

# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

# TEORIA QUÂNTICA DOS CAMPOS Parte 1

# Jorge Crispim Romão

Departamento de Física

 $\boldsymbol{2004}$ 

1	Qua	ntifica	ıção dos Campos Livres	<b>5</b>
	1.1	Forma	dismo Geral	5
		1.1.1	Quantificação canónica para partículas	5
		1.1.2	Quantificação canónica para campos	9
		1.1.3	Simetrias e Leis de Conservação	11
	1.2	Quantificação dos campos escalares		
		1.2.1	O campo escalar real	16
		1.2.2	Causalidade Microscópica	20
		1.2.3	Flutuações do vácuo	21
		1.2.4	O campo escalar carregado	22
		1.2.5	O produto ordenado no tempo e o propagador de Feynman	25
	1.3	Segun	da quantificação do campo de Dirac	26
		1.3.1	O formalismo canónico para o campo de Dirac	27
		1.3.2	Causalidade Macroscópica	30
		1.3.3	O Propagador de Feynman	32
	1.4	ificação do Campo Electromagnético	33	
		1.4.1	Introdução	33
		1.4.2	Formalismo da métrica indefinida	35
		1.4.3	O Propagador de Feynman	42
	1.5	Simeti	rias Discretas	44
		1.5.1	Paridade	44
		1.5.2	Conjugação de carga	46
		1.5.3	Inversão no Tempo	48
		1.5.4	O Teorema $\mathcal{TCP}$	49
	Prob	olemas	Capítulo 1	50
<b>2</b>	Esta	ados F	ísicos. Matriz S. Redução LSZ.	55
	2.1	Estado	os Físicos	55
	2.2	Estado	os in	56
	2.3	Repres	sentação espectral para campos escalares	59
	2.4	Estado	os $out$	61
	2.5	Matriz	$z S \ldots $	62
	2.6	Fórmu	ıla de redução para campos escalares	64

	2.7	Fórmula de redução para fermiões	67				
		2.7.1 Estados in e $out$	67				
		2.7.2 Representação espectral para fermiões	69				
		2.7.3 A fórmula de redução para fermiões	71				
	2.8	Fórmula de redução para fotões	74				
	2.9	Secções eficazes	76				
	Prol	olemas Capítulo 2	79				
3	Teoria das Perturbações Covariante 8						
	3.1	A matriz $U$	81				
	3.2	Expansão perturbativa das funções de Green	84				
	3.3	Teorema de Wick	87				
	3.4	Amplitudes Vácuo - Vácuo	92				
	3.5	Regras de Feynman para $\lambda \varphi^4$	93				
	3.6	Regras de Feynman para $QED$	99				
		3.6.1 Efeito de Compton	100				
		3.6.2 Difusão elástica electrão - positrão (Bhabha Scattering)	105				
		3.6.3 $Loop$ de fermiões $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	107				
		3.6.4 Regras de Feynman para $QED$	109				
	3.7	Receita Geral para as regras de Feynman	111				
		3.7.1 Exemplo: Electrodinâmica escalar	112				
	Prob	olemas Capítulo 3	114				
4	Correcções Radiativas 117						
	4.1	Renormalização a 1 loop	117				
		4.1.1 Polarização do vácuo	118				
		4.1.2 Self-energy do electrão	128				
		4.1.3 O vértice	132				
	4.2	As identidades de Ward-Takahashi	135				
		4.2.1 Transversalidade do propagador do fotão $n = 0, p = 1 \dots$	136				
		4.2.2 Identidade para o vértice $n = 1, p = 0$	139				
	4.3	Contratermos e contagem de potências	142				
	4.4	Momento magnético anómalo do electrão	146				
	4.5	Correcções radiativas à difusão de Coulomb	148				
A	Téc	nicas e fórmulas úteis para a renormalização	153				
	A.1	Parâmetro $\mu$	153				
	A.2	Parametrização de Fevnman	154				
	A.3	Rotação de Wick	156				
	A.4	Integrais Escalares em Regularização Dimensional	158				
	A 5	Integrais Tensoriais em Regularização Dimensional	159				
	A 6	Função $\Gamma(z)$ e outras fórmulas úteis	160				
	A 7	Explicit formulæ for the $1$ -loon integrals	161				
	* 7 • 1		TOT				

2

	A.7.1	Tadpole integrals				
	A.7.2	Self-Energy integrals				
	A.7.3	Triangle integrals				
	A.7.4	Box integrals				
A.8	Diverg	ent part of $1$ -loop integrals $\ldots \ldots \ldots$				
	A.8.1	Tadpole integrals				
	A.8.2	Self-Energy integrals				
	A.8.3	Triangle integrals				
	A.8.4	Box integrals				
A.9	Passar	ino-Veltman Integrals				
	A.9.1	The general definition				
	A.9.2	The divergences				
A.10 Examples of <i>1-loop</i> calculations with PV functions						
	A.10.1	Vaccum Polarization in QED				
	A.10.2	Electron Self-Energy in QED				
	A.10.3	QED Vertex				
	A.10.4	$\mu \to e\gamma$ : Neutral scalar charged fermion loop				

3

# Capítulo 1 Quantificação dos Campos Livres

# 1.1 Formalismo Geral

## 1.1.1 Quantificação canónica para partículas

Antes de expormos a quantificação canónica de sistemas com um número infinito de graus de liberdade, como são os campos, vamos recordar brevemente a quantificação para sistemas de partículas.

Comecemos por um sistema duma só partícula com um grau de liberdade, como por exemplo, o movimento de uma partícula a uma dimensão. As equações de movimento clássicas são obtidas a partir da acção

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) \ . \tag{1.1}$$

A condição  $\delta S = 0$  dá as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{1.2}$$

que são as equações do movimento.

Para se proceder à quantificação é conveniente passar primeiro para a formulação Hamiltoniana. Começamos por definir o momento p conjugado da coordenada q por

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{1.3}$$

Então introduzimos o Hamiltoniano pela transformação da Legendre

$$H(p,q) = p\dot{q} - L(q,\dot{q}) \tag{1.4}$$

Em termos de H as equações de movimento são

$$\{H,q\}_{PB} = \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$$
  
$$\{H,p\}_{PB} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{p}$$
 (1.5)

onde o parêntesis de Poisson é definido por

$$\{f(p,q), g(p,q)\}_{PB} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p}$$
(1.6)

satisfazendo, obviamente

$$\{p,q\}_{PB} = 1 . (1.7)$$

A quantificação efectua-se passando  $p \in q$  a serem operadores hermíticos que em vez de satisfazerem à Eq. (1.7) obedecem à relação de comutação ( $\hbar = 1$ )

$$[p,q] = -i \tag{1.8}$$

que é trivialmente verificada na representação das coordenadas onde  $p = -i\frac{\partial}{\partial q}$ . A dinâmica é dada pela equação de Schrödinger

$$H(p,q) |\Psi_S(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_S(t)\rangle$$
(1.9)

Conhecido o estado em  $t = 0, |\Psi_S(0)\rangle$ , a Eq. (1.9) determina completamente o estado  $|\Psi_s(t)\rangle$  e portanto o valor de qualquer observável física. Esta descrição onde os estados dependem do tempo e os operadores não, é conhecida pela *representação de Schrödinger*.

Existe uma descrição alternativa, onde a dependência no tempo passa para os operadores e os estados são independentes do tempo. É a chamada *representação de Heisenberg*. Para a definirmos integramos formalmente a Eq. (1.9). Obtemos

$$\Psi_S(t)\rangle = e^{-iHt} |\Psi_S(0)\rangle = e^{-iHt} |\Psi_H\rangle \quad . \tag{1.10}$$

O estado na representação de Heisenberg,  $|\Psi_H\rangle$  é definido como o estado na representação de Schrödinger para t = 0. O operador unitário  $e^{-iHt}$  permite passar duma representação para outra. Se definirmos os operadores na representação de Heisenberg por

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt} \tag{1.11}$$

então os elementos de matriz são independentes da representação. De facto

$$\langle \Psi_S(t)|O_S|\Psi_S(t)\rangle = \langle \Psi_S(0)|e^{iHt}O_Se^{-iHt}|\Psi_S(0)\rangle$$

#### 1.1. Formalismo Geral

$$= \langle \Psi_H | O_H(t) | \Psi_H \rangle . \tag{1.12}$$

A evolução no tempo do operador  $O_H(t)$  é dada pela equação

$$\frac{dO_H(t)}{dt} = i[H, O_H(t)] + \frac{\partial O_H}{\partial t}$$
(1.13)

que se obtém facilmente da Eq. (1.11). O último termo na Eq. (1.13) só está presente se  $O_H$  depender do tempo explicitamente.

Na teoria não relativista a diferença é muito pequena se trabalharmos com funções próprias da energia. Se  $\psi_n(q,t) = e^{-i\omega_n t}u_n(q)$  for a função de onda de Schrödinger então a função de onda de Heisenberg é simplesmente  $u_n(q)$ . No caso da teoria relativista a representação de Heisenberg é mais conveniente pois é mais fácil descrever a evolução dos operadores do que dos estados. Também a covariância de Lorentz é mais facilmente obtida na representação de Heisenberg, pois o tempo e as coordenadas passam a estar juntas nos operadores de campo.

Na representação de Heisenberg a relação de comutação fundamental é agora

$$[p(t), q(t)] = -i (1.14)$$

A dinâmica é agora dada por

$$\frac{dp(t)}{dt} = i[H, p(t)] \quad ; \quad \frac{dq(t)}{dt} = i[H, q(t)] \tag{1.15}$$

Repare-se que nesta representação as equações fundamentais são semelhantes às equações clássicas com a substituição

$$\{,\}_{PB} \Longrightarrow i[,] \tag{1.16}$$

No caso dum sistema com n graus de liberdade as Eqs. (1.14) e (1.15) são generalizadas para

$$[p_i(t), q_j(t)] = -i\delta_{ij}$$
(1.17)

$$[p_i(t), p_j(t)] = 0 (1.18)$$

$$[q_i(t), q_j(t)] = 0 (1.19)$$

е

$$\dot{p}_i(t) = i[H, p_i(t)]; \ \dot{q}_i(t) = i[H, q_i(t)]$$
(1.20)

Porque é um exemplo importante, vamos ver o caso do oscilador harmónico. O Hamiltoniano é

Capítulo 1. Quantificação dos Campos Livres

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) \tag{1.21}$$

As equações de movimento são

$$\dot{p} = i[H, p] = -\omega_0^2 q$$
  
$$\dot{q} = i[H, q] = p \Longrightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$
(1.22)

É conveniente introduzir os operadores

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}(\omega_0 q + ip) \; ; \; a^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}}(\omega_0 q - ip) \tag{1.23}$$

As equações de movimento para a e  $a^{\dagger}$  são muito simples

$$\dot{a}(t) = -i\omega_0 a(t) e a^{\dagger}(t) = i\omega_0 a^{\dagger}(t)$$
(1.24)

que têm como soluções

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega_0 t} ; a^{\dagger}(t) = a_0^{\dagger} e^{i\omega_0 t}$$
 (1.25)

e que obedecem às relações de comutação

$$[a, a^{\dagger}] = [a_0, a_0^{\dagger}] = 1 \tag{1.26}$$

$$[a, a] = [a_0, a_0] = 0 \tag{1.27}$$

$$[a^{\dagger}, a^{\dagger}] = [a_0^{\dagger}, a_0^{\dagger}] = 0 \tag{1.28}$$

Em termos de  $a,a^{\dagger}$ o Hamiltoniano é

$$H = \frac{1}{2} \omega_0 (a^{\dagger}a + aa^{\dagger}) = \frac{1}{2} \omega_0 (a_0^{\dagger}a_0 + a_0a_0^{\dagger})$$
  
=  $\omega_0 a_0^{\dagger}a_0 + \frac{1}{2} \omega_0$  (1.29)

onde se usou

$$[H, a_0] = -\omega_0 a_0 ; \ [H, a_0^{\dagger}] = \omega_0 a_0^{\dagger}$$
(1.30)

Vemos que  $a_0$  desce a energia dum estado da quantidade  $\omega_0$  e  $a_0^{\dagger}$  sobe a energia dessa mesma quantidade. Como o Hamiltoniano é uma soma de quadrados não deve ter valores próprios negativos. Então deve haver um estado base,  $|0\rangle$ , definido por

$$a_0 \left| 0 \right\rangle = 0 \tag{1.31}$$

Um estado  $|n\rangle$  é obtido por aplicação de  $\left(a_0^{\dagger}\right)^n$ . Se definirmos

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a_0^{\dagger}\right)^n |0\rangle \tag{1.32}$$

então

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \tag{1.33}$$

е

$$H\left|n\right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_{0}\left|n\right\rangle \tag{1.34}$$

Veremos na teoria quântica dos campos, que os equivalentes de  $a_0 e a_0^{\dagger}$  serão os operadores de destruição e criação de partículas.

## 1.1.2 Quantificação canónica para campos

Passemos agora a sistemas com um número infinito de graus de liberdade. Especificar o estado do sistema é agora dar para todos os pontos do espaço-tempo um número (ou mais, se não se tratar dum escalar). Os equivalentes das coordenadas  $q_i(t)$  e das velocidades,  $\dot{q}_i$ , são aqui os campos  $\varphi(\vec{x}, t)$  e as suas derivadas  $\partial^{\mu}\varphi(\vec{x}, t)$ . A acção é

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \partial^{\mu}\varphi) \tag{1.35}$$

onde a densidade Lagrangeana  $\mathcal{L}$  é um funcional dos campos  $\varphi$  e das suas derivadas  $\partial^{\mu}\varphi$ . Consideremos somente sistemas fechados para os quais  $\mathcal{L}$  não depende explicitamente das coordenadas  $x^{\mu}$  (a energia e o momento linear são assim conservados). Para simplificar consideramos sistemas descritos por n campos escalares  $\varphi_r(x), r = 1, 2, \dots n$ . A estacionaridade de acção,  $\delta I = 0$ , conduz então às equações de movimento, chamadas equações de Euler-Lagrange

$$\partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\varphi_r} = 0 \qquad r = 1, \cdots n$$
 (1.36)

Para o caso dos campos escalares reais livres que estamos a considerar é fácil de ver que a densidade Lagrangeana é

$$\mathcal{L} = \sum_{r=1}^{n} \left[ \frac{1}{2} \partial^{\mu} \varphi_{r} \partial_{\mu} \varphi_{r} - \frac{1}{2} m^{2} \varphi_{r} \varphi_{r} \right]$$
(1.37)

sendo as equações de movimento, as equações de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi_r = 0 \quad ; \quad r = 1, \cdots n \tag{1.38}$$

Para definir as regras da quantificação canónica temos que passar para o formalismo Hamiltoniano, em particular precisamos de definir o momento  $\pi(x)$  conjugado do campo  $\varphi(x)$ . Para se fazer uma analogia como os sistemas com n graus de liberdade, dividamos o espaço 3-dimensional em elementos de volume  $\Delta V_i$ . Assim introduzimos a coordenada  $\varphi_i(t)$  como a média de  $\varphi(\vec{x}, t)$  no elemento de volume  $\Delta V_i$ , ou seja

$$\varphi_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta V_i} \int_{(\Delta V_i)} d^3 x \varphi(\vec{x}, t)$$
(1.39)

e também

$$\dot{\varphi}_i(t) \equiv \frac{1}{\Delta V_i} \int_{(\Delta V_i)} d^3 x \dot{\varphi}(\vec{x}, t)$$
(1.40)

Então

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \to \sum_i \Delta V_i \overline{\mathcal{L}}_i \tag{1.41}$$

Assim o momento canónico é

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} = \Delta V_i \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}_i}{\partial \dot{\varphi}_i(t)} \equiv \Delta V_i \pi_i(t)$$
(1.42)

e o Hamiltoniano

$$H = \sum_{i} p_i \dot{\varphi}_i - L = \sum_{i} \Delta V_i (\pi_i \dot{\varphi}_i - \overline{\mathcal{L}}_i)$$
(1.43)

Passando à notação contínua definimos o momento conjugado

$$\pi(\vec{x},t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi})}{\partial \dot{\varphi}(\vec{x},t)} \tag{1.44}$$

tal forma que o seu valor médio em  $\Delta V_i$  é  $\pi_i(t)$  definido na Eq. (1.42). A Eq. (1.43) sugere que se introduza uma densidade Hamiltoniana tal que

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \tag{1.45}$$

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\varphi} - \mathcal{L} \tag{1.46}$$

Para definir as regras de quantificação canónica, usamos primeiro as coordenadas  $\varphi_i(t)$  e os momentos conjugados  $p_i(t)$ . Temos

$$[p_i(t), \varphi_j(t)] = -i\delta_{ij}$$
$$[\varphi(t), \varphi_j(t)] = 0$$

#### 1.1. Formalismo Geral

$$[p_i(t), p_j(t)] = 0 (1.47)$$

Em termos do momento  $\pi_i(t)$  temos

$$[\pi_i(t), \varphi_j(t)] = -i \frac{\delta_{ij}}{\Delta V_i}$$
(1.48)

Passando para o limite contínuo,  $\Delta V_i \rightarrow 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] &= 0\\ [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] &= 0\\ [\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] &= -i\delta(\vec{x}-\vec{x}') \end{aligned}$$
(1.49)

Estas relações são a base da teoria quântica. Para o caso de n campos escalares, a generalização é:

$$[\varphi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{x}', t)] = 0$$
  
[ $\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)$ ] = 0  
[ $\pi_r(\vec{x}, t), \varphi_s(\vec{x}', t)$ ] =  $-i\delta_{rs}\delta(\vec{x} - \vec{x}')$  (1.50)

onde

$$\pi_r(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_r(\vec{x}, t)} \tag{1.51}$$

e o Hamiltoniano é

$$H = \int d^3 x \mathcal{H} \tag{1.52}$$

onde

$$\mathcal{H} = \sum_{r=1}^{n} \pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L} \tag{1.53}$$

# 1.1.3 Simetrias e Leis de Conservação

O formalismo Lagrangeano fornece um método poderoso para relacionar simetrias com leis de conservação. Ao nível do teoria clássica o resultado fundamental é o

#### Teorema de Noether

A cada transformação contínua de simetria que deixa  $\mathcal{L}$  e as equações do movimento invariante, corresponde uma lei de conservação.

#### Dem:

Em vez de demonstrar o teorema para todos os casos, vamos ver as leis de conservação que emergem em três casos importantes

#### *i*) Translações

Consideremos uma translação infinitesimal

$$x^{\prime\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \tag{1.54}$$

Então

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \varepsilon^{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \tag{1.55}$$

e  $\mathcal{L}'$  conduz às mesmas equações de movimento que  $\mathcal{L}$ , porque diferem por uma 4-divergência. Se  $\mathcal{L}$  for invariante para translações então a Eq. (1.55) diz-nos que não pode ter dependência explicita nas coordenadas  $x^{\mu}$ . Então

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{r} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{r}} \delta \varphi_{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_{r})} \delta (\partial_{\mu} \varphi_{r}) \right]$$
$$= \partial_{\mu} \left[ \sum_{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_{r})} \varepsilon^{\nu} \partial_{\nu} \varphi_{r} \right]$$
(1.56)

onde usámos as equações do movimento, isto é a Eq. (1.36). Igualando as Eqs. (1.55) e (1.56) e usando o facto de que  $\varepsilon^{\mu}$  é arbitrário obtemos

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.57}$$

onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento definido por

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_{r} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{r})} \partial^{\nu} \varphi_{r}$$
(1.58)

Usando estas relações podemos definir as quantidades conservadas

$$P^{\mu} \equiv \int d^3x T^{0\mu}$$

#### 1.1. Formalismo Geral

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = 0 \tag{1.59}$$

Notando que  $T^{00} = \mathcal{H}$  é fácil de ver que  $P^{\mu}$  é o 4-vector momento. Assim a invariância para translações conduz à conservação do 4-momento.

ii)Transformações de Lorentz

Sejam as transformações de Lorentz infinitesimais

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} \ x^{\nu} \tag{1.60}$$

Como vimos, para o caso da equação de Dirac, a transformação (1.60) é acompanhada por uma transformação dos campos

$$\varphi_r'(x') = S_{rs}(\omega)\varphi_s(x) \tag{1.61}$$

Para o caso de campos escalares  $S_{rs} = \delta_{rs}$  e para spinores vimos que  $S_{rs} = \delta_{rs} + \frac{1}{8} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]_{rs} \omega^{\mu\nu}$ . Em geral a variação de  $\varphi_r$  provém de dois efeitos. Temos

$$\delta\varphi_r(x) = S_{rs}^{-1}(\varepsilon)\varphi_s(x') - \varphi_r(x)$$
  
=  $-\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} \left[ (x^{\alpha}\partial^{\beta} - x^{\beta}\partial^{\alpha})\delta_{rs} + \Sigma_{rs}^{\alpha\beta} \right]\varphi_s$  (1.62)

onde definimos

$$S_{rs}(\omega) = \delta_{rs} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma_{rs}^{\alpha\beta} . \qquad (1.63)$$

 $Ent{\widetilde{a}o}$ 

$$\delta \mathcal{L} = -\omega^{\alpha\beta} x_{\alpha} \partial_{\beta} \mathcal{L} = \partial_{\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_r)} \delta \varphi_r \right]$$
(1.64)

o que dá

$$\partial_{\mu}M^{\mu\alpha\beta} = 0 \tag{1.65}$$

com

$$M^{\mu\alpha\beta} = x^{\alpha}T^{\mu\beta} - x^{\beta}T^{\mu\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{r})}\Sigma^{\alpha\beta}_{rs}\varphi_{s}$$
(1.66)

O momento angular conservado é então

$$M^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = \int d^3x \left[ x^{\alpha} T^{0\beta} - x^{\beta} T^{0\alpha} + \sum_{r,s} \Sigma^{\alpha\beta}_{rs} \varphi_s \right]$$
(1.67)

com

$$\frac{dM^{\alpha\beta}}{dt} = 0 \tag{1.68}$$

*iii)* Simetrias internas

Se admitirmos que o Lagrangeano  $\acute{e}$  invariante para uma transformação de simetria interna

$$\delta\varphi_r(x) = -i\varepsilon\lambda_{rs}\varphi_s(x) \tag{1.69}$$

então facilmente podemos mostrar que (ver Problema 1.2)

$$\partial_{\mu}J^{\mu} = 0$$

$$J^{\mu} = -i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_{r})}\lambda_{rs}\varphi_{s}$$
(1.70)

o que conduz à carga conservada

$$Q(\lambda) = -i \int d^3x \pi_r \lambda_{rs} \varphi_s \quad ; \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \tag{1.71}$$

Estas relações entre simetrias e leis de conservação foram deduzidas para a teoria clássica. Vejamos agora o que se passa quando quantificamos a teoria. Na teoria quântica os campos  $\varphi_r(x)$  tornam-se operadores actuando no espaço de Hilbert dos estados. Aos observáveis físicas estão relacionadas com elementos de matriz destes operadores. Devemos portanto exigir covariância de Lorentz a esses elementos de matriz. Isso faz com que os operadores tenham que obedecer a certos requisitos.

