{1}{2}\pi\phi\right]_{t_i}^{t_f} \\
&\quad + \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - V(\phi)\right] \\
&= \int d^3x \left[\partial_0\phi_{\text{as}}\phi - \frac{1}{2}\partial_0\phi_{\text{as}}\phi_{\text{as}} - \frac{1}{2}\pi\phi\right]_{t_i}^{t_f} \\
&\quad + \int d^3x \int_{t_i}^{t_f} dt \left[-\frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - V(\phi)\right]
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Vemos que no segundo termo as variáveis ϕ_1 e π_1 estão separadas e π_1 aparece quadraticamente. Isto permitirá eliminar π_1 como veremos no seguimento. Analisemos contudo primeiro o termo que tem as condições na fronteira. Usando as definições de ϕ_{as}, ϕ e π podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& i\int d^3x\left[\partial_0\phi_{\rm as}\phi-\frac{1}{2}\partial_0\phi_{\rm as}\phi_{\rm as}-\frac{1}{2}\pi\phi\right]_{t_i}^{t_f} \\
&= \int \tilde{dk}\left\{\overline{z}_f(k)z_i(k)-\frac{1}{2}[\overline{z}(k,t_f)z(k,t_f)+\overline{z}(k,t_i)z(k,t_i)]\right. \\
&\qquad \left.-\frac{1}{4}[z(k,t_f)-z_i(k)\ e^{-i\omega t_f}]^2-\frac{1}{4}[\overline{z}(k,t_i)-\overline{z}_f(k)\ e^{i\omega t_i}]^2\right\} \qquad \text{(B.35)}
\end{aligned}
$$

Nesta expressão o primeiro termo dá a passagem do kernel usual para o kernel normal, o segundo cancela exactamente o termo na fronteira na definição inicial de $S(\overline{z}_f, z_i)$ e os últimos têm que ser estudados em detalhe. Reunindo tudo até este ponto a expressão do *kernel normal* da matriz S é

$$
\begin{aligned}
S^N(\phi_{\rm as}) \;=\; & \lim_{-t_i,t_f\to\infty}\int \mathcal{D}(\phi,\pi)\exp\left\{-\frac{1}{4}\int \tilde{dk}\left[\left(z(k,t_f)-z_i(k)\ e^{-i\omega t_f}\right)^2\right.\right. \\
& \left.\left.+\left(\overline{z}(k,t_i)-z_f(k)\ e^{i\omega t_i}\right)^2\right]\right\} \\
& \exp\left\{\int d^3x\int_{t_i}^{t_f}dt\left[-\pi_1^2+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1-\frac{1}{2}m^2\phi_1^2-V(\phi)\right]\right\} \qquad \text{(B.36)}
\end{aligned}
$$

Esta expressão já está próxima do resultado final. Falta só mostrar que os termos dentro da primeira exponencial tendem para zero quando $-t_i, t_f \to \infty$. Esta é a parte mais delicada do argumento. Vamos expô-lo por passos: *i) Funções rapidamente decrescentes*

Queremos que $I(t) = \int d^3x\ \pi_1^2(\vec{x},t)$ seja integrável. Dizemos então que funções como $\pi_1(\vec{x},t)$ são rapidamente decrescentes (RD) quando $|t|\to\infty$.

ii) Informação sobre $\overline{z}_{1,\rm out}(k,t)$ e $z_{1,\rm in}(k,t)$

Da definição $\phi = \phi_{\rm as} + \phi_1$ resultam as definições

$$
\left\{\begin{array}{l} z(k,t) = z_i(k)\ e^{-i\omega t} + z_1(k,t) \\ \\ \overline{z}(k,t) = \overline{z}_f(k)\ e^{i\omega t} + \overline{z}_1(k,t) \end{array}\right. \qquad \text{(B.37)}
$$

As condições na fronteira dizem-nos que $\overline{z}_{1,\rm out}(k,t)$ e $z_{1,\rm in}(k,t)$ são funções RD quando $t\to+\infty$ e $t\to-\infty$ respectivamente, mas não nos dizem nada sobre $\overline{z}_{1,\rm in}$ e $z_{1,\rm out}$, que são precisamente os limites que precisamos.