O que isto quer dizer é que a correspondência da relação entre os campos clássicos

$$\varphi_r'(x') = S_{rs}(a)\varphi_s(x) \tag{1.72}$$

deve ser feita, na teoria quântica, por

$$\left\langle \Phi_{\alpha}'|\varphi_{r}(x')|\Phi_{\beta}'\right\rangle = S_{rs}(a)\left\langle \Phi_{\alpha}|\varphi_{s}(x)|\Phi_{\beta}\right\rangle$$
 (1.73)

Deve existir uma transformação unitária U(a, b) que deve relacionar os estados nos dois referenciais de inércia,

$$|\Phi'\rangle = U(a,b) |\Phi\rangle \tag{1.74}$$

#### 1.1. Formalismo Geral

onde  $a^{\mu}{}_{\nu}$  e  $b^{\mu}$  são definidos por

$$x^{\prime \mu} = a^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + b^{\mu} \tag{1.75}$$

Usando a Eq. (1.74) na Eq. (1.73) obtemos que os operadores do campo devem transformarem-se de acordo com

$$U(a,b)\varphi_r(x)U^{-1}(a,b) = S_{rs}^{(-1)}(a)\varphi_s(ax+b)$$
(1.76)

Vejamos as consequências desta relação para as translações e transformações de Lorentz. Consideremos primeiro as translações. A Eq. (1.76) escreve-se então

$$U(b)\varphi_r(x)U^{-1}(b) = \varphi_r(x+b)$$
(1.77)

Para deslocamentos elementares poderemos escrever

$$U(\varepsilon) \equiv e^{i\varepsilon_{\mu}\mathcal{P}^{\mu}} \simeq 1 + i\varepsilon_{\mu}\mathcal{P}^{\mu} \tag{1.78}$$

onde  $\mathcal{P}^{\mu}$  é um operador hermítico. Então a Eq. (1.77) reduz-se a

$$i[\mathcal{P}^{\mu},\varphi_r(x)] = \partial^{\mu}\varphi_r(x) \tag{1.79}$$

A correspondência com a mecânica clássica e a teoria quântica não relativista sugere que identifiquemos  $\mathcal{P}^{\mu}$  com o 4-vector momento, isto é,  $\mathcal{P}^{\mu} \equiv P^{\mu}$  onde  $P^{\mu}$  foi definido na Eq. (1.59).

Como temos uma expressão explicita para  $P^{\mu}$  e sabemos as relações de comutação da teoria, a Eq. (1.79) torna-se um constrangimento adicional que a teoria tem que verificar para ser invariante para translações. Veremos explicitamente que isso é verdade para as teorias em que estamos interessados.

Para as transformações de Lorent<br/>z $x'^{\mu}=a^{\mu}{}_{\nu}~x^{\nu}$  escrevemos para uma transformação infinitesimal

$$a^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} + O(\omega^2) \tag{1.80}$$

e portanto

$$U(\omega) \equiv 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{M}^{\mu\nu}$$
(1.81)

Então obtemos da Eq. (1.76) o constrangimento

$$i[\mathcal{M}^{\mu\nu},\varphi_r(x)] = x^{\mu}\partial^{\nu}\varphi_r - x^{\mu}\partial^{\mu}\varphi_r + \Sigma^{\mu\nu}_{rs}\varphi_s(x)$$
(1.82)

Mais uma vez a correspondência clássica leva-nos a identificar  $\mathcal{M}^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}$  onde o momento angular  $M^{\mu\nu}$  é definido pela Eq. (1.68). Para cada teoria teremos que verificar a Eq. (1.82) para que a teoria seja invariante para transformações de Lorentz. Veremos que isso é verdade para os casos de interesse.

# 1.2 Quantificação dos campos escalares

### 1.2.1 O campo escalar real

O campo escalar real descrito pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^{\mu} \varphi \partial_{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi \varphi \tag{1.83}$$

a que corresponde a equação de Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\varphi = 0 \tag{1.84}$$

é o exemplo de campo mais simples e de facto já foi usado para introduzir o formalismo geral. Recapitulando, o momento conjugado é

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} \tag{1.85}$$

e as relações de comutação são

$$[\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] = [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{x}',t)] = 0$$
  
$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x}',t)] = -i\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$
(1.86)

O Hamiltoniano é dado por

$$H = P^{0} = \int d^{3}x \mathcal{H}$$
  
=  $\int d^{3}x \left[ \frac{1}{2} \pi^{2} + \frac{1}{2} |\vec{\nabla}\varphi|^{2} + \frac{1}{2} m^{2} \varphi^{2} \right]$  (1.87)

e o momento linear por

$$\vec{P} = -\int d^3x \pi \vec{\nabla}\varphi \tag{1.88}$$

Usando as Eqs. (1.87) e (1.88) é trivial verificar que

$$i[P^{\mu},\varphi] = \partial^{\mu}\varphi \tag{1.89}$$

demonstrando assim a invariância da teoria para transformações. Do mesmo modo se pode verificar a invariância da teoria para translações de Lorentz, Eq. (1.82), com  $\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = 0$  (spin zero).

Para definirmos os estados da teoria é conveniente termos os estados próprios da energia e momento. Para os construirmos comecemos por fazer uma decomposição de Fourier de  $\varphi(\vec{x}, t)$  em ondas planas:

#### 1.2. Quantificação dos campos escalares

$$\varphi(\vec{x},t) = \int \widetilde{dk} \left[ a(k)e^{-ik\cdot x} + a^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x} \right]$$
(1.90)

onde

$$\widetilde{dk} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \; ; \; \omega_k = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$$
 (1.91)

é a medida invariante de Lorentz. Como na teoria quântica  $\varphi$  é um operador, também  $a(k) \in a^{\dagger}(k)$  serão operadores. Como  $\varphi$  é real  $a^{\dagger}(k)$  é o conjugado hermítico de a(k). Para determinarmos as suas relações de comutação, comecemos por resolver a Eq. (1.90) em ordem a  $a(k) \in a^{\dagger}(k)$ . Usando as propriedades usuais das funções delta, obtemos

$$a(k) = i \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x)$$
  

$$a^{\dagger}(k) = -i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(x)$$
(1.92)

onde se introduziu

$$a\overleftrightarrow{\partial}_0 b = a\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial a}{\partial t}b \tag{1.93}$$

O segundo membro da Eq. (1.92) é independente do tempo como pode ser verificado explicitamente (ver Problema 1.3). Esta observação é importante porque podemos escolher tempos iguais para calcularmos as relações de comutação. Obtemos

$$[a(k), a^{\dagger}(k')] = \int d^3x \int d^3y \left[ e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\vec{x}, t), e^{-ik' \cdot y} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\vec{y}, t) \right]$$
$$= (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{1.94}$$

е

$$[a(k), a(k')] = [a^{\dagger}(k), a^{\dagger}(k')] = 0$$
(1.95)

Vemos assim, que à parte uma pequena diferença na normalização,  $a(k) e a^{\dagger}(k)$ devem ser interpretados como operadores de destruição e criação de estados de 4momento  $k^{\mu}$ . Para mostrar isto é fácil de ver que

$$H = \frac{1}{2} \int \widetilde{dk} \,\omega_k \left[ a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k) \right]$$
(1.96)

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int \vec{dk} \ \vec{k} \left[ a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k) \right]$$
(1.97)

Usando estas formas pode-se mostrar que

$$[P^{\mu}, a^{\dagger}(k)] = k^{\mu} a^{\dagger}(k) \tag{1.98}$$

$$[P^{\mu}, a(k)] = -k^{\mu}a(k) \tag{1.99}$$

mostrando que de facto  $a^{\dagger}(k)$  adiciona 4-momento  $k^{\mu}$  e a(k) destrói 4-momento  $k^{\mu}$ . Que a quantificação tenha produzido uma infinidade de osciladores não deve constituir uma surpresa. De facto os  $a(k), a^{\dagger}(k)$  correspondem à quantificação dos modos normais do campo de Klein-Gordon clássico.

Por analogia com o caso do oscilador harmónico, estamos agora em posição de encontrar os estados próprios de H. Comecemos por definir o estado base, que em teoria dos campos se chama vácuo. Por analogia com o caso do oscilador harmónico temos

$$a(k)\left|0\right\rangle_{k} = 0 \quad ; \quad \forall_{k} \tag{1.100}$$

Então o vácuo, que designaremos por  $|0\rangle$ , será simbolicamente dado por

$$0\rangle = \Pi_k \left| 0 \right\rangle_k \tag{1.101}$$

e admitimos que está normalizado, isto é  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Ao calcularmos a energia do vácuo temos imediatamente o primeiro problema com infinitos em Teoria Quântica dos Campos (TQC). De facto

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \int \widetilde{dk} \,\omega_k \left\langle 0|\left[a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)\right]|0\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int \widetilde{dk} \,\omega_k \left\langle 0|\left[a(k), a^{\dagger}(k)\right]|0\right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \,\omega_k (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(0)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3k \,\omega_k \delta^3(0) = \infty$$

$$(1.102)$$

Este infinito pode ser compreendido como a soma das energias do ponto zero. No caso discreto seria  $\sum_k \frac{1}{2}\omega_k = \infty$ . Este infinito é removido facilmente. Para isso notemos que só medimos energia em relação ao vácuo e essas serão finitas. Assim podemos definir a energia ao vácuo como sendo zero. Matematicamente isto é feito do modo seguinte. Definimos um novo operador  $P_{N,O}^{\mu}$  por

$$P^{\mu}_{N.O.} \equiv \frac{1}{2} \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \left[ a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k) \right]$$

#### 1.2. Quantificação dos campos escalares

$$-\frac{1}{2}\int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \left\langle 0 | \left[ a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k) \right] | 0 \right\rangle$$
$$= \int \widetilde{dk} \ k^{\mu}a^{\dagger}(k)a(k)$$
(1.103)

Agora  $\langle 0|P_{N.O.}^{\mu}|0\rangle = 0$ . O ordenamento dos operadores em que os operadores de destruição aparecem à direita das de criação chama-se *ordenamento normal* e a notação usual é:

$$: \frac{1}{2}(a^{\dagger}(k)a(k) + a(k)a^{\dagger}(k)) :\equiv a^{\dagger}(k)a(k)$$
 (1.104)

Portanto remover a energia e momento infinitos do vácuo corresponde a escolher os nossos operadores com ordenamento normal. É o que faremos sempre no seguimento, não mais escrevendo "N.O." para o indicar.

Uma vez escolhido o vácuo podemos construir os estados por aplicação dos operadores de criação  $a^{\dagger}(k)$ . Tal como no caso do oscilador harmónico podemos definir o operador número

$$N = \int \widetilde{dk} \ a^{\dagger}(k)a(k) \tag{1.105}$$

É fácil de ver que N comuta com H pelo que os estados próprios de H também o são de N. Poderíamos pensar que o estado de uma partícula com 4- momento  $k^{\mu}$ seria dado por  $a^{\dagger}(k) |0\rangle$ . De facto temos

$$P^{\mu}a^{\dagger}(k) |0\rangle = \int d\vec{k}' k'^{\mu}a^{\dagger}(k')a(k')a^{\dagger}(k) |0\rangle$$
  
$$= \int d^{3}k' k'^{\mu}\delta^{3}(\vec{k} - \vec{k}')a^{\dagger}(k) |0\rangle$$
  
$$= k^{\mu}a^{\dagger}(k) |0\rangle \qquad (1.106)$$

е

$$Na^{\dagger}(k)\left|0\right\rangle = a^{\dagger}(k)\left|0\right\rangle \tag{1.107}$$

De modo semelhante o estado  $a^{\dagger}(k_1)...a^{\dagger}(k_n) |0\rangle$  seria um estado com *n* partículas. Contudo os estados do tipo acabados de definir têm um problema pois não são normalizáveis, não podendo assim constituir uma base para o espaço de Hilbert (chamado neste caso espaço de Fock). Este é o problema com estados de 4-momento perfeitamente bem definido como por exemplo as ondas planas. Pode ser resolvido formando grupos de onda

$$|1\rangle = \lambda \int \widetilde{dk} C(k) a^{\dagger}(k) |0\rangle \qquad (1.108)$$

Então

$$\langle 1|1\rangle = \lambda^2 \int \widetilde{dk_1} \widetilde{dk_2} C^*(k_1) C(k_2) \left\langle 0|a(k_1)a^{\dagger}(k_2)|0\right\rangle$$

$$= \lambda^2 \int \widetilde{dk} |C(k)|^2 = 1$$
(1.109)

ou seja

$$\lambda = \left(\int \widetilde{dk} \ |C(k)|^2\right)^{-1/2} \tag{1.110}$$

desde que C(k) seja de quadrado integrável. Se (k) for só diferente de zero na vizinhança dum certo 4-momento  $k^{\mu}$ , o estado terá um 4-momento bem definido.

Uma base para o espaço de Fock pode ser construída a partir dos estados de n - partículas normalizadas

$$|n\rangle = \left(n! \int d\widetilde{k}_1 \cdots d\widetilde{k}_n |C(k_1, \cdots k_n)|^2\right)^{-1/2}$$
$$\int d\widetilde{k}_1 \cdots d\widetilde{k}_n C(k_1, \cdots k_n) a^{\dagger}(k_1) \cdots a^{\dagger}(k_n) |0\rangle$$
(1.111)

que satisfazem

$$\langle n|n\rangle = 1 \tag{1.112}$$

$$N\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle \tag{1.113}$$

Devido à comutatividade dos operadores  $a^{\dagger}(k)$  na Eq. (1.111) as funções  $C(k_1 \cdots k_n)$ são simétricas isto é

$$C(\cdots k_i, \cdots k_j, \cdots) = C(\cdots k_j \cdots k_i \cdots)$$
(1.114)

Isto mostra que os quanta que emergem da quantificação canónica escalar real obedecem à estatística de Bose-Einstein. Esta interpretação em termos de partículas, com os seus operadores de criação e destruição que resulta da quantificação canónica é designada por *segunda quantificação*.

### 1.2.2 Causalidade Microscópica

Classicamente o campo pode ser medido com precisão arbitrária. Quânticamente vários problemas se põem. O primeiro é que o importante são os elementos de matriz e não os campos que agora são operadores. Independentemente desta questão, só

deverá ser possível falar de medida de  $\varphi$  em dois pontos x e y do espaço-tempo se  $[\varphi(x), \varphi(y)]$  se anular. Vejamos em que condições isso se passa.

$$\begin{aligned} \left[\varphi(x),\varphi(y)\right] &= \int \widetilde{dk_1}\widetilde{dk_2}\left\{\left[a(k_1),a^{\dagger}(k_2)\right]e^{-ik_1\cdot x+ik_2\cdot y} + \left[a^{\dagger}(k_1),a(k_2)\right]e^{ik_1x-ik_2\cdot y}\right\} \\ &= \int \widetilde{dk_1}\left(e^{ik_1\cdot (x-y)} - e^{ik_1\cdot (x-y)}\right) \\ &\equiv i\Delta(x-y) \end{aligned}$$
(1.115)

A função  $\Delta(x-y)$  é invariante de Lorentz e satisfaz as relações

$$(\Box_x + m^2)\Delta(x - y) = 0$$
 (1.116)

$$\Delta(x-y) = -\Delta(y-x) \tag{1.117}$$

$$\Delta(\vec{x} - \vec{y}, 0) = 0 \tag{1.118}$$

A última relação assegura que o comutador dos dois campos a tempos iguais se anula. A invariância de Lorentz assegura então que

$$\Delta(x-y) = 0 \quad ; \quad \forall \ (x-y)^2 < 0 \tag{1.119}$$

Isto quer dizer que em dois pontos que não podem ser ligados por um sinal de luz ou por qualquer meio físico, isto é  $(x - y)^2 < 0$ , os campos, se interpretados como observáveis físicos, podem ser medidos independentemente um do outro. Este resultado é conhecido como *Causalidade Microscópica*. Notemos ainda que

$$\partial^0 \Delta(x-y)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
 (1.120)

o que assegura a relação de comutação canónica, Eq. (1.86).

## 1.2.3 Flutuações do vácuo

É um resultado bem conhecido da Mecânica Quântica que para um oscilador harmónico a coordenada não é bem definida para os estados de energia, isto é

$$\left\langle n|q^2|n\right\rangle > (\left\langle n|q|n\right\rangle)^2 = 0$$
 (1.121)

A teoria quântica, sendo um conjunto  $\infty$  de osciladores também tem este comportamento, isto é,

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle \neq 0 \tag{1.122}$$

embora

$$\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = 0 \tag{1.123}$$

Podemos calcular a Eq. (1.122).

$$\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle = \int \widetilde{dk_1}\widetilde{dk_2}e^{-ik_1\cdot x}e^{ik_2\cdot y} \left\langle 0|a(k_1)a^{\dagger}(k_2)|0\right\rangle$$
$$= \int \widetilde{dk_1}e^{-ik\cdot(x-y)} \equiv \Delta_+(x-y)$$
(1.124)

A função  $\Delta_+(x-y)$  corresponde à parte de frequências positivas de  $\Delta(x-y)$ , daí o índice +. Quando  $y \longrightarrow x$  esta expressão é quadraticamente divergente

$$\left\langle 0|\varphi^{2}(x)|0\right\rangle = \Delta_{+}(0) = \int \widetilde{dk_{1}} = \int \frac{d^{3}k_{1}}{(2\pi)^{3}2\omega_{k_{1}}}$$
 (1.125)

Esta divergência não pode ser eliminada como o ponto zero da energia. De facto as flutuações do vácuo têm consequências observáveis como por exemplo o *deslocamento de Lamb*. Podemos ficar menos preocupados com o resultado da Eq. (1.125) se notarmos que para medirmos o quadrado do operador  $\varphi$  no ponto x precisamos de frequências arbitrariamente grandes e portanto da energia infinita. Fisicamente só produtos de campos considerados em *média* numa região do espaço tempo finita têm significado.

### 1.2.4 O campo escalar carregado

A descrição em termos de campos reais não permite a distinção entre partículas e antipartículas. Só se aplica portanto aos casos em que não há distinção, um exemplo sendo o  $\pi^0$ . Para o caso mais usual das partículas serem distintas das antipartículas é necessário alguma carga (eléctrica ou outra) que os distinga. Para isso necessitamos de campos complexos como por exemplo na prescrição mínima.