iii) Informação sobre os limites $z_{1,\rm out}$ e $\overline{z}_{1,\rm in}$

Informação sobre os limites $z_{1,\rm out}$ e $\overline{z}_{1,\rm in}$ obtém-se a partir do seguinte raciocínio,

$$
\pi_1 \;=\; \pi - \partial_0\phi
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \tilde{dk} \left\{ [i\omega(k)\overline{z}(k,t) - \partial_0 \overline{z}(k,t)] \; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - [i\omega(k) z(k,t) + \partial_0 z(k,t)] \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right\} \\
&\equiv -\int \tilde{dk} \left[\overline{z}_2(k,t) \; e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + z_2(k,t) \; e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]
\end{aligned} \tag{B.38}
$$

Para que π_1 seja do tipo RD quando $|t| \to \infty$ também teremos que ter $z_2(k,t)$ e $\overline{z}_2(k,t)$ RD nesses limites. Vejamos qual a informação contida neste resultado.

- $t \to +\infty$

Obtemos então que a função

$$
z_2(k,t) \equiv \partial_0 z(k,t) + i\omega(k) z(k,t) \tag{B.39}
$$

é RD quando $t \to +\infty$. A informação sobre $\overline{z}_2(k,t)$ não trás nada de novo já que está contida nas condições fronteiras. De facto

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \overline{z}_2(k,t) &\equiv \lim_{t\to+\infty} [\partial_0 \overline{z}(k,t) - i\omega(k)\overline{z}(k,t)] \\
&= \quad i\omega(k)\overline{z}_f(k) \; e^{i\omega t} + \partial_0 \overline{z}_{1,\text{out}}(k,t) \\
&\quad -i\omega(k)\overline{z}_f(k) \; e^{i\omega t} - i\omega(k)\overline{z}_{1,\text{out}}(k,t) \\
&= \text{RD} \qquad t \to +\infty
\end{aligned} \tag{B.40}
$$

- $t \to -\infty$

A informação contida nas condições na fronteira é

$$
\overline{z}_2(k,t) \equiv \partial_0 \overline{z}(k,t) - i\omega(k)\overline{z}(k,t) = \text{RD} \qquad t \to -\infty \tag{B.41}
$$

iv) Demonstração que $z_{1,\text{out}}$ *e* $\overline{z}_{1,\text{in}}$ *são* RD

Da definição

$$
\phi(\vec{x},t) = \phi_{\text{as}} + \phi_1 \tag{B.42}
$$

resulta

$$
\begin{cases}
\phi(\vec{x},t) = \phi_{\text{as,in}}(\vec{x},t) + \phi_{1,\text{in}}(\vec{x},t) & t \to -\infty \\
\phi(\vec{x},t) = \phi_{\text{as,out}}(\vec{x},t) + \phi_{1,\text{out}}(\vec{x},t) & t \to +\infty
\end{cases} \tag{B.43}
$$

ou seja

$$\begin{cases} \overline{z}(k,t) = \overline{z}_{\rm in}(k)\ e^{i\omega t} + \overline{z}_{1,\rm in}(k,t) & t \to -\infty \\ z(k,t) = z_{\rm out}(k)\ e^{-i\omega t} + z_{1,\rm out}(k,t) & t \to +\infty \end{cases} \tag{B.44}$$

Mas usando os resultados anteriores

$$\begin{aligned} \partial_0 \overline{z}(k,t) \ &- \ i\omega(k)\overline{z}(k,t) = \text{RD} \qquad t \to -\infty \\ &= \ i\omega(k)\overline{z}_{\rm in}(k)\ e^{i\omega t} + \partial_0 \overline{z}_{1,\rm in}(k,t) \\ &\quad -i\omega(k)\overline{z}_{\rm in}(k)\ e^{i\omega t} - i\omega(k)\overline{z}_{1,\rm in}(k,t) \end{aligned} \tag{B.45}$$

ou seja

$$\overline{z}_{1,\rm in}(k,t) = \text{RD} \qquad t \to -\infty \tag{B.46}$$

e igualmente

$$z_{1,\rm out}(k,t) = \text{RD} \qquad t \to +\infty \tag{B.47}$$

Isto quer dizer que

$$\begin{cases} \phi_{1,\rm in} = \text{RD} & t \to -\infty \\ \phi_{1,\rm out} = \text{RD} & t \to +\infty \end{cases} \tag{B.48}$$