A teoria do campo escalar complexo obtêm-se facilmente a partir de dois campos reais  $\varphi_1 \in \varphi_2$  com a mesma massa. Se designarmos por  $\varphi$  a quantidade complexa

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \tag{1.126}$$

então

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_1) + \mathcal{L}(\varphi_2) =: \partial^{\mu} \varphi^{\dagger} \partial_{\mu} \varphi_{\mu} - m^2 \varphi^{\dagger} \varphi : \qquad (1.127)$$

que conduz às equações de movimento

$$(\Box + m^2)\varphi = 0$$
;  $(\Box + m^2)\varphi^{\dagger} = 0$  (1.128)

A teoria dada pela Eq. (1.127) tem ao nível clássico uma corrente conservada,  $\partial_\mu J^\mu=0$  com

$$J^{\mu} = i\varphi^{\dagger}\overleftrightarrow^{\mu}\varphi \tag{1.129}$$

Assim esperamos que ao nível quântico a carga Q

$$Q = \int d^3x : i(\varphi^{\dagger}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^{\dagger}\varphi) : \qquad (1.130)$$

seja conservada, isto é, [H, Q] = 0. Para mostrarmos isso temos que saber as relações de comutação. A definição da Eq. (1.126) e as relações de comutação para  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  permitem concluir as seguintes relações para  $\varphi$  e  $\varphi^{\dagger}$ :

$$[\varphi(x),\varphi(y)] = [\varphi^{\dagger}(x),\varphi^{\dagger}(y)] = 0 \qquad (1.131)$$

$$[\varphi(x), \varphi^{\dagger}(y)] = i\Delta(x-y) \tag{1.132}$$

Para tempos iguais podemos obter da Eq. (1.132)

$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = [\pi^{\dagger}(\vec{x},t),\varphi^{\dagger}(\vec{y},t)] = -i\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$
(1.133)

onde

$$\pi = \dot{\varphi}^{\dagger} \quad ; \quad \pi^{\dagger} = \dot{\varphi} \tag{1.134}$$

A expansão em ondas planas é

$$\varphi(x) = \int \widetilde{dk} \left[ a_{+}(k)e^{-ik\cdot x} + a_{-}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x} \right]$$
$$\varphi^{\dagger}(x) = \int \widetilde{dk} \left[ a_{-}(k)e^{-ik\cdot x} + a_{+}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x} \right]$$
(1.135)

onde a definição de  $a_{\pm}(k)$  é

$$a_{\pm}(k) = \frac{a_1(k) \pm ia_2(k)}{\sqrt{2}} ; \ a_{\pm}^{\dagger} = \frac{a_1^{\dagger}(k) \mp ia_2^{\dagger}(k)}{\sqrt{2}}$$
(1.136)

A álgebra dos operadores  $a_{\pm}$  é facilmente obtida a partir de álgebra dos  $a_{i'}s$ . Obtemos para os comutadores que não se anulam:

$$[a_{+}(k), a_{+}^{\dagger}(k')] = [a_{-}(k), a_{-}^{\dagger}(k')] = (2\pi)^{3} 2\omega_{k} \delta^{3}(\vec{k} - \vec{k}')$$
(1.137)

permitindo portanto a identificação de  $a_+ e a_+^{\dagger}$  como operadores de destruição e criação para quanta do tipo + e de um modo semelhante para os quanta do tipo -. Podemos construir os operadores número para os quanta + e -:

$$N_{\pm} = \int \widetilde{dk} \ a_{\pm}^{\dagger}(k) a_{\pm}(k) \tag{1.138}$$

É fácil de verificar que

$$N_{+} + N_{-} = N_{1} + N_{2} \tag{1.139}$$

onde

$$N_i = \int \widetilde{dk} \ a_i^{\dagger}(k) a_i(k) \tag{1.140}$$

Em termos dos operadores + e - o operados energia-momento é

$$P^{\mu} = \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \left[ a^{\dagger}_{+}(k)a_{+}(k) + a^{\dagger}_{-}(k)a_{-}(k) \right]$$
(1.141)

onde já se considerou a ordenação normal. Usando a decomposição da Eq. (1.135) a carga Q escreve-se

$$Q = \int d^3x : i(\varphi^{\dagger}\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^{\dagger}\dot{\varphi}) :$$
  
= 
$$\int \widetilde{dk} \left[ a^{\dagger}_{+}(k)a_{+}(k) - a^{\dagger}_{-}(k)a_{-}(k) \right]$$
  
= 
$$N_{+} - N_{-}$$
(1.142)

Usando as relações (1.137) é fácil de mostrar que

$$[H,Q] = 0 \tag{1.143}$$

mostrando que Q é conservada. A Eq. (1.142) permite interpretar os quanta + como tendo carga +1 e os quanta - carga -1. Enquanto não forem introduzidas interacções a teoria é simétrica, não sendo possível distinguir entre os dois tipos de quanta. Das relações de comutação (1.137) resulta

$$[P^{\mu}, a^{\dagger}_{+}(k)] = k^{\mu}a^{\dagger}_{+}(k)$$
  
$$[Q, a^{\dagger}_{+}(k)] = +a^{\dagger}_{+}(k)$$
(1.144)

mostrando assim que  $a^{\dagger}_{\pm}(k)$  cria um quanta com 4-momento  $k^{\mu}$  e carga +. Do mesmo modo se mostrar que  $a^{\dagger}_{\pm}$  cria um quanta de carga – e que  $a_{\pm}(k)$  destroem quantas de carga + e – respectivamente.

# 1.2.5 O produto ordenado no tempo e o propagador de Feynman

O operador  $\varphi^{\dagger}$  cria uma partícula de carga +1 ou destrói uma partícula de carga -1. Em qualquer dos casos adiciona uma carga total +1. De modo semelhante  $\varphi$  destrói uma unidade de carga. Formemos um estado de 1- partícula (não normalizada) de carga +1 por aplicação de  $\varphi^{\dagger}$  no vácuo:

$$|\Psi_{+}(\vec{x},t)\rangle \equiv \varphi^{\dagger}(\vec{x},t) \left|0\right\rangle \tag{1.145}$$

A amplitude para o estado  $|\Psi_+\rangle$ se propagar para o futuro para o ponto  $(\vec{x}',t')$  com t'>té dada por

$$\theta(t'-t)\left\langle \Psi_{+}(\vec{x}',t')|\Psi_{+}(\vec{x},t)\right\rangle = \theta(t'-t)\left\langle 0|\varphi(\vec{x}',t')\varphi^{\dagger}(\vec{x},t)|0\right\rangle$$
(1.146)

Se em  $\varphi^{\dagger}(\vec{x},t) |0\rangle$  somente o operador  $a_{+}^{\dagger}(k)$  é activo, em  $\langle 0| \varphi(\vec{x}',t')$  o mesmo acontece só com  $a_{+}(k)$ . Portanto a Eq. (1.146) é o elemento da matriz para criar um quanta de carga +1 em  $(\vec{x},t)$  e reabsorvê-lo pelo vácuo em  $(\vec{x}',t')$  com t' > t.

Existe uma outra maneira de aumentar a carga por  $+1 \text{ em }(\vec{t})$  e diminuí-la por  $-1 \text{ em }(\vec{x}', t')$ . Basta para isso criar um quanta de carga menos em  $\vec{x}'$  no instante t' e propagá-lo para  $\vec{x}$  onda é absorvida no instante t > t'. A amplitude é então

$$\theta(t-t') \left\langle \Psi_{-}(\vec{x},t) | \Psi_{-}(\vec{x}',t') \right\rangle = \left\langle 0 | \varphi^{\dagger}(\vec{x},t) \varphi(\vec{x}',t') | 0 \right\rangle \theta(t-t')$$
(1.147)

A soma das duas amplitudes das Eqs. (1.146) e (1.147) é o chamado propagador de Feynman. Pode ser escrito duma forma mais compacta introduzido o produto ordenado no tempo. Dados dois operadores a(x) e b(x') define-se o produto ordenado no tempo T

$$Ta(x)b(x') = \theta(t - t')a(x)b(x') + \theta(t' - t)b(x')a(x)$$
(1.148)

Nesta prescrição os tempos mais antigos estão sempre á direita dos mais recentes. Pode-se aplicar a um número arbitrário de operadores. Com esta definição, o propagador de Feynman é

$$\Delta_F(x'-x) = \left\langle 0|T\varphi(x')\varphi^{\dagger}(x)|0\right\rangle \tag{1.149}$$

Usando a decomposição de  $\varphi \in \varphi^{\dagger}$  podemos calcular  $\Delta_F$  (para campos livres, claro)

$$\Delta_F(x'-x) = \int \widetilde{dk} \left[ \theta(t'-t)e^{-ik\cdot(x'-x)} + \theta(t-t')e^{ik\cdot(x'-x)} \right]$$
(1.150)



Figura 1.1:

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x' - x)}$$
(1.151)

$$\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_F(k) e^{-ik \cdot (x'-x)}$$
(1.152)

onde

$$\Delta_F(k) \equiv \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{1.153}$$

 $\Delta_F(k)$  é o propagador no espaço dos momentos (transformada de Fourier). A equivalência entre a Eq. (1.151) e a Eq. (1.150) faz-se fazendo a integração no plano complexo  $k^0$  e usando o teorema dos resíduos. O contorno é definido pela prescrição  $i\varepsilon$  conforme está indicado na Fig. (1.1). Aplicando o operador ( $\Box'_x + m^2$ ) a  $\Delta_F(x' - x)$ em qualquer das formas da Eq. (1.150) podemos mostrar que

$$(\Box'_{x} + m^{2})\Delta_{F}(x' - x) = -i\delta^{4}(x' - x)$$
(1.154)

isto é,  $\Delta_F(x'-x)$  é a função de Green da equação de Klein-Gordon com as condições fronteira de Feynman.

Na presença de interacções o propagador de Feynman deixa de ter a forma simples da Eq. (1.150). Contudo o propagador livre, Eq. (1.150), desempenhará um papel fundamental em teoria das perturbações.

# 1.3 Segunda quantificação do campo de Dirac

Vamos agora aplicar o formalismo da segunda quantificação ao campo de Dirac. Como veremos se alguma coisa terá que ser alterada porque senão seríamos conduzidos a partículas obedecendo à estatística de Bose enquanto sabemos que os electrões obedecem à estatística de Fermi.

## 1.3.1 O formalismo canónico para o campo de Dirac

A densidade Lagrangeana que conduz à equação de Dirac é

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi \qquad (1.155)$$

O momento conjugado <br/>a $\psi_\alpha$ é

$$\pi_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_{\alpha}} = i \psi_{\alpha}^{\dagger} \tag{1.156}$$

enquanto que o momento conjugado <br/>a $\psi^\dagger_\alpha$ é zero. A densidade Hamiltoniana é então

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \psi^{\dagger} (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m)\psi \qquad (1.157)$$

A invariância para translações e para transformações de Lorentz de  $\mathcal{L}$  conduz aos tensores  $T^{\mu\nu}$  e  $M^{\mu\nu\lambda}$ . Usando óbvias generalizações das fórmulas das Eqs. (1.58) e (1.66) obtemos

$$T^{\mu\nu} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi \tag{1.158}$$

е

$$M^{\mu\nu\lambda} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}(x^{\mu}\partial^{\lambda} - x^{\lambda}\partial^{\nu} + \sigma^{\nu\lambda})\psi \qquad (1.159)$$

onde

$$\sigma^{\nu\lambda} = \frac{1}{4} [\gamma^{\nu}, \gamma^{\lambda}] \tag{1.160}$$

O 4-momento  $P^{\mu}$ e o momento angular $M^{\nu\lambda}$ são então

$$P^{\mu} \equiv \int d^{3}x T^{0\mu}$$
$$M^{\mu\lambda} \equiv \int d^{3}x M^{0\nu\lambda} \qquad (1.161)$$

ou ainda

$$H \equiv \int d^3x \psi^{\dagger} (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi$$
  
$$\vec{P} \equiv \int d^3x \psi^{\dagger} (-i\vec{\nabla}) \psi \qquad (1.162)$$

Se definirmos o operador momento angular  $\vec{J} \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12)}$  obtemos

$$\vec{J} = \int d^3x \psi^{\dagger} \left( \vec{r} \times \frac{1}{i} \vec{\nabla} + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \right) \psi$$
(1.163)

que tem o aspecto familiar  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . Podemos ainda identificar uma corrente conservada  $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0 \text{ com } j^{\mu} = \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi$  que dá origem à carga conservada

$$Q = \int d^3x \psi^{\dagger}\psi \tag{1.164}$$

Tudo o que fizemos até aqui é ao nível clássico. Para aplicar o formalismo canónico devíamos agora exigir relações de comutação e verificar se a covariância de Lorentz era verificada. Isso leva-nos no entanto a problemas. Para vermos quais os problemas e como os resolver introduzimos as expansões em ondas planas

$$\psi(x) = \int \widetilde{dk} \sum_{s} \left[ b(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x} + d^{\dagger}(p,s)v(p,s)e^{ip\cdot x} \right]$$
(1.165)

$$\psi^{\dagger}(x) = \int \widetilde{dk} \sum_{s} \left[ b^{\dagger}(p,s) u^{\dagger}(p,s) e^{+ip \cdot x} + d(p,s) v^{\dagger}(p,s) e^{-ip \cdot x} \right] \quad (1.166)$$

onde  $u(p, s) \in v(p, s)$  são os spinores introduzidos no estudo de equação de Dirac e  $b, b^{\dagger}, d \in d^{\dagger}$  são operadores. Para vermos que temos problemas com a quantificação canónica se esta não for modificada para fermiões, calculemos  $P^{\mu}$ . Obtemos

$$P^{\mu} = \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \sum_{s} \left[ b^{\dagger}(k,s)b(k,s) - d(k,s)d^{\dagger}(k,s) \right]$$
(1.167)

onde se usaram as relações de ortogonalidade e fecho das spinores u(p, s) e v(p, s). Da relação (1.167) resulta que se definirmos o vácuo como  $b(k, s) |0\rangle = d(k, s) |0\rangle = 0$ e se quantificarmos com comutadores as partículas b e as partículas d contribuirão como sinais opostos para a energia e a teoria não terá um estado de base estável. De facto este era o problema que aparecia com as soluções de energia negativa e é fácil de compreender que é essa a razão do sinal — na Eq. (1.167). A teoria dos buracos exigia estatística de Fermi pelo que veremos como o spin e a estatística estão relacionadas.

Para vermos quais as relações a que  $b, b^{\dagger}, d \in d^{\dagger}$  devem obedecer recordemos que ao nível quântico é sempre necessário verificar que a invariância para translações e para as transformações de Lorentz é mantida. Para as translações isso exige que

$$i[P_{\mu},\psi(x)] = \partial_{\mu}\psi \; ; \; i[P_{\mu},\overline{\psi}(x)] = \partial_{\mu}\overline{\psi} \tag{1.168}$$

Em vez de impormos a quantificação canónica e verificarmos a Eq. (1.168) vamos antes impor a Eq. (1.168) e descobrir as relações de comutação dos operadores. Usando as expansões Eqs. (1.165) e (1.166) é fácil de ver que a Eq. (1.168) conduz às relações

$$[P_{\mu}, b(k, s)] = -k_{\mu}b(k, s) ; \ [P_{\mu}, b^{\dagger}(k, s)] = k_{\mu}b^{\dagger}(k, s)$$
(1.169)

$$[P_{\mu}, d(k, s)] = -k_{\mu}d(k, s) ; \ [P_{\mu}, d^{\dagger}(k, s)] = k_{\mu}d^{\dagger}(k, s)$$
(1.170)

#### 1.3. Segunda quantificação do campo de Dirac

Usando a expansão para  $P_{\mu}$  obtemos

$$\sum_{s'} \left[ b^{\dagger}(P,s')b(p,s') - d(p,s')d^{\dagger}(p,s')), b(k,s) \right] = -(2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})b(k,s) \quad (1.171)$$

e mais três relações semelhantes. Se admitirmos que

$$[d^{\dagger}(p,s')d(p,s'),b(k,s)] = 0$$
(1.172)

a condição da Eq. (1.171) escreve-se

$$\sum_{s'} \left[ b^{\dagger}(p,s') \{ b(p,s'), b(k,s) \} - \{ b^{\dagger}(p,s'), b(k,s) \} b(p,s') \right] =$$
  
=  $-(2\pi)^3 2k^0 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) b(k,s)$  (1.173)

onde os parêntesis  $\{,\}$  são anticomutadores. É fácil de ver que se impusermos as relações de quantificação canónica com anticomutadores em vez de comutadores então a Eq. (1.173) será verificada. Devemos ter

$$\{b^{\dagger}(p,s), b(k,s)\} = (2\pi)^{3} 2k^{0} \delta^{3}(\vec{p}-\vec{k}) \delta_{ss'}$$
  
$$\{d^{\dagger}(p,s'), d(k,s)\} = (2\pi)^{3} 2k^{0} \delta^{3}(\vec{p}-\vec{k}) \delta_{ss'}$$
(1.174)

e todos os outros *anticomutadores* nulos. Note-se que como b anticomuta com d e  $d^{\dagger}$ , então comuta com  $d^{\dagger}d$  e portanto a Eq. (1.172) é verificada.

Com as relações de anticomutação as contribuições para  $P^{\mu}$  são ambas positivas. Tal como no caso dos bosões temos que subtrair a energia do ponto zero. Isto faz-se tomando todas as quantidades com ordenamento normal. Assim temos para  $P^{\mu}$ ,

$$P^{\mu} = \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \sum_{s} : \left( b^{\dagger}(k,s)b(k,s) - d(k,s)d^{\dagger}(k,s) \right) :$$
  
=  $\int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \sum_{s} : \left( b^{\dagger}(k,s)b(k,s) + d^{\dagger}(k,s)d(k,s) \right) :$  (1.175)

e para a carga

$$Q = \int d^3x : \psi^{\dagger}(x)\psi(x) :$$
  
=  $\int \widetilde{dk} \sum_{s} \left[ b^{\dagger}(k,s)b(k,s) - d^{\dagger}(k,s)d(k,s) \right]$  (1.176)

o que quer dizer que os quanta b têm carga +1 e os d carga -1. É curioso notar que foi a segunda quantificação do campo de Dirac que introduziu o sinal - na

Eq. (1.176) tornando a carga uma quantidade sem sinal definido enquanto que a densidade de probabilidade era na teoria de Dirac definida positiva. Passa-se o contrário com o caso dos bosões. É fácil mostrar que

$$[Q, b^{\dagger}(k, s)] = b^{\dagger}(k, s) \qquad [Q, d(k, s)] = d(k, s)$$
  
$$[Q, b(k, s)] = -b(k, s) \qquad [Q, d^{\dagger}(k, s)] = -d^{\dagger}(k, s)$$
  
(1.177)

o que implica

$$[Q,\psi] = -\psi \ ; \ [Q,\overline{\psi}] = \overline{\psi} \tag{1.178}$$

Em QED a carga é eQ (e < 0) pelo que -e > 0 e assim vemos que  $\psi$  cria positrões e aniquila electrões e o contrário para  $\overline{\psi}$ .