isto é, assimptoticamente

$$\phi = \phi_{\rm as} + \text{RD} \tag{B.49}$$

v) Resultado final

Estamos agora em condições de atacar o nosso problema. Temos

$$\begin{aligned} &\lim_{t_i \to -\infty} \int \tilde{dk}\ \left[\overline{z}(k,t_i) - z_f(k)\ e^{i\omega t_i}\right]^2 \\ = &\lim_{t_i \to -\infty} \int \tilde{dk}\ \left[(\overline{z}_{\rm in}(k) - \overline{z}_f(k))\ e^{i\omega t_i} + \overline{z}_{1,\rm in}(k,t_i)\right]^2 \\ = &\lim_{t_i \to -\infty} \int \tilde{dk}\ \Big[\ (\overline{z}_{\rm in}(k) - \overline{z}_f(k))^2\ \ e^{2i\omega t_i} + 2\,(\overline{z}_{\rm in}(k) - \overline{z}_f(k))\ \ e^{i\omega t_i}\overline{z}_{1,\rm in}(k,t_i) \\ &\qquad\qquad + \overline{z}^2_{1,\rm in}(k,t_i)\Big] \end{aligned}$$

$$= \quad 0 \tag{B.50}$$

Para o outro termo obter-se-ia o mesmo resultado. Chegamos portanto ao resultado

$$\begin{aligned} S^N(\phi_{\rm as}) &= \int \mathcal{D}(\phi,\pi)\ \exp\left\{-\frac{i}{2}\int d^4x\ \pi_1^2\right\} \\ &\quad \times \exp\left\{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - V(\phi)\right]\right\} \end{aligned} \tag{B.51}$$

onde a integração é feita sobre os campos $\phi = \phi_{\rm as} + \phi_1$ com as condições fronteiras apropriadas. Fazendo a integração sobre π_1 obtemos (a menos duma normalização)

$$\begin{aligned} S^N(\phi_{\rm as}) &= \int \mathcal{D}(\phi)\ e^{i\int d^4x\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 - V(\phi)\right]} \\ &= \int_{\phi=\phi_{\rm as}+\phi_1} \mathcal{D}(\phi)\ e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi_1)-(V(\phi)-V(\phi_1))]} \end{aligned} \tag{B.52}$$

Na presença de fontes exteriores obtemos

$$S^N(\phi_{\rm as}, J) = \int_{\phi=\phi_{\rm as}+\phi_1} \mathcal{D}(\phi)\ e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi_1)-(V(\phi)-V(\phi_1))+J\phi]} \tag{B.53}$$

Normalmente não estamos interessados na matriz S mas no funcional gerador das funções de Green. Por definição

$$Z(J) \equiv S(\phi_{\rm as}, J)\Big|_{\phi_{\rm as}=0} \tag{B.54}$$

Obtemos portanto a expressão fundamental

$$Z(J) = \int \mathcal{D}(\phi)\ e^{i\int d^4x[\mathcal{L}(\phi)+J\phi]} \tag{B.55}$$

B.3 Sistemas com fermiões

O uso de variáveis de Grassmann permite escrever expressões de integrais de caminho para a matriz S e para o funcional gerador das funções de Green Z para este caso. Não vamos aqui repetir os cálculos que fizémos para os sistemas de bosões, mas antes apresentar somente os resultados deixando as demonstrações para os problemas.

O ponto de partida é a definição do funcional gerador das funções de Green em presença das fontes exteriores fermiónicas. Este é dado por[2]

[2]Comparar com a definição do caso bosónico, equação 1.15.

$$Z[\eta,\overline{\eta}] = \langle 0| T \exp\left[i \int d^4x \left(\overline{\eta}(x)\psi(x) + \overline{\psi}(x)\eta(x) \right) \right] |0\rangle \tag{B.56}$$