Podemos introduzir os operadores número

$$N^{+}(p,s) = b^{\dagger}(p,s)b(p,s) \quad ; \quad N^{-}(p,s) = d^{\dagger}(p,s)d(p,s) \tag{1.179}$$

em termos dos quais

$$P^{\mu} = \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \sum_{s} (N^{+}(k,s) + N^{-}(k,s))$$
(1.180)

$$Q = \int \widetilde{dk} \sum_{s} (N^{+}(k,s) - N^{-}(k,s))$$
 (1.181)

Usando as relações de anticomutação da Eq. (1.174) é agora fácil mostrar que a teoria é invariante para transformações de Lorentz, isto é (ver Problema 1.2)

$$i[M^{\mu\nu},\psi] = (x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\psi + \sigma^{\mu\nu}\psi \qquad (1.182)$$

## 1.3.2 Causalidade Macroscópica

As relações de anticomutação na Eq. (1.174) podem ser usadas para encontrar as relações de anticomutação a tempos iguais dos campos. Obtemos

$$\{\psi_{\alpha}(\vec{x},t),\psi^{\dagger}_{\beta}(\vec{y},t)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{\alpha\beta}$$
(1.183)

е

$$\{\psi_{\alpha}(\vec{x},t),\psi_{\beta}(\vec{y},t)\} = \{\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x},t),\psi_{\beta}^{\dagger}(\vec{y},t)\} = 0$$
(1.184)

Estas relações podem ser generalizadas para tempos iguais

#### 1.3. Segunda quantificação do campo de Dirac

$$\{\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}^{\dagger}(y)\} = \int \widetilde{dp} \left[ \left[ (\not p+m)\gamma^{0} \right]_{\alpha\beta} e^{-ip \cdot (x-y)} - \left[ (-\not p+m)\gamma^{0} \right]_{\alpha\beta} e^{ip \cdot (x-y)} \right]$$
$$= \left[ (i\partial_{x}+m)\gamma^{0} \right]_{\alpha\beta} i\Delta(x-y)$$
(1.185)

onde a função  $\Delta(x - y)$  foi definida para o caso do campo escalar. O facto de aparecer o  $\gamma^0$  na Eq. (1.185) pode ser compreendido por se ter considerado  $\psi^{\dagger}$  e não  $\overline{\psi}$ . De facto se multiplicarmos à direita por  $\gamma^0$  obtemos

$$\{\psi_{\alpha}(x), \overline{\psi}_{\beta}(y)\} = (i\partial_x + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x - y)$$
(1.186)

е

$$\{\psi_{\alpha}(x),\psi_{\beta}(y)\} = \{\overline{\psi}_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(y)\} = 0$$
(1.187)

É fácil de verificar a covariância da Eq. (1.186). Usamos

$$U(a,b)\psi(x)U^{-1}(a,b) = S^{-1}(a)\psi(ax+b)$$
$$U(a,b)\overline{\psi}(x)U^{-1}(a,b) = \overline{\psi}(ax+b)S(a)$$
$$S^{-1}\gamma^{\mu}S = a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$
(1.188)

e obtemos

$$U(a,b)\{\psi_{\alpha}(x),\overline{\psi}_{\beta}(y)\}U^{-1}(a,b) =$$

$$= S_{\alpha\tau}^{-1}(a)\{\psi_{\tau}(ax+b),\psi_{\tau}(ax+b),\overline{\psi}_{\lambda}(ay+b)\}S_{\alpha\beta}(a)$$

$$= S_{\alpha\tau}^{-1}(a)(i\partial_{ax}+m)_{\tau\lambda}i\Delta(ax-ay)S_{\lambda\beta}(a)$$

$$= (i\partial_{\tau}+m)_{\alpha\beta}i\Delta(x-y)$$
(1.189)

onde se usou o facto  $\Delta(x-y)$  ser uma função invariante e  $S^{-1}i\partial_{ax}S = i\partial_x$ . Para  $(x-y)^2 < 0$  os anticomutadores anulam-se pois nesse caso  $\Delta(x-b)$  também se anula. Este resultado permite mostrar que duas observáveis construídas a partir de bilineares em  $\overline{\psi} \in \psi$  comutam para partes do espaço tempo tais que  $(x-y)^2 < 0$ . Assim

$$\begin{split} \left[ \overline{\psi}_{\alpha}(x)\psi_{\beta}(x), \overline{\psi}_{\lambda}(y)\psi_{\tau}(y) \right] &= \\ &= \overline{\psi}_{\alpha}(x)\{\psi_{\beta}(x), \overline{\psi}_{\lambda}(y)\}\psi_{\tau}(y) - \{\overline{\psi}_{\alpha}(x), \overline{\psi}_{\lambda}(y)\}\psi_{\beta}(x)\psi_{\tau}(y) \end{split}$$

$$+\overline{\psi}_{\lambda}(y)\overline{\psi}_{\alpha}(x)\{\psi_{\beta}(x),\psi_{\tau}(y)\}-\overline{\psi}_{\lambda}(y)\{\psi_{\tau}(y),\overline{\psi}_{\alpha}(x)\}\psi_{\beta}(x)$$

$$= 0 \qquad (1.190)$$

para  $(x - y)^2 < 0$ . Assim a causalidade microscópica é satisfeita nas observáveis físicas (densidade de carga, densidade de momento).

## 1.3.3 O Propagador de Feynman

Tal como para o caso do campo escalar carregado há duas maneiras de aumentar a carga por uma unidade em x' e diminui-la também por uma unidade em x. Elas são

$$\theta(t'-t)\left\langle 0|\psi_{\beta}(x')\psi_{\alpha}^{\dagger}(x)|0\right\rangle \tag{1.191}$$

$$\theta(t-t')\left\langle 0|\psi_{\alpha}^{\dagger}(x)\psi_{\beta}(x')|0\right\rangle \tag{1.192}$$

Na Eq. (1.191) um electrão de energia positiva é criado em  $\vec{x}$  no instante t, propagase até x' onde é destruído no instante t' > t. Na Eq. (1.192) um positrão de energia positiva é criado em x' e destruído em x com t > t'. O propagador de Feynman é obtido considerando as duas amplitudes. Devido à troca entre  $\psi_{\beta} \in \overline{\psi}_{\alpha}$  deve haver um sinal menos entre as duas amplitudes pelo que o propagador de Feynman é definido tomando a diferença das duas amplitudes (multiplicamos por  $\gamma^0$  para aparecer  $\overline{\psi}$ )

$$S_{F}(x'-x)_{\alpha\beta} = \theta(t'-t) \left\langle 0|\psi_{\alpha}(x')\overline{\psi}_{\beta}(x)|0\right\rangle$$
$$-\theta(t-t') \left\langle 0|\overline{\psi}_{\beta}(x)\psi_{\alpha}(x')|0\right\rangle$$
$$\equiv \left\langle 0|T\psi_{\alpha}(x')\overline{\psi}_{\beta}(x)|0\right\rangle$$
(1.193)

onde se definiu o produto ordenado no tempo para fermiões

$$T\eta(x)\chi(y) \equiv \theta(x^0 - y^0)\eta(x)\chi(y) - \theta(y^0 - x^0)\chi(y)\eta(x) .$$
(1.194)

Inserindo na Eq. (1.193) as expansões para  $\psi \in \overline{\psi}$  obtemos:

$$S_F(x'-x)_{\alpha\beta} = \int \widetilde{dk} \left[ (\not p+m)_{\alpha\beta} \theta(t'-t) e^{-ik \cdot (x'-x)} + (-\not p+m)_{\alpha\beta} \theta(t-t') e^{ik \cdot (x'-x)} \right]$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i(\not k+m)_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x'-x)}$$
$$\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} S_F(k)_{\alpha\beta} e^{-ik \cdot (x'-x)}$$
(1.195)

onde  $S_F(k)$  é o propagador de Feynman no espaço dos momentos. O propagador de Feynman é a Função de Green para a equação de Dirac isto é

$$(i\partial_{\lambda\alpha}S_F(x'-x)_{\alpha\beta} = i\delta_{\lambda\beta}\delta^4(x'-x)$$
(1.196)

# 1.4 Quantificação do Campo Electromagnético

#### 1.4.1 Introdução

O campo electromagnético livre é descrito pelo Lagrangeano Clássico

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{1.197}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{1.198}$$

As equações de Maxwell são

$$\partial_{\alpha}F^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.199}$$

que corresponde às equações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
 (1.200)

As outras equações são uma consequência directa da Eq. (1.198) e podem-se escrever

$$\partial_{\alpha}\tilde{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad ; \quad \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}$$
 (1.201)

e correspondem a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
 (1.202)

Classicamente as quantidades com significado físico são os campos  $\vec{E} \in \vec{B}$ , os potenciais  $A^{\mu}$  são auxiliares cuja escolha não é única devido à invariância de gauge da teoria. Quânticamente os potenciais  $A_{\mu}$  é que desempenham o papel importante. Basta lembrar, por exemplo, a prescrição para o acoplamento mínimo. Devemos portanto formular a teoria quântica em termos dos potenciais  $A^{\mu}$  e não dos campos  $\vec{E}$  a  $\vec{B}$ .

Ao tentarmos aplicar a quantificação canónica aos potenciais  $A^{\mu}$  entramos imediatamente em dificuldades. Por exemplo, se definirmos o momento conjugado por Capítulo 1. Quantificação dos Campos Livres

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_{\mu)}} \tag{1.203}$$

obtemos

$$\pi^{k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{A}_{k})} = -\dot{A}^{k} - \frac{\partial A^{0}}{\partial x^{k}} = E^{k}$$
  
$$\pi^{0} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{0}} = 0 \qquad (1.204)$$

Portanto o momento conjugado à coordenada  $A^0$  anula-se o que impede a aplicação directa do formalismo canónico. O problema tem a sua origem no facto de que o fotão, que queremos descrever, só tem dois graus de liberdade (helicidade positiva ou negativa) e aqui estamos a usar um campo  $A^{\mu}$  com 4 graus de liberdade. De facto temos de impor restrições em  $A^{\mu}$  para que ele descreva de facto o fotão.

Este problema pode ser abordado de 3 maneiras diferentes:

i) Gauge de Radiação

Historicamente este foi o primeiro método. Baseia-se no facto que é sempre possível escolher uma gauge, chamada gauge de radiação onde

$$A^0 = 0 \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{1.205}$$

isto é, o potencial  $\vec{A}$  é transversal. As condições (1.205) reduzem os graus de liberdade a 2, as componentes transversais de  $\vec{A}$ . É então possível aplicar o formalismo canónico a estes campos transversais e assim quantificar o campo electromagnético. O problema com este método é que perdemos a covariância explicita de Lorentz. É então sempre preciso mostrar que ela é recuperada no resultado físico final. Este método é descrito no livro de Bjorken e Drell.

#### ii) Quantificação de sistemas com ligações

Pode-se mostrar que o electromagnetismo é um exemplo dum sistema de Hamilton generalizado, isto é, um sistema onde existem ligações ou constrangimentos. A maneira de quantificar estes sistemas foi desenvolvida por Dirac para sistemas de partículas com n graus de liberdade. A generalização para teoria dos campos é feita no âmbito da quantificação via integral de caminho. Estudaremos este método em Teoria Quântica dos Campos II pois ele é o único que permite generalização para as teorias de gauge não abelianas.

iii) Métrica Indefinida

Formalmente existe um outro processo, designado, por razões que serão claras mais adiante, de métrica indefinida, que foi desenvolvido por Gupta e Bleuler.
Neste formalismo, que será o que vamos estudar, a covariância de Lorentz é mantida, isto é, trabalharemos sempre com o 4-vector  $A_{\mu}$ , mas o preço a pagar é o aparecimento de estados com norma negativa. É então preciso definir o espaço de Hilbert dos espaços físicos como um sub-espaço onde a norma é positiva. Vemos assim que para manter a covariância explícita de Lorentz temos que complicar a teoria.

## 1.4.2 Formalismo da métrica indefinida

Para resolver a dificuldade do momento  $\pi^0$ ser nulo vamos começar por modificar o Lagrangeano de Maxwell introduzindo um novo termo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2$$
 (1.206)

onde  $\xi$  é um parâmetro sem dimensões. As equações do movimento são agora

$$\Box A^{\mu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}(\partial \cdot A) = 0$$
(1.207)

e os momentos conjugados

$$\pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_{\mu}} = F^{\mu 0} - \frac{1}{\xi} g^{\mu 0} (\partial \cdot A)$$
(1.208)

isto é

$$\begin{cases} \pi^0 = -\frac{1}{\xi} (\partial \cdot A) \\ \pi^k = E^k \end{cases}$$
(1.209)

Repare-se que o Lagrangeano (1.205) e as equações de movimento (1.207) se reduzem à teoria de Maxwell na gauge  $\partial \cdot A = 0$ . Por isso se diz que a escolha da Eq. (1.205) corresponde a uma classe de gauge de Lorentz dependendo do parâmetro  $\xi$ . Dentro deste abuso de linguagem (porque de facto não estamos a pôr  $\partial \cdot A = 0$  pois então os problemas voltariam) o valor de  $\xi = 1$  é designado por gauge de Feynman e  $\xi = 0$  gauge de Landau.

Da Eq. (1.207) resulta que

$$\Box(\partial \cdot A) = 0 \tag{1.210}$$

pelo que  $(\partial \cdot A)$  é um campo escalar sem massa. Embora seja possível prosseguir com  $\xi$  arbitrário, tomaremos daqui em diante o caso  $\xi = 1$  (gauge de Feynman). Então a equação de movimento coincide com a teoria de Maxwell na gauge de Lorentz.

Como já não temos  $\pi^0 = 0$ , podemos impor as relações de comutação canónicas a tempos iguais:

$$[\pi^{\mu}(\vec{x},t), A_{\nu}(\vec{y},t)] = -ig^{\mu}{}_{\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$
$$[A_{\mu}(\vec{x},t), A_{\mu}(\vec{y},t)] = [\pi_{\mu}(\vec{x},t), \pi_{\nu}(\vec{y},t)] = 0$$
(1.211)

Do facto de  $[A_{\mu}(\vec{x},t), A_{\mu}(\vec{y},t)] = 0$  a tempos iguais podemos concluir que as derivadas espaciais de  $A_{\mu}$  comutam a tempos iguais. Então notando que

 $\pi^{\mu} = -\dot{A}^{\mu} + \text{ derivadas espaciais}$  (1.212)

podemos escrever em lugar da Eq. (1.211)

$$[A_{\mu}(\vec{x},t), A_{\nu}(\vec{y},t)] = [\dot{A}_{\mu}(\vec{x},t), \dot{A}_{\mu}(\vec{y},t)] = 0$$
$$[\dot{A}_{\mu}(\vec{x},t), A_{\nu}(\vec{y},t)] = ig_{\mu\nu}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$
(1.213)

Se compararmos estas relações com as correspondentes para o caso do campo escalar real, onde a única não nula é

$$[\dot{\varphi}(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = -i\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
(1.214)

vemos  $(g_{\mu\nu} = \text{diag.} (+, -, -, -)$  que as relações para as componentes espaciais são iguais mas diferem no sinal para a componente temporal. Este sinal vai ser a fonte dos problemas anteriormente mencionados.

Não nos preocupando de momento com o sinal diferente, expandimos  $A_{\mu}(x)$  em ondas planas:

$$A^{\mu}(x) = \int \widetilde{dk} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[ a(k,\lambda)\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)e^{-ik\cdot k} + a^{\dagger}(k,\lambda)\varepsilon^{\mu*}(k,\lambda)e^{ik\cdot x} \right]$$
(1.215)

onde  $\varepsilon^{\mu}(k, \lambda)$  são um conjunto de quatro 4-vectores independentes que podemos assumir serem reais sem perda de generalidade. Vamos fazer uma escolha para estes 4-vectores. Para isso escolhemos  $\varepsilon^{\mu}(1) \in \varepsilon^{\mu}(2)$  ortogonais a  $k^{\mu} \in n^{\mu}$  tais que

$$\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)\varepsilon_{\mu}(k,\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \text{ para } \lambda, \lambda' = 1,2$$
 (1.216)

Depois escolhemos  $\varepsilon^{\mu}(k,3)$  no plano  $(k^{\mu}, n^{\mu})$ , ortogonal a  $n^{\mu}$  e normalizado, isto é

$$\varepsilon^{\mu}(k,3)n_{\mu} = 0 \quad ; \quad \varepsilon^{\mu}(k,3)\varepsilon_{\mu}(k,3) = -1$$
 (1.217)

Finalmente escolhemos  $\varepsilon^{\mu}(k,0) = n^{\mu}$ . Os vectores  $\varepsilon^{\mu}(k,1) \in \varepsilon^{\mu}(k,2)$  são designados por polarizações transversais, enquanto que  $\varepsilon^{\mu}(k,3) \in \varepsilon^{\mu}(k,0)$  por longitudinal e

escalar respectivamente. Podemos mesmo dar um exemplo. No referencial onde  $n^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$  e  $\vec{k}$  é segundo o eixo dos zz temos

$$\varepsilon^{\mu}(k,0) \equiv (1,0,0,0) \; ; \; \varepsilon^{\mu}(k,1) \equiv (0,1,0,0)$$
  
$$\varepsilon^{\mu}(k,2) \equiv (0,0,1,0) \; ; \; \varepsilon^{\mu}(k,3) \equiv (0,0,0,1)$$
(1.218)

Em geral pode-se mostrar que

$$\varepsilon(k,\lambda) \cdot \varepsilon^*(k,\lambda') = g^{\lambda\lambda'}$$
$$\sum_{\lambda} g^{\lambda\lambda} \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) \varepsilon^{*\nu}(k,\lambda) = g^{\mu\nu}$$
(1.219)

Inserindo a expansão (1.215) em (1.213) obtemos

$$[a(k,\lambda), a^{\dagger}(k',\lambda')] = -g^{\lambda\lambda'} 2k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$
(1.220)

mostrando mais uma vez que o quanta associado a  $\lambda = 0$  tem uma relação de comutação com o sinal trocado. Antes de atacarmos este problema podemos ainda verificar que a generalização da Eq. (1.213) para tempos arbitrários é

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -ig_{\mu\nu}\Delta(x, y)$$
(1.221)

mostrando bem o carácter covariante da teoria. A função  $\Delta(x-y)$  é a mesma que foi introduzida para os campos escalares.

Portanto, até aqui, tudo se passa como se fossem 4 campos escalares. Há no entanto o problema do sinal diferente num dos comutadores. Vamos ver as consequências desse sinal. Para isso introduzimos o vácuo definido por

$$a(k,\lambda)|0\rangle = 0$$
  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  (1.222)

Para encontrarmos o problema construímos o estado de 1 - partícula com polarização escalar

$$|1\rangle = \int \widetilde{dk} \ f(k)a^{\dagger}(k,0) \left|0\right\rangle \tag{1.223}$$

e calculemos a sua norma

$$\langle 1|1\rangle = \int \widetilde{dk_1} \widetilde{dk_2} f^*(k_1) f(k_2) \left\langle 0|a(k_1,0)a^{\dagger}(k_2,0)|0\right\rangle$$
  
=  $-\langle 0|0\rangle \int \widetilde{dk} |f(k)|^2$  (1.224)

onde se usou a Eq. (1.220) para  $\lambda = 0$ . O estado  $|1\rangle$  tem norma negativa. O mesmo cálculo para as outras polarizações dá normas positivas. Assim concluímos que o

nosso espaço de Fock tem métrica indefinida. Que acontece então à interpretação probabilística da mecânica quântica?

Para resolver este problema notemos que de facto não estamos a trabalhar com a teoria de Maxwell pois modificamos o Lagrangeano. O que nós gostaríamos era de impor a condição  $\partial \cdot A = 0$  mas é impossível como equação para operadores pois então  $\pi^0 = 0$  e voltaríamos a ter os problemas iniciais. Podemos no entanto exigir aquela condição dum modo mais fraco, como sendo uma condição a ser verificada somente pelos estados físicos. Especificamente, exigimos que a parte de  $\partial \cdot A$  que contém o operador de aniquilação (frequências positiva) anula os estados físicos

$$\partial^{\mu} A^{(+)}_{\mu} \left| \psi \right\rangle = 0 \tag{1.225}$$

Os estados  $|\psi\rangle$  podem ser escritas na forma

$$\left|\psi\right\rangle = \left|\psi_{T}\right\rangle\left|\phi\right\rangle \tag{1.226}$$

onde  $|\psi_T\rangle$  é obtido a partir do vácuo com operadores de criação com polarização transversal e  $|\phi\rangle$  com polarização escalar e longitudinal. Esta decomposição depende claro de escolha dos vectores de polarização. Para vermos as consequências da Eq. (1.225) basta analisar os estados  $|\phi\rangle$  pois  $\partial^{\mu}A^{(+)}_{\mu}$  envolve apenas polarização escalar e longitudinal

$$i\partial \cdot A^{(+)} = \int \widetilde{dk} \ e^{-ik \cdot x} \sum_{\lambda=0,3} a(k,\lambda) \ \varepsilon(k,\lambda) \cdot k \tag{1.227}$$

pelo que a Eq. (1.225) se reduz a

$$\sum_{\lambda=0,3} k \cdot \varepsilon(k,\lambda) \ a(k_1\lambda) |\phi\rangle = 0$$
(1.228)

A condição (1.228) não determina completamente  $|\phi\rangle$ . De facto há muita arbitrariedade na escolha dos vectores de polarização transversal, aos quais podemos sempre adicionar um termo proporcional a  $k^{\mu}$  pois  $k \cdot k = 0$ . Esta arbitrariedade deve-se reflectir na escolha de  $|\phi\rangle$ . A condição (1.228) é equivalente a

$$[a(k,0) - a(k,3)] |\phi\rangle = 0$$
 (1.229)

Podemos construir  $|\phi\rangle$  como uma combinação linear de estados  $|\phi_n\rangle$  com n fotões escalares ou longitudinais:

$$|\phi\rangle = C_0 |\phi_0\rangle + C_1 |\phi_1\rangle + \dots + C_n |\phi_n\rangle + \dots$$
$$|\phi_0\rangle \equiv |0\rangle$$
(1.230)

Os estados  $|\phi_n\rangle$ são estados próprios de operadores número para fotões longitudinais e escalares

$$N' \left| \phi_n \right\rangle = n \left| \phi_n \right\rangle \tag{1.231}$$

onde

$$N' = \int \widetilde{dk} \left[ a^{\dagger}(k,3)a(k,3) - a^{\dagger}(k,0)a(k,0) \right]$$
(1.232)

Então

$$n \langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | N' | \phi_n \rangle = 0 \tag{1.233}$$

onde se usou a Eq. (1.229). Isto quer dizer que

$$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \delta_{n0} \tag{1.234}$$

ou seja, para  $n\neq 0~$ o estado $~|\phi_n\rangle$ tem norma zero. Então para o estado geral $|\phi\rangle$ obtemos

$$\langle \phi | \phi \rangle = |C_0|^2 \ge 0 \tag{1.235}$$

e os coeficientes  $C_i, i = 1, \dots, n \dots$  são arbitrários. Temos que mostrar que esta arbitrariedade não afecta as observáveis físicas. O Hamiltoniano é

$$H = \int d^{3}x : \pi^{\mu}\dot{A}_{\mu} - \mathcal{L}:$$
  
=  $\frac{1}{2}\int d^{3}x : \sum_{i=1}^{3} \left[\dot{A}_{i}^{2} + (\vec{\nabla}A_{i})^{2}\right] - \dot{A}_{0}^{2} - (\vec{\nabla}A_{0})^{2}:$   
=  $\int d\tilde{k} \ k^{0} \left[\sum_{\lambda=1}^{3} a^{\dagger}(k,\lambda)a(k,\lambda) - a^{\dagger}(k,0)a(k,0)\right]$  (1.236)

É fácil de ver que se  $|\psi\rangle$  for um estado físico então

$$\frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\left\langle \psi_T | \int \widetilde{dk} \ k^0 \sum_{\lambda=1}^2 a^{\dagger}(k,\lambda) a(k,\lambda) | \psi_T \right\rangle}{\langle \psi_T | \psi_T \rangle}$$
(1.237)

e a arbitrariedade dos estados físicos desaparece por completo quando tomamos valores médios. Além disso só as polarizações físicas transversais contribuem para o resultado. Pode-se mostrar (ver problema 2.10) que a arbitrariedade de  $|\phi\rangle$  está relacionada com uma transformação de gauge dentro da classe das gauges de Lorentz.

É importante notar que embora para valores médios de observáveis físicos só as polarizações transversais contam, as polarizações longitudinal e escalar são necessárias para a consistência da teoria. Em particular elas aparecem quando se consideram somas completas sobre estados intermédios.

A invariância para translações é facilmente mostrada. Para isso escrevemos

Capítulo 1. Quantificação dos Campos Livres

$$P^{\mu} = \int \widetilde{dk} \ k^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{3} (-g^{\lambda\lambda)} a^{\dagger}(k,\lambda) a(k,\lambda)$$
(1.238)

Então

$$i[P^{\mu}, A^{\nu}] = \int \widetilde{dk} \ \widetilde{dk}' ik^{\mu} \sum_{\lambda, \lambda'} (-g^{\lambda\lambda}) \left\{ \left[ a^{\dagger}(k, \lambda) a(k, \lambda), a(k', \lambda') \right] \varepsilon^{\nu}(k', \lambda') e^{-ik \cdot x} \right. \\ \left. + \left[ a^{\dagger}(x, \lambda) a(k, \lambda), a^{\dagger}(k', \lambda') \right] \varepsilon^{*\nu}(k', \lambda') e^{ik' \cdot x} \right\} \\ = \int \widetilde{dk} \ ik^{\mu} \sum_{\lambda} \left[ a(k, \lambda) \varepsilon^{\nu}(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} - a^{\dagger}(k, \lambda) \varepsilon^{\nu}(k, \lambda) e^{ik \cdot x} \right] \\ = \partial^{\mu} A^{\nu}$$

$$(1.239)$$

o que mostra a invariância para translações.

De modo semelhante se pode mostrar para as transformações de Lorentz (ver Problema 1.11). Para isso é preciso notar que

$$M^{ik} = \int d^3x : \left[ x^j T^{0k} - x^k T^{0j} + E^j A^k - E^k A^j \right] : \qquad (1.240)$$

$$M^{0i} = \int d^3x : \left[ x^0 T^{0i} - x^i T^{00} - (\partial \cdot A) A^i - E^i A^0 \right] :$$
 (1.241)

onde

$$T^{0i} = -(\partial \cdot A)J^{i}A^{0} - E^{k}\partial^{i}A^{k}$$
  

$$T^{00} = \sum_{i=1}^{3} \left[\dot{A}_{i}^{2} + (\vec{\nabla}A_{j})^{2}\right] - \dot{A}_{0}^{2} - (\vec{\nabla}A_{0})^{2}$$
(1.242)

Usando estas expressões é possível mostrar que o fotão tem helicidade  $\pm 1$  correspondendo a spin 1. Para isso comecemos por escolher a direcção de  $\vec{k}$  como o eixo 3 e tomemos para vector de polarização a escolha da Eq. (1.218). Um estado físico de 1 fotão será então (não normalizado)

$$|k,\lambda\rangle = a^{\dagger}(k,\lambda)|0\rangle \qquad \lambda = 1,2$$
 (1.243)

Vamos ver o momento angular segundo o eixo 3. Isto deverá ser

$$M^{12} |k, \lambda\rangle = M^{12} a^{\dagger}(k, \lambda) |0\rangle$$
  
=  $[M^{12}, a^{\dagger}(k, \lambda)] |0\rangle$  (1.244)

onde se usou o facto de que o vácuo satisfaz  $M^{12} |0\rangle = 0$ . O operador  $M^{12}$  tem uma parte que corresponde ao momento angular orbital e outra que diz respeito ao spin. A parte do momento angular orbital é nula (momento angular na direcção do movimento) como se pode ver calculando o comutador. De facto o resultado do comutador com o momento angular orbital é proporcional a  $k^1$  ou  $k^2$  que por hipótese são nulos. Calculemos a parte de spin. Usando a notação

$$A^{\mu} = A^{\mu(+)} + A^{\mu(-)} \tag{1.245}$$

onde  $A^{\mu(+)}(A^{\mu(-)})$  corresponde às frequências positivas (negativas) temos

$$: E^{1}A^{2} - E^{2}A^{1} := E^{1(+)}A^{2(+)} + E^{1(-)}A^{2(+)} + A^{2(-)}E^{1(+)} + E^{1(-)}A^{2(-)} - (1 \leftrightarrow 2)$$
(1.246)

Então

$$\begin{bmatrix} : E^{1}A^{2} - E^{2}A^{1} :, a^{\dagger}(k,\lambda) \end{bmatrix} = \\ = E^{1(+)} \left[ A^{2}(+), a^{\dagger}(k,\lambda) \right] + \left[ E^{1(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda) \right] A^{2(+)} \\ + E^{1}(-) \left[ A^{2}(+), a^{\dagger}(k,\lambda) \right] + A^{2(-)} \left[ E^{1(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda) \right] - (1 \leftrightarrow 2) \\ = E^{1} \left[ A^{2(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda) \right] + A^{2} \left[ E^{1(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda) \right] - (1 \leftrightarrow 2)$$
(1.247)

Agora (recordar que  $\lambda = 1, 2$ )

$$\begin{split} [A^{2(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda)] &= \int \widetilde{dk}' \sum_{\lambda'} \varepsilon^{2}(k',\lambda') \left[ a(k',\lambda'), a^{\dagger}(k,\lambda) \right] e^{-ik'\cdot x} \\ &= \varepsilon^{2}(k,\lambda) e^{-ik\cdot x} \\ [E^{1(+)}, a^{\dagger}(k,\lambda)] &= \int \widetilde{dk}' \sum_{\lambda'} \left( ik'^{0} \varepsilon^{0}(k',\lambda') + ik'^{1} \varepsilon^{0}(k',\lambda') \right) \left[ a(k',\lambda'), a^{\dagger}(k,\lambda) \right] \ e^{-ik'\cdot x} \\ &= ik^{0} \varepsilon^{1}(k,\lambda) e^{-ik\cdot x} \end{split}$$
(1.248)

Então

$$\int d^3x \left[ :E^1 A^2 - E^2 A^1 :, a^{\dagger}(k,\lambda) \right]$$

$$= \int d^3x e^{-ik \cdot x} \left[ E^1 \varepsilon^2(k,\lambda) + A^2 i k^0 \varepsilon^1(k,\lambda) - E^2 \varepsilon^1(k,\lambda) + A^1 i k^0 \varepsilon^2(k,\lambda) \right]$$

$$= \int d^3x e^{-ik \cdot x} \left[ \varepsilon^1(k,\lambda) \overleftrightarrow{\partial}_0 A^2(x) - \varepsilon^2(k,\lambda) \overleftrightarrow{\partial}_0 A^1(x) \right]$$
(1.249)

onde se usou o facto de que  $E^i = -\dot{A}^i$ , i = 1, 2 para a nossa escolha de referencial e de vectores de polarização. Por outro lado temos

$$a(k,\lambda) = -i \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) A_{\mu}(x)$$
$$a^{\dagger}(k,\lambda) = i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) A_{\mu}(x)$$
(1.250)

Para a nossa escolha isto dá

$$a^{\dagger}(k,1) = -i \int d^{3}x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{0} A^{1}(x)$$
  

$$a^{\dagger}(k,2) = -i \int d^{3}x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{0} A^{2}(x) \qquad (1.251)$$

e portanto

$$[M^{12}, a^{\dagger}(k, \lambda)] = i\varepsilon^{1}(k, \lambda)a^{\dagger}(k, 2) - i\varepsilon^{2}(k, \lambda)a^{\dagger}(k, 1)$$
(1.252)

Vemos assim que o estado  $a^{\dagger}(k, \lambda) |0\rangle$ ,  $\lambda = 1, 2$  não é um estado próprio do operador  $M^{12}$ . Contudo as combinações lineares

$$a_{R}^{\dagger}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^{\dagger}(k,1) + ia^{\dagger}(k,2))$$
  

$$a_{L}^{\dagger}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^{\dagger}(k,1) - ia^{\dagger}(k,2)) \qquad (1.253)$$

representando polarização circular direita e esquerda verificam

$$[M^{12}, a_R^{\dagger}(k)] = a_R^{\dagger}(k) \; ; \; [M^{12}, a_L^{\dagger}(k)] = -a_L^{\dagger}(k) \tag{1.254}$$

mostrando portanto que o fotão tem spin 1 com polarização circular esquerda ou direita (helicidade negativa ou positiva).

## 1.4.3 O Propagador de Feynman

O propagador de Feynman é definido como o valor de expectação no vácuo do produto ordenado dos campos, isto é

$$G_{\mu\nu}(x,y) \equiv \langle 0|TA_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle = \theta(x^{0} - y^{0}) \langle 0|A_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle + \theta(y^{0} - x^{0}) \langle 0|A_{\nu}(y)A_{\mu}(x)|0\rangle$$
(1.255)

Inserindo as expansões para  $A_{\mu}(x) \in A_{\nu}(y)$  obtemos

$$G_{\mu\nu}(x-y) = -g_{\mu\nu} \int \widetilde{dk} \left[ e^{-ik \cdot (x-y)} \theta(x^0 - y^0) + e^{ik \cdot (x-y)\theta(y^0 - x^0)} \right]$$
  
=  $-g_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}$   
=  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G_{\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (x-y)}$  (1.256)

onde  $G_{\mu\nu}(k)$  é o propagador de Feynman no espaço dos momentos

$$G_{\mu\nu}(k) \equiv \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{1.257}$$

É fácil de mostrar que  $G_{\mu\nu}(x-y)$  é a função de Green da equação do movimento que neste caso ( $\xi = 1$ ) é a equação das ondas, isto é

$$\Box_x G_{\mu\nu}(x-y) = ig_{\mu\nu}\delta^4(x-y) \tag{1.258}$$

Estas expressões para  $G_{\mu\nu}(x-y) \in G_{\mu\nu}(k)$  correspondem ao caso particular em que  $\xi = 1$  na Eq. (1.205). É a chamada gauge de Feynman. Para o caso geral de  $\xi \neq 1$ , a equação de movimento é

$$\left[\Box_x g^{\mu}_{\rho} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^{\mu} \partial_{\rho}\right] A^{\rho}(x) = 0$$
(1.259)

Para este caso ( $\xi \neq 1$ ) as relações de comutação a tempos iguais são mais complicadas (ver Problema 1.12). Usando essas relações é possível mostrar que o propagador de Feynman continua a ser a função de Green do operador da equação de movimento, isto é,

$$\left[\Box_x g^{\mu}_{\rho} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial_{\rho}\right] \langle 0|TA^{\rho}(x)A^{\nu}(y)|0\rangle = ig^{\mu\nu}\delta^4(x-y)$$
(1.260)

Usando esta forma para o propagador é então possível obter

$$G_{\mu\nu}(k) = -i\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} + i(1-\xi)\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 + i\varepsilon)^2}$$
(1.261)

numa gauge arbitrária (do tipo de Lorentz).

# **1.5** Simetrias Discretas

Sabe-se do estudo da equação de Dirac que as operações inversão no espaço (Paridade) e conjugação de carga são simetrias da equação de Dirac. Mais concretamente, se  $\psi(x)$  for uma solução da equação de Dirac então

$$\psi'(x) = \psi'(-\vec{x}, t) = \gamma_0 \psi(\vec{x}, t)$$
(1.262)

$$\psi^c(x) = C\overline{\psi}^T(x) \tag{1.263}$$

também o são (tomando a carga -e para  $\psi^c$ ). Operações semelhantes se podem definir para campos escalares e vectoriais.

Com a segunda quantificação os campos deixam de ser funções e passam a ser operadores. Temos então que encontrar operadores unitários  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$  que descrevam essas operações dentro do formalismo da segunda quantificação. Existe ainda uma outra simetria discreta, a inversão no tempo que ao nível da segunda quantificação será descrita por um operador antiunitário  $\mathcal{T}$ . Vamos exemplificar com o caso do campo escalar como se constroem estes operadores para o caso de campos livres. Os campos de Dirac e Maxwell são deixados como exercícios.

#### 1.5.1 Paridade

Para definir o significado da operação de Paridade temos que pôr o sistema em interacção com o sistema da medida considerado sistema clássico. Isto quer dizer que consideramos o sistema descrito por

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - j_{\mu}(x) A^{\mu}_{ext}(x)$$
 (1.264)

onde se considerou que a interacção é electromagnética.  $j_{\mu}(x)$  é a corrente electromagnética que tem a forma:

$$j_{\mu}(x) = ie : \varphi^* \overleftarrow{\partial}_{\mu} \varphi :$$
 campo escalar  
 $j_{\mu}(x) = e : \overline{\psi} \gamma_{\mu} \psi :$  campo de Dirac (1.265)

Numa transformação de Paridade invertemos o sistema de medida pelo que os campos clássicos exteriores são agora

$$A_{ext}^{\mu} = (A_{ext}^{0}(-\vec{x},t)) - \vec{A}(-\vec{x},t) = A_{\mu}(-\vec{x},t)$$
(1.266)

Para que a dinâmica do novo sistema seja idêntica à do original (o que se deve passar se a Paridade for conservada) é necessário que as equações do movimento não mudem. Isto é garantido se

$$\mathcal{PL}(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{L}(-\vec{x}, t) \tag{1.267}$$

$$\mathcal{P}j_{\mu}(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} = j^{\mu}(-\vec{x},t) \tag{1.268}$$

As Eqs. (1.267) e (1.268) são as condições a que uma teoria deve obedecer para que a Paridade seja conservada. Além disso  $\mathcal{P}$  deve deixar as relações de comutação invariantes para que a dinâmica quântica seja inalterada. Para cada teoria que conserve a Paridade, deverá ser possível encontrar um operador unitário  $\mathcal{P}$  que verifique estas condições.

Vamos encontrar  $\mathcal{P}$  para o caso do campo escalar. É fácil de ver que a condição

$$\mathcal{P}\varphi(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} = \pm\varphi(-\vec{x},t) \tag{1.269}$$

satisfaz todos os requisitos. O sinal  $\pm$  é a paridade *intrínseca* da partícula descrita pelo campo  $\varphi$  (+ para escalar e – para pseudo escalares). Em termos das expansões do momento a Eq. (1.269) escreve- se

$$\mathcal{P}a(k)\mathcal{P}^{-1} = \pm a(-k) \quad ; \quad \mathcal{P}a^{\dagger}(k)\mathcal{P}^{-1} = \pm a^{\dagger}(-k)$$
 (1.270)

onde -k significa que se mudou  $\vec{k}$  em  $-\vec{k}$  (mas  $k^0$  ficou inalterado, isto é, :  $k^0 = +\sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ ). É mais fácil resolver a Eq. (1.270) no espaço dos momentos. Como  $\mathcal{P}$  deverá ser unitário introduzimos

$$\mathcal{P} = e^{iP} \tag{1.271}$$

Então

$$\mathcal{P}a(k)\mathcal{P}^{-1} = a(k) + i[P, a(k)] + \dots + \frac{i^{\mu}}{n!}[P, [\dots, [P, a(k)] \dots] + \dots$$
  
=  $-a(-k)$  (1.272)

onde escolhemos o caso do campo pseudo-escalar.

A Eq. (1.272) sugere a forma

$$[\mathcal{P}, a(k)] = \frac{\lambda}{2} [a(k) + \varepsilon a(-k)]$$
(1.273)

onde  $\lambda$  e  $\varepsilon=\pm 1$ são a determinar. Obtemos

$$\left[\mathcal{P}, \left[\mathcal{P}, a(k)\right]\right] = \frac{\lambda^2}{2} [a(k) + \varepsilon a(-k)] \tag{1.274}$$

e portanto

$$Pa(k)P^{-1} = a(k) + \frac{1}{2} \left[ i\lambda + \frac{(i\lambda)^2}{2!} + \dots + \frac{(i\lambda)^4}{n!} + \dots \right] (a(k) + \varepsilon a(-k))$$
  
=  $\frac{1}{2} [a(k) - \varepsilon a(-k)] + \frac{1}{2} e^{i\lambda} [a(k) + \varepsilon a(-k)]$   
=  $-a(-k)$  (1.275)

Resolvemos a Eq. (1.275) se escolhermos  $\lambda = \pi$  e  $\varepsilon = +1$  ( $\lambda = \pi$  e  $\varepsilon = -1$  para o caso do campo escalar). É então fácil de ver que

$$P_{ps} = -\frac{\pi}{2} \int d\tilde{k} \, \left[ a^{\dagger}(k)a(k) + a^{\dagger}(k)a(-k) \right] = P_{ps}^{\dagger} \tag{1.276}$$

é solução da Eq. (1.273) para  $\lambda=\pi$ e $\varepsilon=+1.$  Então

$$\mathcal{P}_{ps} = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\int \widetilde{dk} \left[a^{\dagger}(k)a(k) + a^{\dagger}(k)a(-k)\right]\right\}$$
(1.277)

e para o campo escalar

$$\mathcal{P}_s = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\int \widetilde{dk} \left[a^{\dagger}(k)a(k) - a^{\dagger}(k)a(-k)\right]\right\}$$
(1.278)

Para o caso do campo de Dirac a condição equivalente à Eq. (1.269) é agora

$$\mathcal{P}\psi(\vec{x},t)\mathcal{P}^{-1} = \gamma^0\psi(-\vec{x},t) \tag{1.279}$$

Repetindo os mesmos passos obtemos

$$\mathcal{P}_{Dirac} = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\int \widetilde{dp} \left[b^{\dagger}(p_{1}s)b(p,s) - b^{\dagger}(p,s)b(-p,s) + d^{\dagger}(p,s)d(p,s) + d^{\dagger}(p,s)d(-p\cdot s)\right]\right\}$$
(1.280)

O caso do campo de Maxwell é deixado como exercício.