Então as funções de Green

$$G^{2n}(x_1,\ldots,y_n) \equiv \langle 0| T\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\overline{\psi}(y_1)\cdots\overline{\psi}(y_n)\,|0\rangle \tag{B.57}$$

são dadas por

$$G^{2n}(x_1,\ldots,y_n) = \frac{\delta^{2n} Z}{i\delta\eta(y_n)\cdots i\delta\eta(y_1) i\delta\overline{\eta}(x_n)\cdots i\delta\overline{\eta}(x_1)} \tag{B.58}$$

onde as derivadas são esquerdas, isto é

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\overline{\eta}(x)} \int d^4y \overline{\eta}(y)\psi(y) &= \psi(x) \\ \frac{\delta}{\delta\eta(x)} \int d^4y \overline{\psi}(y)\eta(y) &= -\overline{\psi}(x) \end{aligned} \tag{B.59}$$

e por convenção a ordem da derivação é a indicada, isto é

$$\frac{\delta}{i\delta\eta(y_n)}\cdots\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}(x_1)} \tag{B.60}$$

Consideramos agora o lagrangeano de Dirac livre

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \tag{B.61}$$

Pode-se mostrar (ver problema B.2) que o funcional gerador é neste caso dado por

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}] = e^{-\int d^4x d^4y\ \overline{\eta}(x) S_F^0(x-y)\eta(y)} \tag{B.62}$$

onde $S_F^0(x-y)$ é o propagador de Feynman para a teoria de Dirac livre, dado por

$$S_F^0(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ e^{-ip\cdot(x-y)}\ \frac{i}{p\!\!\!/ - m + i\varepsilon} \tag{B.63}$$

Seguindo métodos semelhantes ao do caso bosónico podemos também mostrar que este funcional gerador pode ser representado pelo integral de caminho,

$$Z_0[\eta,\overline{\eta}] = \int \mathcal{D}(\psi,\overline{\psi})\ e^{i\int d^4x\ \left[\mathcal{L}(x) + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right]} \tag{B.64}$$

Tendo o funcional gerador para a teoria livre podemos formalmente escrever o funcional gerador para qualquer teoria fermiónica com interacções. Um exemplo é dado no Problema B.4.

Problemas Apêndice B

B.1 Mostre que as funções de Green

$$G^{2n}(x_1, \ldots, y_n) \equiv \langle 0| T\psi(x_1) \cdots \psi(x_n)\overline{\psi}(y_1) \cdots \overline{\psi}(y_n) |0\rangle \tag{B.65}$$

são dadas por

$$G^{2n}(x_1, \ldots, y_n) = \frac{\delta^{2n} Z}{i\delta\eta(y_n) \cdots i\delta\eta(y_1) i\delta\overline{\eta}(x_n) \cdots i\delta\overline{\eta}(x_1)} \tag{B.66}$$

B.2 Mostre que o funcional gerador das funções de Green para a teoria de Dirac livre é dado por

$$Z_0[\eta, \overline{\eta}] = e^{-\int d^4x d^4y \ \overline{\eta}(x) S_F^0(x-y)\eta(y)} \tag{B.67}$$

B.3 Mostre que o funcional gerador das funções de Green para a teoria de Dirac livre se pode representar pelo seguinte integral de caminho

$$Z_0[\eta, \overline{\eta}] = \int \mathcal{D}(\psi, \overline{\psi}) \ e^{i\int d^4x \ \left[\mathcal{L}(x) + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right]} \tag{B.68}$$

B.4 Considere o lagrangiano seguinte,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m\phi^2 \\ &\quad -g\overline{\psi}(x)\psi(x)\phi(x) \end{aligned} \tag{B.69}$$

que descreve a interacção dum campo de Dirac com um campo escalar. a) Mostre que

$$Z[\eta,\overline{\eta},J] = \exp\left\{-ig\int d^4x\left(\frac{\delta}{i\delta\overline{\eta}}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta\eta}\right)\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right)\right\} Z_0[\eta,\overline{\eta},J] \tag{B.70}$$

onde

$$Z_0[\eta,\overline{\eta},J] = e^{-\int d^4x d^4y\left[\overline{\eta}(x)S_F^0(x-y)\eta(y)+\frac{1}{2}J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right]} \tag{B.71}$$

e Δ_F é o propagador livre do campo escalar.

b) Mostre que $Z[\eta,\overline{\eta},J]$ se pode exprimir por meio do integral de caminho

$$Z[\eta,\overline{\eta},J] = \int \mathcal{D}(\psi,\overline{\psi},\phi)\; e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}(x)+J\phi+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta\right]} \tag{B.72}$$