# 1.5.2 Conjugação de carga

As condições para haver invariância são agora

$$\mathcal{CL}(x)\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{L} \quad ; \quad \mathcal{C}j_{\mu}\mathcal{C}^{-1} = -j_{\mu}$$
 (1.281)

onde  $j_{\mu}$ é a corrente electromagnética. As condições (1.281) são verificadas para os campos escalares carregados se

$$\mathcal{C}\varphi(x)\mathcal{C}^{-1} = \varphi^*(x) \quad ; \quad \mathcal{C}\varphi^*(x)\mathcal{C}^{-1} = \varphi(x)$$
 (1.282)

e para o campo de Dirac se

$$C\psi_{\alpha}(x)C^{-1} = C_{\alpha\beta} \ \overline{\psi}_{\beta}(x)$$
  
$$C\overline{\psi}_{\alpha}(x)C^{-1} = -\psi_{\beta}(x)C_{\beta\alpha}^{-1} \qquad (1.283)$$

onde Cé a matriz de conjugação de carga. Finalmente para que  $j_\mu A^\mu$  seja invariante devemos ter para o campo electromagnético

$$\mathcal{C}A_{\mu}\mathcal{C}^{-1} = -A_{\mu} \tag{1.284}$$

Usando um método semelhante ao caso de Paridade é possível encontrar o operador  ${\cal C}$  para as diversas teorias. Obtemos por exemplo, para o caso escalar

$$C_s = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}\int d\tilde{k} \ (a_+^{\dagger} - a_-^{\dagger})(a_+ - a_-)\right\}$$
(1.285)

e para o caso do campo de Dirac

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 \tag{1.286}$$

 $\operatorname{com}$ 

$$C_{1} = \exp\left\{-i\int \widetilde{dp} \sum_{s} \phi(p,s) \left[b^{\dagger}(p,s)b(p,s) - d^{\dagger}(p,s)d(p,s)\right]\right\}$$

$$C_{2} = \exp\left\{i\frac{\pi}{2}\int \widetilde{dp} \sum_{s} \left[b^{\dagger}(p,s) - d^{\dagger}(p,s)\right] \left[b(p,s) - d(p,s)\right]\right\}$$
(1.287)

onde a fase  $\phi(p, s)$  foi introduzida em (1.209)

$$v(p,s) = e^{i\phi(p,s)} u^{c}(p,s) 
 u(p,s) = e^{i\phi(p,s)} v^{c}(p,s) 
 (1.288)$$

## 1.5.3 Inversão no Tempo

Classicamente o significado da invariância para a inversão no tempo  $t \to -t$  é claro. Trocamos o sinal do tempo, as velocidades mudam de sentido e o sistema vai do que era o estado final para o estado inicial. É esta troca entre o estado inicial e final que faz que em mecânica Quântica o operador responsável pela inversão no tempo seja antilinear ou antiunitário. De facto  $\langle f|i\rangle = \langle i|f\rangle^*$  e portanto se queremos  $\langle \mathcal{T}\varphi_f|\mathcal{T}\varphi_i\rangle = \langle \varphi_i|\varphi_f\rangle$  então  $\mathcal{T}$  deve incluir a operação de efectuar o complexo conjugado. De facto pode-se escrever

$$\mathcal{T} = \mathcal{U}K \tag{1.289}$$

onde  $\mathcal U$  é unitário eK é a instrução para tomar o complexo conjugado de todos os c-numbers. Então

$$\langle T\varphi_f | T\varphi_i \rangle = \langle \mathcal{U}K\varphi_f | \mathcal{U}K\varphi_i \rangle$$

$$= \langle \mathcal{U}\varphi_f | \mathcal{U}\varphi_i \rangle^*$$

$$= \langle \varphi_f | \varphi_i \rangle^* = \langle \varphi_i | \varphi_f \rangle$$

$$(1.290)$$

como queríamos. Uma teoria será invariante para a inversão no tempo se

$$\mathcal{TL}(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}(\vec{x},-t)$$
  
$$\mathcal{T}j_{\mu}(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1} = j^{\mu}(\vec{x},-t)$$
(1.291)

Para o campo escalar esta condição é satisfeita se

$$\mathcal{T}\varphi(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1} = \pm\varphi(\vec{x},-t) \tag{1.292}$$

e para o campo electromagnético se

$$\mathcal{T}A^{\mu}(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1} = A_{\mu}(\vec{x},-t)$$
 (1.293)

tornando invariante  $j^{\mu}A_{\mu}$ . Para o campo de Dirac a transformação é

$$\mathcal{T}\psi_{\alpha}(\vec{x},t)\mathcal{T}^{-1} = T_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(\vec{x},-t)$$
(1.294)

Para que a Eq. (1.291) seja verificada é fácil de ver que a matriz T deve satisfazer

$$T\gamma_{\mu}T^{-1} = \gamma_{\mu}^{T} = \gamma^{\mu*} \tag{1.295}$$

e que na representação de Dirac temos

$$T = i\gamma^1 \gamma^3 \tag{1.296}$$

48

#### 1.5. Simetrias Discretas

Aplicando o mesmo tipo de raciocínio já usado para  $\mathcal{P} \in \mathcal{C}$  podemos agora encontrar  $\mathcal{T}$  ou equivalentemente  $\mathcal{U}$ . Por exemplo para o campo de Dirac notando que

$$Tu(p,s) = u^{*}(-p,-s)e^{i\alpha_{+}(p,s)}$$
  
$$Tv(p,s) = v^{*}(-p,-s)e^{i\alpha_{-}(p,s)}$$
 (1.297)

podemos escrever  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2$  e obter

$$\mathcal{U}_{1} = \exp\left\{-i\int \widetilde{dp} \sum_{s} \left[\alpha_{+}b^{\dagger}(p,s)b(p,s) - \alpha_{-}d^{\dagger}(p,s)d(p,s)\right]\right\}$$
(1.298)

е

$$\mathcal{U}_{2} = \exp\left\{-i\frac{\pi}{2}\int \widetilde{dp} \sum_{s} \left[b^{\dagger}(p,s)b(p,s) + b^{\dagger}(p,s)b(-p-s) - d^{\dagger}(p,s)d(p,s) - d^{\dagger}(p,s)d(-p,-s)\right]\right\}$$
(1.299)

## 1.5.4 O Teorema TCP

É um teorema fundamental da Teoria Quântica dos Campos que o produto  $\mathcal{TCP}$  é uma invariância de qualquer teoria desde que satisfaça às seguintes hipóteses gerais:

- A teoria é local e covariante debaixo de transformações de Lorentz
- A teoria é quantificada usando a relação normal entre spin e estatística, isto é, comutadores para bosões e anticomutadores para fermiões.

Este teorema que é devido a Lüdus, Zumino, Pauli e Schwinger tem como consequência importante que sempre que uma das simetrias discretas não é simetria da teoria, então uma das outras também não será para preservar a invariância do produto. Para a demonstração do teorema ver, por exemplo, os livros de Bjorken e Drell e de Itzykson e Zuber.

# Problemas Capítulo 1

1.1 Verifique para o campo escalar as relações de invariância para translações e transformação de Lorentz, i.e.

$$i[P^{\mu},\varphi] = \partial^{\mu}\varphi$$
$$i[M^{\mu\nu},\varphi] = (x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\varphi \qquad (1.300)$$

1.2 Mostre que

$$\partial^0 \Delta(x-y)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
 (1.301)

1.3 Mostre que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x-y)} = \int d\widetilde{k} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{ik \cdot (x-y)} \right]$$
(1.302)

onde  $\widetilde{dk} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}$ .

Sugestão: Integre em  $k^0$  e use a prescrição  $i\varepsilon$  para definir os contornos.

1.4 Mostre que a teoria de Dirac depois de segunda quantificação mantém a invariância para as transformações de Lorentz, isto é:

$$i[M^{\mu\nu},\varphi] = (x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})\varphi + \sigma^{\mu\nu}\varphi \quad ; \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \tag{1.303}$$

Problemas

1.5 Mostre que

$$\{\psi_{\alpha}(\vec{x},t),\psi^{\dagger}_{\beta}(\vec{y},t)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$
(1.304)

**1.6** Mostre que

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \theta(x^0 - y^0) \left\langle 0|\psi_{\alpha}(x)\overline{\psi}_{\beta}(y^*)|0\right\rangle -\theta(y^0 - x^0) \left\langle 0|\overline{\psi}_{\beta}(y)\psi_{\alpha}(x)|0\right\rangle$$
(1.305)

corresponde a

$$S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not p+m)_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$
(1.306)

**Sugestão**: Expanda  $\psi_{\alpha} \in \overline{\psi}_{\beta}$  em ondas planas.

**1.7** Mostre que

$$(i\partial_x + m)_{\alpha\beta}S_F(x-y)_{\beta\gamma} = i\delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x-y)$$
(1.307)

 ${\bf 1.8}$  Mostre que é sempre possível escolher os potenciais tais que

$$A^0 = 0 , \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$
 (gauge de Radiação) (1.308)

1.9 Mostre que se tem

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(y)] = -ig_{\mu\nu}\Delta(x-y)$$
(1.309)

#### 1.10

a) Considere o valor de expectação d<br/>e $A_{\mu}$ no estado $|\phi\rangle.$  Mostre que

$$\langle \phi | A_{\mu} | \phi \rangle = C_0^* C_1 \int \widetilde{dk} \ e^{-ik \cdot x} \langle 0 | \left[ \varepsilon_{\mu}(k,3)a(k,3) + \varepsilon_{\mu}(k,0)a(k,0) \right] | \phi_1 \rangle$$
  
+complexo conjugado (1.310)

b) Escolha o estado<br/>  $|\phi_1\rangle$ da forma

$$|\phi_1\rangle = \int \widetilde{dk} f(k) \left[ a^{\dagger}(k,3) - a^{\dagger}(k,0) \right] |0\rangle$$
 (1.311)

Mostre que

$$\langle \phi | A_{\mu} | \phi \rangle = \int \widetilde{dk} \left[ \varepsilon_{\mu}(k,3) + \varepsilon_{\mu}(k,0) \right] \left( C_0^* C_1 e^{-ik \cdot x} f(k) + c.c. \right)$$
(1.312)

c) Escolha $\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)$  reais. Mostre que

$$\varepsilon^{\mu}(k,3) + \varepsilon^{\mu}(k,0) = \frac{k^{\mu}}{(n \cdot k)}$$
(1.313)

d) Mostre que

$$\langle \phi | A_{\mu} | \phi \rangle = \partial_{\mu} \Lambda(x)$$
 (1.314)

onde

$$\Box \Lambda = 0 \tag{1.315}$$

Comente o resultado.

 $\mathbf{1.11}$ Mostre a covariância de teoria para transformações de Lorentz, isto é

$$i[M^{\mu\nu}, A^{\lambda}] = (x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu})A^{\lambda} + \Sigma^{\mu\nu,\lambda}{}_{\sigma}A^{\sigma}$$
(1.316)

onde

$$\Sigma^{\mu\nu,\lambda\sigma} = g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\lambda\nu} \tag{1.317}$$

 ${\bf 1.12}$  Mostre que no caso geral de  $\xi \neq 1$  temos

$$\begin{split} [A_{\mu}(\vec{x},t), A_{\nu}(\vec{y},t)] &= 0\\ [\dot{A}_{\mu}(\vec{x},t), A_{\nu}(\vec{y},t)] &= ig_{\mu\nu} \left[1 - (1-\xi)g_{\mu0}\right] \delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})\\ [\dot{A}_{i}(\vec{x},t), \dot{A}_{j}(\vec{y},t)] &= [\dot{A}_{0}(\vec{x},t), \dot{A}_{0}(\vec{y},t)] = 0\\ [\dot{A}_{0}(\vec{x},t), \dot{A}_{i}(\vec{y},t)] &= i(1-\xi)\partial_{i}\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y}) \end{split}$$
(1.318)

Problemas

1.13Utilize os resultados do problema anterior para mostrar que se tem

$$\left[\Box_x g^{\mu}{}_{\rho} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial_{\rho}\right] \langle 0|TA^{\rho}(x)A^{\nu}(y)|0\rangle = ig^{\mu\nu}\delta^4(x-y)$$
(1.319)

onde

$$\left(\Box g^{\mu}\rho - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^{\mu}\partial_{\rho}\right)A^{\rho} = 0$$
(1.320)

1.14 Encontrar o operador  $\mathcal{P}$  para os campos de Dirac e Maxwell.

1.15 Obtenha o operador  $\mathcal{C}$  para os campos escalares, de Dirac e de Maxwell.

 $1.16 \ {\rm Mostre} \ {\rm que}$ 

$$\mathcal{T}\psi_{\alpha}(\vec{x},t)T^{-1} = \mathcal{T}_{\alpha\beta}\psi_{\beta}(\vec{x},-t)$$
(1.321)

garante

$$\mathcal{TL}(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}(\vec{x}, -t)$$
(1.322)

des<br/>de que  $T\gamma_{\mu}T^{-1}=\gamma^{\mu*}.$  Encontrar Tna representação de Dirac.

1.17 Encontrar o operador  $\mathcal{T}$  para os campos escalares, de Dirac e de Maxwell.

#### 1.18 Considere o Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \overline{\psi} i \gamma^{\mu} D_{\mu} P_L \psi - m \overline{\psi} \psi \tag{1.323}$$

onde

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + iA_{\mu}^{a} \frac{\tau^{a}}{2}$$

$$P_{L} = \frac{1 - \gamma_{5}}{2}$$
(1.324)

Mostre que a teoria não é invariante para  $\mathcal{P}$  nem para  $\mathcal{C}$  mas sim para o produto  $\mathcal{CP}$ .

# Capítulo 2

# Estados Físicos. Matriz S. Redução LSZ.

# 2.1 Estados Físicos

Vimos no capítulo anterior, para o caso de campos livres, como construir o espaço dos estados da teoria, o chamado espaço de Fock. Quando consideramos o problema físico real com as interacções presentes não mais seremos capazes de resolver o problema exactamente. Por exemplo, a interacção entre electrão e fotões é dada por um conjunto de equações não lineares acopladas

$$(i\partial \!\!\!/ - m)\psi = eA\psi$$
$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = e\overline{\psi}\gamma^{\nu}\psi \qquad (2.1)$$

que não têm solução exacta. Na prática teremos que recorrer a métodos aproximados. No capítulo seguinte veremos como desenvolver uma teoria das perturbações covariante. Aqui vamos somente estudar as propriedades gerais da teoria.

Comecemos pelos estados físicos. Como não sabemos resolver o problema exactamente não podemos provar as hipóteses que vamos sobre eles fazer. No entanto estas são hipóteses *razoáveis* baseadas essencialmente na covariância de Lorentz. Escolhemos os nossos estados como estados próprios de energia e momento linear, e claro de todas as demais observáveis que comutem com  $P^{\mu}$ . Além disto admitimos que

- i) Os valores próprios de  $p^2$  são não negativos e  $p^0 > 0$ .
- ii) Existe um estado base não degenerado com a energia mínima que é invariante de Lorentz. Designa-se este estado por vácuo  $|0\rangle$  e por convenção

$$p^{\mu} \left| 0 \right\rangle = 0 \tag{2.2}$$

iii) Existem estados de uma partícula  $\left| p^{(i)} \right\rangle$  tais que

$$p_{\mu}^{(i)} p^{(i)\mu} = m_i^2 \tag{2.3}$$

para cada partícula estável de massa  $m_i$ .

iv) O vácuo e os estados de uma partícula formam um espectro discreto de  $p^{\nu}$ .

# 2.2 Estados in

Como estamos sobretudo interessados em problemas de difusão (Scattering) devemos construir estados que tenham uma interpretação simples quando  $t \to -\infty$ . Neste instante as partículas que vão participar na difusão ainda não interagiram umas com as outras e movem-se somente sob a acção das interacções próprias (supomos que as interacções são desligadas adiabaticamente quando  $|t| \to \infty$ , o que é apropriado para problemas de difusão).

Procuramos operadores criando estados de uma partícula propagando- se com a massa física. Para sermos explícitos comecemos por um campo escalar hermítico dado pelo lagrangeano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^{\mu} \varphi \partial_{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + j(x) \varphi(x)$$
(2.4)

onde a corrente j(x) é um operador escalar construído pelos campos interactuando com  $\varphi$  no ponto x. Por exemplo, essas interacções podem ser auto-interacções de forma

$$j(x)\varphi(x) = \frac{\lambda}{4!}\varphi^4(x) \tag{2.5}$$

ou seja

$$j(x) = \frac{\lambda}{4!} \varphi^3(x) \tag{2.6}$$

O campo  $\varphi$  satisfaz a equação de movimento

$$(\Box + m^2)\varphi(x) = j(x) \tag{2.7}$$

e as relações de comutação canónicas, a tempos iguais;

$$[\varphi(\vec{x},t)\varphi(\vec{y},t)] = [\pi(\vec{x},t)\pi(\vec{x},t)] = 0$$
  
$$[\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = -i\delta^{3}(\vec{x}-\vec{y})$$
(2.8)

onde

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) \tag{2.9}$$

se admitirmos que j(x) não contém derivadas. Designemos por  $\varphi_{in}(x)$  o operador que cria estados de uma partícula. Será um funcional dos campos  $\varphi(x)$  e doutros campos presentes em j(x). A sua existência será mostrada por construção explicita.

Exigimos que  $\varphi_{in}(x)$  satisfaça as condições:

i)  $\varphi_{in}(x)$  transforma-se para translações e transformações de Lorentz da mesma maneira do que  $\varphi(x)$ . Para translações temos então

$$i\left[P^{\mu},\varphi_{in}(x)\right] = \partial^{\mu}\varphi_{in}(x) \tag{2.10}$$

ii) A evolução no espaço tempo de  $\varphi_{in}(x)$  corresponde a uma partícula livre de massa m, isto é

$$(\Box + m^2)\varphi_{in}(x) = 0 \tag{2.11}$$

Destas duas definições resulta que  $\varphi_{in}(x)$  cria estados de uma partícula a partir do vácuo. De facto consideremos um estados  $|n\rangle$  tal que

$$P^{\mu} = p_n^{\mu} \left| n \right\rangle \tag{2.12}$$

Então

$$\partial^{\mu} \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = i \langle n | [P^{\mu}, \varphi_{in}(x)] | 0 \rangle$$
  
=  $i p_{n}^{\mu} \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle$  (2.13)

e portanto

$$\Box \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = -p_n^2 \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle$$
(2.14)

Então

$$(\Box + m^2) \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = (m^2 - p_n^2) \langle n | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = 0$$
(2.15)

onde se usou o facto de que  $\varphi_{in}(x)$  é um campo livre (3.7). Portanto os vários estados criados do vácuo por  $\varphi_{in}$  são aqueles em que  $p_n^2 = m^2$ , isto é, estados de uma partícula de massa m.

A decomposição de Fourier de  $\varphi_{in}(x)$  é então a mesma do que para campos livres, isto é,

$$\varphi_{in}(x) = \int \widetilde{dk} \left[ a_{in}(k)e^{-ik\cdot x} + a_{in}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x} \right]$$
(2.16)

onde  $a_{in}(k) e a_{in}^{\dagger}(k)$  satisfazem a álgebra usual de operadores de destruição e criação. Em particular, por aplicação sucessiva de  $a_{in}^{\dagger}(k)$  podemos criar um estado de *n* partículas.

Para escrever  $\varphi_{in}(x)$  em termos de  $\varphi(x) \in j(x)$  comecemos por introduzir a função de Green retardada do operador de K.G.

$$(\Box_x + m^2)\Delta_{ret}(x - y; m) = \delta^4(x - y)$$
(2.17)

onde

$$\Delta_{ret}(x - y; m) = 0 \quad \text{se} \quad x^0 < y^0 \tag{2.18}$$

Então podemos escrever

$$\sqrt{Z}\varphi_{in}(x) = \varphi(x) - \int d^4y \Delta_{ret}(x-y;m)j(y)$$
(2.19)

O campo  $\varphi_{in}(x)$  definido por (3.15) satisfaz as duas condições iniciais. A constante  $\sqrt{Z}$  foi introduzida para normalizar  $\varphi_{in}$  de tal forma que tenha amplitude 1 para criar estados de uma partícula do vácuo. O facto de que  $\Delta_{ret} = 0$  para  $x_0 \to -\infty$  sugere que  $\sqrt{Z}\varphi_{in}(x)$  é, de alguma forma, um limite de  $\varphi(x)$  quando  $x_0 \to -\infty$ . De facto como  $\varphi$  e  $\varphi_{in}$  são operadores, a condição assimptótica correcta deve ser imposta aos seus elementos de matriz. Sejam  $|\alpha\rangle \in |\beta\rangle$  dois estados normalizados. Definimos os operadores

$$\varphi^{f}(t) = i \int d^{3}x f^{*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_{0} \varphi(x)$$
$$\varphi^{f}_{in} = i \int d^{3}x f^{*}(x) \overleftrightarrow{\partial}_{0} \varphi_{in}(x)$$
(2.20)

onde f(x) é uma solução normalizável da equação de K.G. Pelo teorema de Green  $\varphi_{in}^f$  não depende do tempo (para ondas planas  $f = e^{-ik \cdot x} e \varphi_{in}^f = a_{in}$ ). Então a condição assimptótica (Lehmann, Symanzik e Zimmermann) é:

$$\lim_{t \to -\infty} \langle \alpha | \varphi^{f}(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \varphi^{f}_{in} | \beta \rangle$$
(2.21)

# 2.3 Representação espectral para campos escalares

Vimos que Z tinha o significado do quadrado de amplitude de  $\varphi(x)$  para produzir estados de uma partícula do vácuo. Vamos agora encontrar uma expressão formal para Z e mostrar que  $0 \le Z \le 1$ .

Comecemos por calcular o valor de expectação no vácuo do comutador de dois campos

$$i\Delta'(x,y) \equiv \langle 0 | [\varphi(x),\varphi(y)] | 0 \rangle \tag{2.22}$$

Como não sabemos resolver as equações para os campos  $\varphi$  não podemos resolver exactamente o problema de determinar  $\Delta'$  ao contrário do caso de campos livres. Podemos no entanto determinar a sua forma usando argumentos gerais de invariância de Lorentz e o espectro assumido pelos estados físicos.

Para isso introduzimos um conjunto completo de estados entre os dois operadores na Eq. (2.22) e usamos invariância para translações para escrever

$$\langle n|\varphi(y)|m\rangle = \langle n|e^{iP\cdot y}\varphi(0)e^{-iP\cdot y}|m\rangle$$

$$= e^{i(p_n-p_m)\cdot y} \langle n|\varphi(0)|m\rangle$$

$$(2.23)$$

Então

$$\Delta'(x,y) = -i\sum_{n} \langle 0|\varphi(0)|n\rangle \langle n|\varphi(0)|0\rangle \left(e^{-ip_{n}\cdot(x-y)} - e^{ip_{n}\cdot(x-b)}\right)$$
$$\equiv \Delta'(x-y) \tag{2.24}$$

isto é, tal como no caso livre,  $\Delta'$  é uma função de x - y. Introduzindo agora

$$1 = \int d^4q \ \delta^4(q - p_n) \tag{2.25}$$

obtemos

$$\Delta'(x-y) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \left[ (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p_n-q) |\langle 0|\varphi(0)|n\rangle|^2 \right] (e^{-iq\cdot(x-y)} - e^{iq\cdot(x-y)})$$
  
$$= -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \rho(q) (e^{-iq\cdot(x-y)} - e^{iq\cdot(x-y)})$$
(2.26)

onde introduzimos a densidade  $\rho(q)$  (amplitude espectral)

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \sum_{n} \delta^4(p_n - q) |\langle 0|\varphi|0\rangle |n\rangle|^2$$
(2.27)

que mede a contribuição para  $\Delta'$  dos estados com 4– momento  $q^{\mu}$ .  $\rho(q)$  é invariante para transformações de Lorentz (como se pode mostrar usando a invariância de  $\varphi(x)$ e as propriedades do vácuo e dos estados  $|n\rangle$ ) e anula-se quando q não está no cone de luz do futuro (devido às propriedades assumidas para os estados físicos). Então podemos escrever

$$\rho(q) = \overline{\rho}(q^2)\theta(q^0) \tag{2.28}$$

 ${\rm e}~{\rm obtemos}$ 

$$\Delta'(x-y) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \overline{\rho}(q^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)})$$
  
$$= -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \int d\sigma^2 \delta(q^2 - \sigma^2) \overline{\rho}(\sigma^2) \theta(q^0) \left[ e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)} \right]$$
  
$$= \int_0^\infty d\sigma^2 \overline{\rho}(\sigma^2) \Delta(x-y;\sigma)$$
(2.29)

onde

$$\Delta(x-y;\sigma) = -i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 - \sigma^2) \theta(q^0) (e^{-iq \cdot (x-y)} - e^{iq \cdot (x-y)})$$
(2.30)

é a função invariante definida para o comutador de campos livres com massa  $\sigma$ .

A expressão (3.25) é conhecida como a decomposição espectral do comutador de dois campos. Esta expressão vai-nos permitir mostrar que  $0 \le Z < 1$ . Para isso separamos os estados de uma partícula da soma (3.23). Seja  $|p\rangle$  um estado de uma partícula de momento p. Então

$$\langle 0|\varphi(x)|p\rangle = \sqrt{Z} \langle 0|\varphi_{in}(x)|p\rangle + \int d^4y \Delta_{ret}(x-y;m) \langle 0|j(y)|p\rangle$$

$$= \sqrt{Z} \langle 0|\varphi_{in}(x)|p\rangle$$

$$(2.31)$$

pois

$$\langle 0|j(y)|p\rangle = \left\langle 0|(\Box + m^2)\varphi(y)|p\right\rangle =$$
  
=  $(\Box + m^2)e^{-ip\cdot y} \left\langle 0|\varphi(0)|p\right\rangle$   
=  $(m^2 - p^2)e^{-ip\cdot y} \left\langle 0|\varphi(0)|p\right\rangle = 0$  (2.32)

Por outro lado

#### 2.4. Estados out

$$\langle 0|\varphi_{in}(x)|p\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik \cdot x} \langle 0|a_{in}(k)|p\rangle$$
$$= e^{-ip \cdot x}$$
(2.33)

e portanto

$$\rho(q) = (2\pi)^3 \int \widetilde{dq} \, \delta^4(p-q)Z + \text{ contribuições de mais que uma partícula}$$
$$= Z\delta(q^2 - m^2)\theta(q^0) + \cdots$$
(2.34)

Então

$$\Delta'(x-y) = Z\Delta(x-y;m) + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \overline{\rho}(\sigma^2) \Delta(x-y;\sigma)$$
(2.35)

onde  $m_1$  é a massa do menor estado de duas ou mais partículas. Notando finalmente que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \Delta'(x-y)|_{x^0=y^0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x-y;\sigma)|_{x^0=y^0} = -\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$
(2.36)

obtemos a relação pretendida

$$1 = Z + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \overline{\rho}(\sigma^2) \tag{2.37}$$

ou

$$0 \le Z < 1 \tag{2.38}$$

onde a última equação resulta da positividade de  $\overline{\rho}(\sigma^2)$ .

# 2.4 Estados out

Tal como reduzimos a dinâmica para  $t \to -\infty$  a campos livres  $\varphi_{in}$  é possível também definir no limite  $t \to +\infty$  os campos análogos,  $\varphi_{out}(x)$ . Estes campos serão o estado final dum problema de difusão. O formalismo é decalcado do caso dos campos  $\varphi_{in}$  e por isso escrevemos somente as fórmulas relevantes sem mais demonstrações.  $\varphi_{out}(x)$  obedece às relações

$$i\left[P^{\mu},\varphi_{out}\right] = \partial^{\mu}\varphi_{out}$$

Capítulo 2. Estados Físicos. Matriz S. Redução LSZ.

$$(\Box + m^2)\varphi_{out} = 0 \tag{2.39}$$

e tem a expansão

$$\varphi_{out}(x) = \int \widetilde{dk} \left[ a_{out}(k)e^{-ik\cdot x} + a_{out}^{\dagger}(k)e^{ik\cdot x} \right]$$
(2.40)

A condição assimptótica é agora

$$\lim_{t \to \infty} \langle \alpha | \varphi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha | \varphi^f_{out} | \beta \rangle$$
(2.41)

е

$$\sqrt{Z}\varphi_{out}(x) = \varphi(x) - \int d^4y \Delta_{adv}(x-y;m)j(y)$$
(2.42)

onde as funções de Green  $\Delta_{adv}$  satisfazem

$$(\Box_x + m^2)\Delta_{adv}(x - y; m) = \delta^4(x - y)$$
  
$$\Delta_{adv}(x - y; m) = 0 \quad ; \quad x^0 > y^0$$
(2.43)

Para estados de uma partícula

$$\langle 0|\varphi(x)|p\rangle = \sqrt{Z} \langle 0|\varphi_{out}(x)|p\rangle$$

$$= \sqrt{Z} \langle 0|\varphi_{in}(x)|p\rangle$$

$$= \sqrt{Z}e^{-ip\cdot x}$$

$$(2.44)$$

# **2.5** Matriz S

Temos neste momento toda a maquinaria formal necessária ao estudo das amplitudes de transição entre um estado inicial e um estado final, os chamados elementos da matriz S. Comecemos por um estado inicial com n partículas que não interactuam (bem separadas)

$$|p_1 \cdots p_n; in\rangle \equiv |\alpha; in\rangle \tag{2.45}$$

onde  $p_1 \cdots p_n$  indicam o 4-momento e os demais números quânticos caracterizando as partículas. O estado final será em geral um estado de m partículas

$$|p'_1 \cdots p'_m; out\rangle \equiv |\beta; out\rangle \tag{2.46}$$

O elemento  $S_{\beta\alpha}$  da matriz S é definido pela amplitude

$$S_{\beta\alpha} \equiv \langle \beta ; out | \alpha ; in \rangle \tag{2.47}$$

A matriz S é o operador que induz um isomorfismo entre os estados *in* e estados *out* (que por hipótese são um conjunto completo de estados):

$$\begin{aligned} \langle \beta ; out | &= \langle \beta ; in | S \\ \langle \beta ; in | &= \langle \beta ; out | S^{-1} \\ \langle \beta ; out | \alpha ; in \rangle &= \langle \beta ; in | S | \alpha ; in \rangle = \langle \beta ; out | S | \alpha ; out \rangle \end{aligned}$$
(2.48)

Das propriedades assumidas para os estados resultam as seguintes propriedades para a matrizS.

- i)  $\langle 0|S|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$  (estabilidade e unicidade do vácuo)
- ii) A estabilidade dos estados de 1 partícula dá

$$\langle p; in|S|p; in\rangle = \langle p; out|p; in\rangle = \langle p; out|p; in\rangle = 1$$
(2.49)

porque  $|p;in\rangle = |p;out\rangle$ .

- iii)  $\varphi_{in}(x) = S\varphi_{out}(x)S^{-1}$
- iv) A matriz S é unitária. Para mostrar a unitariedade temos

$$\delta_{\beta\alpha} = \langle \beta ; out | \alpha ; out \rangle = \left\langle \beta ; in | SS^{\dagger} | \alpha ; in \right\rangle$$
(2.50)

e portanto

$$SS^{\dagger} = 1 \tag{2.51}$$

v) A matriz S é invariante de Lorentz. Para mostrar isto fazemos

$$\varphi_{in}(ax+b) = U(a,b)\varphi_{in}(x)U^{-1}(a,b) = US\varphi_{out}(x)S^{-1}U^{-1}$$
  
=  $USU^{-1}\varphi_{out}(ax+b)US^{-1}U^{-1}$  (2.52)

Mas

$$\varphi_{in}(ax+b) = S\varphi_{out}(ax+b)S^{-1} \tag{2.53}$$

pelo que obtemos

$$S = U(a,b)SU^{-1}(a,b)$$
(2.54)

# 2.6 Fórmula de redução para campos escalares

Os elementos da matriz S são aquilo que está directamente ligado à experiência. De facto  $|S_{\beta\alpha}|^2$  representa a probabilidade de transição entre o estado inicial  $|\alpha; in\rangle$  e o estado final  $|\beta; out\rangle$ . Vamos aqui usar todo formalismo anterior para escrever estes elementos de matriz em termos das chamadas funções de Green para os campos em interacção. Assim o problema do cálculo dessas probabilidades de transição será transferido para o cálculo das funções de Green da teoria. Claro que estas não podem ser calculadas exactamente mas veremos no capítulo seguinte como desenvolver uma teoria da perturbações covariante para o cálculo dessas funções de Green.

Vamos então proceder à dedução da relação entre os elementos da matriz S e as funções de Green da teoria. Esta técnica chama- se redução LSZ dos nomes de Lehmann, Symanzik e Zimmermann que a introduziram. Por definição

$$\langle p_1 \cdots; out | q_1 \cdots; in \rangle = \langle p_1, \cdots; out | a_{in}^{\dagger}(q_1) | q_2, \cdots; in \rangle$$
 (2.55)

Usando

$$a_{in}^{\dagger}(q_1) = -i \int_t d^3x e^{-iq_1 x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi_{in}(x)$$
(2.56)

onde o integral é independente do tempo, e portanto pode ser calculado para um tempo arbitrário t. Se tomarmos  $t \to -\infty$  e usarmos a condição assimptótica para campos *in*, Eq. (2.21), obtemos

$$\langle p_1 \cdots; out | q_1 \cdots; in \rangle = -\lim_{t \to -\infty} i Z^{-1/2} \int_t d^3 x e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle p_1 \cdots; out | \varphi(x) | q_2 \cdots; in \rangle$$
(2.57)

De igual modo se pode mostrar que

$$\left\langle p_{1}\cdots;out|a_{out}^{\dagger}(q_{1})|q_{2}\cdots;in\right\rangle = \\ = -\lim_{t\to\infty}iZ^{-1/2}\int_{t}d^{3}xe^{-iq_{1}\cdot x}\overleftrightarrow{\partial}_{0}\left\langle p_{1}\cdots;out|\varphi(x)|q_{2}\cdots;in\right\rangle$$
(2.58)

Então usando o resultado

#### 2.6. Fórmula de redução para campos escalares

$$\left(\lim_{t \to \infty} -\lim_{t \to -\infty}\right) \int d^3x f(\vec{x}, t) = \lim_{t_f \to \infty, t_i \to -\infty} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x f(\vec{x}, t)$$
$$= \int d^4x \partial_0 f(\vec{x}, t)$$
(2.59)

e se subtrairmos a Eq.  $\left(2.58\right)$  da Eq.  $\left(2.57\right)$  obtemos

$$\langle p_1 \cdots; out | q_1 \cdots; in \rangle = \left\langle p_1 \cdots; out | a_{out}^{\dagger}(q_1) | q_2 \cdots; in \right\rangle$$
$$+ iZ^{-1/2} \int d^4x \ \partial_0 \left[ e^{-iq_1 \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \left\langle p_1 \cdots; out | \varphi(x) | q_2 \cdots; in \right\rangle \right] (2.60)$$

O primeiro termo no segundo membro da Eq. (2.60) corresponde a uma soma de termos desconexos, em que pelo menos uma das partículas não é afectada pela colisão (será zero se nenhum dos momentos inicial coincidir com os momentos finais). A sua forma é

$$\left\langle p_1 \cdots; out | a_{out}^{\dagger}(q_1) | q_2 \cdots; in \right\rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_x - \vec{q}_1) \left\langle p_1, \cdots, \hat{p}_k, \cdots, ; out | q_2, \cdots; in \right\rangle$$
(2.61)

onde $\hat{p}_k$ significa que esse momento foi retirado desse estado. Para o segundo termo escrevemos

$$\int d^{4}x \,\partial_{0} \left[ e^{-iq_{i}x} \overleftrightarrow{\partial}_{0} \langle p_{1} \cdots; out | \varphi(x) | q_{2} \cdots; in \rangle \right]$$

$$= \int d^{4}x \left[ \partial_{0}^{2} e^{-iq_{1} \cdot x} \langle \cdots \rangle + e^{-iq_{1} \cdot x} \partial_{0}^{2} \langle \cdots \rangle \right]$$

$$= \int d^{4}x \left[ (-\Delta^{2} + m^{2}) e^{-iq_{1} \cdot x} \langle \cdots \rangle + e^{-iq_{1} \cdot x} \partial_{0}^{2} \langle \cdots \rangle \right]$$

$$= \int d^{4}x e^{-iq_{1} \cdot x} (\Box + m^{2}) \langle p_{1} \cdots; out | \varphi(x) | q_{2} \cdots; in \rangle \qquad (2.62)$$

onde se usou  $(\Box + m^2)e^{-iq_1 \cdot x} = 0$  e fez uma integração por partes (o que para ser rigorosamente justificado exigiria a substituição de ondas planas por grupos de ondas).

Portanto depois deste primeiro passo na redução obtemos

$$\langle p_1, \cdots p_n; out | q_1 \cdots q_\ell; in \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2p_k^0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_k - \vec{q}_1) \langle p_1, \cdots \hat{p}_k; \cdots p_n; out | q_2 \cdots q_2 \cdots q_\ell; in \rangle$$
$$+ iZ^{-1/2} \int d^4x e^{-iq_1x} (\Box + m^2) \langle p_1 \cdots p_n; out | \varphi(x) | q_2 \cdots q_\ell; in \rangle \qquad (2.63)$$

Procedemos agora à repetição desde mesmo processo até substituirmos completamente todos os momentos por operadores de campo. Para sermos específicos retiremos agora um momento do estado final. A partir de agora não consideramos mais os termos desconexos pois na prática estamos interessados em situações onde *todas* as partículas interactuam. Temos então

$$\langle p_{1} \cdots p_{n}; out | \varphi(x_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle = \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | a_{out}(p_{1})\varphi(x_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$= \lim_{y_{1}^{0} \to \infty} iZ^{-1/2} \int d^{3}y_{1}e^{ip_{1} \cdot y_{1}} \overleftrightarrow{\partial}_{y_{1}^{0}} \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | \varphi(y_{1})\varphi(x_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$= \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | \varphi(x_{1})a_{in}(p_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$+ \lim_{y_{1}^{0} \to \infty} iZ^{-1/2} \int d^{3}y_{1}^{0}e^{ip_{1} \cdot y_{1}} \overleftrightarrow{\partial}_{y_{1}^{0}} \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | \varphi(y_{1})\varphi(x_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$- \lim_{y_{1}^{0} \to -\infty} iZ^{-1/2} \int d^{3}y_{1}^{0}e^{ip_{1} \cdot y_{1}} \overleftrightarrow{\partial}_{y_{1}^{0}} \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | \varphi(x_{1})\varphi(y_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$= \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | \varphi(x_{1})a_{in}(p_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$+ iZ^{-1/2} \left( \lim_{y_{1}^{0} \to \infty} - \lim_{y_{1}^{0} \to -\infty} \right) \int d^{3}y_{1}e^{ip_{1} \cdot y_{1}} \overleftrightarrow{\partial}_{y_{1}^{0}} \langle p_{2} \cdots p_{n}; out | T\varphi(y_{1})\varphi(x_{1}) | q_{2} \cdots q_{\ell}; in \rangle$$

$$(2.64)$$

onde se usaram as propriedades do produto ordenado no tempo. Usando agora o mesmo raciocínio que conduziu à Eq. (2.62) obtemos

$$\langle p_1 \cdots p_n; out | \varphi(x_1) | q_2 \cdots q_\ell; in \rangle = \text{termos desconexos}$$
$$+ iZ^{-1/2} \int d^4 y_1 e^{ip_1 \cdot y_1} (\Box_{y_1} + m^2) \langle p_2 \cdots p_n; out | T\varphi(y_1)\varphi(x_1) | q_2 \cdots q_\ell; in \rangle (2.65)$$

Não é muito difícil generalizar este método para obter a fórmula final de redução para campos escalares

$$\langle p_1 \cdots p_n; out | q_1 \cdots q_\ell; in \rangle = \text{termos desconexos} + \left(\frac{i}{\sqrt{z}}\right)^{n+\ell} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_1 d^4 x_1 \cdots d^4 x_\ell e^{\left[i\sum_{1}^{n} p_k \cdot y_k - i\sum_{1}^{\ell} q_r \cdot x_r\right]}$$

66

#### 2.7. Fórmula de redução para fermiões

$$(\Box_{y_1} + m^2) \cdots (\Box_{x_\ell} + m^2) \langle 0 | T\varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n)\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_\ell) | 0 \rangle \quad (2.66)$$

Esta equação é a equação fundamental em teoria quântica dos campos. Permitenos relacionar as amplitudes de transição com as funções de Green da teoria. A quantidade

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)|0\rangle = G(x_1\cdots x_n)$$
 (2.67)

é a chamada função de Green completa para  $r=m+\ell$  partículas e diagramaticamente introduzimos a notação

$$G(x_1 \cdots x_n) = \tag{2.68}$$

Os factores  $(\Box + m^2)$  na Eq. (2.66) forçam as pernas exteriores a estarem na camada de massa. De facto, no espaço dos momentos  $(\Box + m^2) \rightarrow (-p^2 + m^2)$ . Portanto a Eq. (2.66) será nula excepto se os propagadores das pernas exteriores estiverem na camada de massa pois então têm um pólo em  $\frac{1}{p^2-m^2}$ , obtendo-se então os resíduos desses pólos. Assim, para as amplitudes de transição interessam somente as chamadas funções de *Green truncadas*, isto é, com as pernas exteriores removidas. No próximo capítulo aprenderemos a calcular estas funções em teoria das perturbações.

# 2.7 Fórmula de redução para fermiões

## 2.7.1 Estados in e out

A definição de estados *in* e *out* segue exactamente os mesmos passos do que o caso dos campos escalares, por isso indicamos somente os resultados sem demonstração. Os campos  $\psi_{in}(x)$  satisfazem as condições

$$(i\partial - m)\psi_{in}(x) = 0$$

Capítulo 2. Estados Físicos. Matriz S. Redução LSZ.

$$[P_{\mu}, \psi_{in}(x)] = -i\partial_{\mu}\psi_{in}(x) \tag{2.69}$$

Os campos  $\psi_{in}(x)$  produzem somente estados de uma partícula e estão relacionados com os campos  $\psi(x)$  por

$$\sqrt{Z_2}\psi_{in}(x) = \psi(x) - \int d^4y S_{ret}(x - y, m)j(y)$$
(2.70)

onde  $\psi(x)$  satisfaz a equação de Dirac

$$(i\partial - m)\psi(x) = j(x) \tag{2.71}$$

e  $S_{ret}$  é a função de Green retardada

$$(i\partial_x - m)S_{ret}(x - y, m) = \delta^4(x - y)$$
  
 $S_{ret}(x - y) = 0 \; ; \; x^0 < y^0$  (2.72)

Os campos  $\psi_{in}(x)$ , como campos livres, têm a expansão de Fourier

$$\psi_{in}(x) = \int \widetilde{dp} \sum_{s} \left[ b_{in}(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x} + d^{\dagger}_{in}(p,s)v(p,s)e^{ip\cdot x} \right]$$
(2.73)

satisfazendo os operadores  $b_{in}$ ,  $d_{in}$  e seus adjuntos exactamente a mesma álgebra que no caso dos campos livres. A condição assimptótica é agora

$$\lim_{t \to -\infty} \langle \alpha | \psi^{f}(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \alpha | \psi^{f}_{in} | \beta \rangle$$
(2.74)

onde  $\psi^f(t)$  e  $\psi^f_{in}$  têm significados semelhantes à Eq. (2.20).

Para os campos  $\psi_{out}$  obtemos essencialmente as mesmas expressões, com  $\psi_{in}$  substituído por  $\psi_{out}$ . As diferenças são na condição assimptótica

$$\lim_{t \to \infty} \langle \alpha | \psi^f(t) | \beta \rangle = \sqrt{Z_2} \langle \alpha | \psi^f_{out} | \beta \rangle$$
(2.75)

e com a relação entre os campos  $\psi_{out}$  e  $\psi$  que é agora

$$\sqrt{Z_2}\psi_{out} = \psi(x) - \int d^4 y S_{adv}(x - y; m) j(y)$$
(2.76)

onde

$$(i\partial_x - m)S_{adv}(x - y; m) = \delta^4(x - y)$$
  
 $S_{adv}(x - y; m) = 0$   $x^0 > y^0$  (2.77)

### 2.7.2 Representação espectral para fermiões

Consideremos o valor de expectação no vácuo do anticomutador de dois campos de Dirac,

$$S'_{\alpha\beta}(x,y) \equiv i \langle 0 | \{\psi_{\alpha}(x), \overline{\psi}_{\beta}(y)\} | 0 \rangle$$
  
$$= i \sum_{n} \left[ \langle 0 | \psi_{\alpha}(0) | n \rangle \langle n | \overline{\psi}_{\beta}(0) | 0 \rangle e^{-ip_{n}(x-y)} + \langle 0 | \overline{\psi}_{\beta}(0) | n \rangle \langle n | \psi_{\alpha}(0) | 0 \rangle e^{ip_{n} \cdot (x-y)} \right]$$
  
$$\equiv S'_{\alpha\beta}(x-y) \qquad (2.78)$$

onde se introduziu um conjunto completo de estados próprios do 4– momento. Tal como anteriormente introduzimos a amplitude espectral  $\rho_{\alpha\beta}(q)$ 

$$\rho_{\alpha\beta}(q) \equiv (2\pi)^3 \sum_{n} \delta^4(p_n - q) \langle 0 | \psi_{\alpha}(0) | n \rangle \langle n | \overline{\psi}_{\beta}(0) | 0 \rangle$$
(2.79)

Procuramos agora encontrar a forma geral de  $\rho_{\alpha\beta}(q)$  usando argumentos de invariância.  $\rho_{\alpha\beta}(q)$  é uma matriz  $4 \times 4$  e pode portanto ser escrita na forma

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \overline{\rho}(q)\delta_{\alpha\beta} + \rho_{\mu}(q)\gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \rho_{\mu\nu}(q)\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}(q)\gamma^{5}_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_{\mu}(q)(\gamma^{\mu}\gamma^{5})_{\alpha\beta}$$
(2.80)

Argumentos de invariância restringem a forma dos coeficientes  $\overline{\rho}(q)$ ,  $\rho_{\mu}(q)$ ,  $\rho_{\mu\nu}(q)$ ,  $\tilde{\rho}(q) \in \tilde{\rho}_{\mu}(q)$ . Para isso usamos as propriedades dos campos para transformações de Lorentz, isto é

$$U(a)\psi_{\alpha}(0)U^{-1}(a) = S_{\alpha\lambda}^{-1}(a)\overline{\psi}_{\lambda}(0)$$
$$U(a)\overline{\psi}_{\alpha}(0)U^{-1}(a) = \overline{\psi}_{\lambda}(0)S_{\lambda\alpha}(a)$$
$$S^{-1}\gamma^{\mu}S = a^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu}$$
(2.81)

Então podemos mostrar que a matriz  $\rho_{\alpha\beta}$  deve obe<br/>decer à relação

$$\rho(q) = S^{-1}(a)\rho(qa^{-1})S(a)$$
(2.82)

onde se usou uma notação matricial. Esta relação dá as propriedades dos diversos coeficientes em (3.73). Por exemplo

$$\rho^{\mu}(a) = a^{\mu}{}_{\nu}\rho^{\nu}(qa^{-1}) \tag{2.83}$$

isto é,  $\rho^{\mu}$  transforma-se como um 4-vector.

Usando o facto de que  $\rho_{\alpha\beta}$  é função somente de q e anula-se fora do cone de luz do futuro podemos finalmente escrever

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \tilde{\rho}_1(q^2) \not\!\!\!/_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2) \delta_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_1(q^2) (\not\!\!/_{\alpha\beta} \gamma^5)_{\alpha\beta} + \tilde{\rho}_2(q^2) \gamma^5_{\alpha\beta}$$
(2.84)

isto é,  $\rho_{\alpha\beta}(q)$  está determinado a menos de 4 funções escalares de  $q^2$ . Exigindo invariância da teoria para a Paridade obtemos em vez da Eq. (2.82)

$$\rho_{\alpha\beta}(\vec{q}, q_0) = \gamma^0_{\alpha\lambda} \rho_{\lambda\delta}(-\vec{q}, q^0) \gamma^0_{\delta\beta}$$
(2.85)

o que inserido na Eq. (2.84) implica

$$\tilde{\rho}_1 = \tilde{\rho}_2 = 0 \tag{2.86}$$

Portanto para a teoria de Dirac, que conserva Paridade, obtemos finalmente

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2) \not\!\!\!/_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2) \delta_{\alpha\beta}$$
(2.87)

Repetindo agora os passos análogos ao caso escalar podemos escrever

$$S'_{\alpha\beta}(x-y) = \int_0^\infty d\sigma^2 \left\{ \rho_1(\sigma^2) S_{\alpha\beta}(x-y;\sigma) + \left[ \sigma \rho_1(\sigma^2) - \rho_2(\sigma^2) \right] \delta_{\alpha\beta} \Delta(x-y;\sigma) \right\}$$
(2.88)

onde  $\Delta \in S_{\alpha\beta}$  são as funções definidas para os campos livres. Pode-se mostrar que

i)  $\rho_1 e \rho_2$  são reais

ii) 
$$\rho_1(\sigma^2) \ge 0$$

iii)  $\sigma \rho_1(\sigma^2) - \rho_2(\sigma^2) \ge 0$ 

Usando as relações anteriores podemos extrair a contribuição dos estados de partícula para a Eq. (2.88). Obtemos

$$S'_{\alpha\beta}(x-y) = Z_2 S_{\alpha\beta}(x-y;m) + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \left\{ \rho_1(\sigma^2) S_{\alpha\beta}(x-y;\sigma) + \left[ \sigma \rho_1(\sigma^2) - \rho_2(\sigma^2) \right] \delta_{\alpha\beta} \Delta(x-y;\sigma) \right\}$$
(2.89)

onde  $m_1$  é o limiar para a produção de duas ou mais partículas. Calculando a Eq. (2.89) a tempos iguais podemos obter
$$1 = Z_2 + \int_{m_1^2} d\sigma^2 \rho_1(\sigma^2)$$
 (2.90)

ou seja

$$0 \le Z_2 < 1$$
 (2.91)

### 2.7.3 A fórmula de redução para fermiões

Para obter a fórmula de redução para fermiões vamos proceder como no caso do campo escalar. A única dificuldade reside nos índices spinoriais. Os operadores de criação e destruição exprimem-se em termos dos campos  $\psi_{in}$  por

$$b_{in}(p,s) = \int d^{3}x \overline{u}(p,s) e^{ip \cdot x} \gamma^{0} \psi_{in}(x)$$
  

$$d_{in}^{\dagger}(p,s) = \int d^{3}x \overline{v}(p,s) e^{-ip \cdot x} \gamma^{0} \psi_{in}(x)$$
  

$$b_{in}^{\dagger}(p,s) = \int d^{3}x \overline{\psi}_{in}(x) \gamma^{0} e^{-ip \cdot x} u(p,s)$$
  

$$d_{in}(p,s) = \int d^{3}x \overline{\psi}_{in}(x) \gamma^{0} e^{ip \cdot x} v(p,s)$$
(2.92)

sendo os integrais independentes do tempo. De facto para sermos rigorosos devíamos substituir as soluções de onda plana por grupos de onda, mas para simplificar não o fazemos. Para estabelecermos as fórmulas de redução comecemos por reduzir um electrão do estado inicial,

$$\begin{aligned} \langle \beta; out | (ps)\alpha; in \rangle &= \left\langle \beta; out | b_{in}^{\dagger}(p,s) | \alpha, in \right\rangle \\ &= \left\langle \beta - (p,s); out | \alpha; in \right\rangle + \left\langle \beta; out | b_{in}^{\dagger}(p,s) - b_{out}^{\dagger}(p,s) | \alpha; in \right\rangle \end{aligned}$$

= termos desconexos

$$+ \int d^3x \left< \beta; out | \overline{\psi}_{in}(x) - \overline{\psi}_{out}(x) | \alpha; in \right> \gamma^0 e^{-ip \cdot x} u(p, s)$$

= termos desconexos

$$-\left(\lim_{t \to +\infty} -\lim_{t \to -\infty}\right) \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \int d^3x \left<\beta; out |\overline{\psi}(x)|\alpha; in\right> \gamma^0 e^{-ip \cdot x} u(p,s)$$

= termos desconexos

Capítulo 2. Estados Físicos. Matriz S. Redução LSZ.

$$-Z_{2}^{-1/2} \int d^{4}x \left[ \left\langle \beta; out | \partial_{0} \overline{\psi}(x) | \alpha; in \right\rangle \gamma^{0} e^{-ip \cdot x} u(p, s) + \left\langle \beta; out | \overline{\psi}(x) | \alpha; in \right\rangle \gamma^{0} \partial_{0} (e^{-ip \cdot x} u(p, s)) \right]$$
(2.93)

Usando agora

$$(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m)(e^{-ip\cdot x}u(p,s)) = 0$$
(2.94)

obtemos finalmente, depois de integrar por partes,

$$\left\langle \beta; out | b_{in}^{\dagger}(\rho, s) | \alpha; in \right\rangle = \text{termos desconexos} -iZ_2^{-1/2} \int d^4x \left\langle \beta; out | \overline{\psi}(x) | \alpha; in \right\rangle (-i\overleftarrow{\partial}_x - m) e^{-ip \cdot x} u(p, s)$$
(2.95)

Do mesmo modo a redução duma antipartícula no estado inicial dá

$$\left\langle \beta; out | d_{in}^{\dagger}(p,s) | \alpha; in \right\rangle = \text{termos desconexos} \\ + i Z_2^{-1/2} \int d^4 x e^{-ip \cdot x} \overline{v}(p,s) (i \partial_x - m) \left\langle \beta; out | \psi(x) | \alpha; in \right\rangle$$
(2.96)

enquanto que a redução de uma partícula ou duma antipartícula no estado final dão, respectivamente,

$$\langle \beta; out | b_{out}(p,s) | \alpha; in \rangle = \text{termos desconexos}$$
$$-iZ_2^{-1/2} \int d^4x e^{ip \cdot x} \overline{u}(p,s) (i\partial_x - m) \langle \beta; out | \psi(x) | \alpha; in \rangle$$
(2.97)

е

$$\langle \beta; out | d_{out}(p,s) | \alpha; in \rangle = \text{termos desconexos} + i Z_2^{-1/2} \int d^4x \left\langle \beta; out | \overline{\psi}(x) | \alpha; in \right\rangle (-i \overleftarrow{\partial}_x - m) v(p,s) e^{ip \cdot x}$$
(2.98)

Repare-se na relação formal entre um electrão no estado inicial e um positrão no estado final (e vice versa). Para passar duma à outra situação basta fazer

$$u(p,s)e^{-ip\cdot x} \to -v(p,s)e^{ip\cdot x} \tag{2.99}$$

Os passos seguintes da redução são semelhantes tendo somente atenção aos sinais por causa dos anticomutadores. Para escrevermos a expressão final denotamos os momentos do estado  $\langle in | \text{ por } p_i \in \overline{p_i}$  respectivamente para partículas e antipartículas e os do estado  $\langle out | \text{ por } p'_i, \overline{p}'_i$ . Além disso fazemos a convenção (necessária por causa dos sinais),

$$|(p_1, s_1), \cdots, (\overline{p}_1, \overline{s}_1); \cdots; in\rangle = b_{in}^{\dagger}(p_1, s_1) \cdots d_{in}^{\dagger}(\overline{p}_1, \overline{s}_1) \cdots |0\rangle$$
(2.100)

$$\langle out; (p'_1, s'_1) \cdots, (\overline{p}'_1, \overline{s}'_1) \cdots | = \langle 0 | \cdots d_{out} (\overline{p}'_1, \overline{s}'_1), \cdots b_{out} (p'_1, s'_1)$$
(2.101)

Então se n(n') for o número total de partículas (antipartículas) obtemos

$$\langle out; (p'_{1}, s'_{1}) \cdots, (\overline{p}'_{1}, \overline{s}'_{1}) \cdots | (p_{1}, s_{1}), \cdots (\overline{p}_{1}, \overline{s}_{1}), \cdots; in \rangle = \text{termos desconexos} \\ + (-iZ_{2}^{-1/2})^{n} (iZ_{2}^{-1/2})^{n'} \int d^{4}x_{1} \cdots d^{4}y_{1} \cdots d^{4}x'_{1} \cdots d^{4}y'_{1} \cdots \\ e^{-i\sum(p_{i} \cdot x_{i}) - i\sum(\overline{p}_{i} \cdot y_{i})} e^{+i\sum(p'_{i} \cdot x'_{i}) + i\sum(\overline{p}'_{i} \cdot y'_{i})} \\ \overline{u}(p'_{1}, s'_{1})(i\partial\!\!\!/_{x'_{1}} - m) \cdots \overline{v}(\overline{p}_{1}, \overline{s}_{1})(i\partial\!\!\!/_{y_{1}} - m) \\ \langle 0| T(\cdots \overline{\psi}(y'_{1}) \cdots \psi(x'_{1})\overline{\psi}(x_{1}) \cdots \psi(y_{1}) \cdots | 0 \rangle \\ (-i\overleftarrow{\partial}\!\!/_{x_{1}} - m)u(p_{1}, s_{1}) \cdots (-i\overleftarrow{\partial}\!\!/_{y'_{1}} - m)v(\overline{p}'_{1}, \overline{s}'_{1})$$
(2.102)

A Eq. (2.102) é a equação fundamental que permite relacionar os elementos da matriz S com as funções de Green de teoria. Os operadores dentro do produto ordenado no tempo poderão ser reordenados à custa dum possível sinal. O sinal indicado é para a ordenação descrita. Em termos gráficos a função de Green

$$\langle 0|T\left[\overline{\psi}(y'_{m'})\cdots\overline{\psi}(y'_1)\psi(x'_{\ell'})\cdots\psi(x'_1)\overline{\psi}(x_1)\cdots\overline{\psi}(x_\ell)\psi(y_1)\cdots\psi(y_m)\right]|0\rangle \quad (2.103)$$

é descrita pelo diagrama<sup>1</sup> da Fig. (2.1).

Os operadores  $(i\partial - m)$  e  $(-i\partial - m)$  põem as partículas na camada de massa e removem os propagadores das linhas exteriores (Funções de Green truncadas). Resta calcular estas funções de Green a partir da teoria, o que faremos no próximo capítulo.

$$\ell - m = \ell' - m'$$

 $<sup>^1\</sup>mathrm{Havendo}$  conservação de número leptónico o número de partículas menos número de antipartículas é conservado, isto é



Figura 2.1:

# 2.8 Fórmula de redução para fotões

O formalismo LSZ para fotões apresenta algumas dificuldades resultantes das particularidades do campo electromagnético. Quando se adopta um formalismo (gauge de radiação) onda as únicas componentes do campo  $A^{\mu}$  são as transversais (como por exemplo no Bjorken e Drell) os problemas aparecem em mostrar a invariância de Lorentz e de gauge da matriz S. No formalismo da métrica indefinida que nós adoptámos as dificuldades residem com os estados de métrica negativa, para além da invariância de gauge.

Nós vamos aqui passar por cima de todos estes pontos delicados e admitir que podemos definir campos in pela relação

$$\sqrt{Z_3} A^{\mu}_{in}(x) = A^{\mu}(x) - \int d^4 y D^{\mu\nu}_{ret}(x-y) j_{\nu}(y)$$
(2.104)

e igualmente para os campos out

$$\sqrt{Z_3} A^{\mu}_{out}(x) = A^{\mu}(x) - \int d^4 y D^{\mu\nu}_{adv}(x-y) j_{\nu}(y)$$
(2.105)

onde

$$\Box A_{in}^{\mu} = \Box A_{out}^{\mu} = 0$$
  
$$\Box A^{\mu} = j^{\mu}$$
  
$$\Box D_{adv\ ret}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \delta^{\mu} (x - y)$$
(2.106)

Os campos *in* e *out* são campos livres e têm portanto uma decomposição de Fourier em ondas planas e operadores de criação e destruição da forma

$$A_{in}^{\mu}(x) \int \widetilde{dk} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[ a_{in}(k,\lambda) \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) e^{-ik \cdot x} + a_{in}^{\dagger}(k,\lambda) \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) e^{ik \cdot x} \right]$$
(2.107)

e portanto

$$a_{in}(k,\lambda) = -i \int d^3x e^{ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) A^{in}_{\mu}(x)$$
  
$$a^{\dagger}_{in}(k,\lambda) = i \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \varepsilon^{\mu}(k,\lambda) A^{in}_{\mu}(x) \qquad (2.108)$$

onde, como habitualmente,  $a_{in}(k,\lambda)$  e  $a_{in}^{\dagger}(k,\lambda)$  são independentes no tempo. Na expressão Eq. (2.107) aparecem todas as polarizações, mas como os elementos da matriz S serão entre estados físicos, as polarizações longitudinais e escalar não contribuem.

Neste formalismo aquilo que é complicado discutir é a representação espectral. Nós não vamos entrar nesses detalhes e dizemos, simplesmente, que se pode mostrar que  $0 \le Z_3 < 1$  e que  $Z_3$  é independente de gauge. A fórmula de redução obtém-se facilmente. Temos

$$\langle \beta; out | (k\lambda)\alpha; in \rangle = \langle \beta - (k,\lambda); out | \alpha; in \rangle + \left\langle \beta; out | a_{in}^{\dagger}(k,\lambda) - a^{\dagger}out(k,\lambda) | \alpha in \right\rangle$$

= termos desconexos

$$+i\int d^{3}x e^{-ik\cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_{0} \varepsilon_{\mu}(k,\lambda) \left\langle \beta; out | A_{in}^{\mu}(x) - A_{out}^{\mu}(x) | \alpha; in \right\rangle$$

= termos desconexos

$$-i(\lim_{t \to +\infty} -\lim_{t \to -\infty})Z_3^{-1/2} \int d^3x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \langle \beta; out | A^{\mu}(x) | \alpha; in \rangle \varepsilon_{\mu}(k, \lambda)$$

= termos desconexos

$$-iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{-ik \cdot x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \left<\beta; out | A^{\mu}(x) | \alpha; in \right> \varepsilon_{\mu}(k, \lambda)$$

= termos desconexos

$$-iZ_3^{-1/2} \int d^4x e^{-ik \cdot x} \vec{\Box}_x \left<\beta; out | A^{\mu}(x) | \alpha; in \right> \varepsilon_{\mu}(k, \lambda)$$
(2.109)

A fórmula final para a redução de fotões é então

 $\langle k'_1 \cdots k'_n; out | k_1 \cdots k_\ell; in \rangle = \text{termos desconexos}$ 



Figura 2.2:

$$+ \left(\frac{-i}{\sqrt{Z_3}}\right)^{n+\ell} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_n d^4 x_1 \cdots d^4 x_\ell \ e^{\left[i\sum^n k'_i \cdot y_i - i\sum^\ell k_i \cdot x_i\right]}$$
$$\varepsilon^{\mu_1}(k_1, \lambda_1) \cdots \varepsilon^{\mu_\ell}(k_\ell, \lambda_\ell) \varepsilon^{*\mu'_1}(k'_1, \lambda'_1) \cdots \varepsilon^{*\mu'_n}(k'_n, \lambda'_n)$$
$$\Box_{y_1} \cdots \Box_{x\ell} \left\langle 0 \right| T(A_{\mu'_1}(y_1) \cdots A_{\mu'_n}(y_n) A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu\ell}(x_\ell) \left| 0 \right\rangle \quad (2.110)$$

o que diagramaticamente corresponde à Fig. (2.2).

## 2.9 Secções eficazes

As fórmulas de redução Eqs.(2.66), (2.102) e (2.110) constituem os resultados fundamentais deste capítulo. Relacionam as amplitudes de transição com as funções de Green da teoria. No próximo capítulo indicaremos como calcular as funções de Green pelo único método conhecido, a chamada teoria das perturbações covariante. Antes de concluirmos este capítulo vamos indicar como se relacionam as amplitudes de transição entre um estado inicial e final

$$S_{fi} \equiv \langle f; out | i; in \rangle \tag{2.111}$$

com as quantidades que são medidas experimentalmente, as chamadas secções eficazes da difusão. Então o caminho entre a experiência (secções eficazes) e a teoria (funções de Green) ficará estabelecido.

Como vimos nas fórmulas de redução há sempre uma contribuição trivial para a matriz S, que corresponde aos chamados termos desconexos, em que o sistema passa do estado inicial para o final (que é igual) sem sofrer interacção. A subtracção desta contribuição trivial leva-nos à introdução da matriz T através da relação

$$S_{fi} = 1_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i) T_{fi}$$
(2.112)

#### 2.9. Secções eficazes

onde se factorizou explicitamente a função delta de conservação de energia e momento. Se desprezarmos a contribuição trivial, a probabilidade de transição do estado inicial para o final será dada por

$$W_{f\leftarrow i} = |(2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i) T_{fi}|^2 \tag{2.113}$$

Para prosseguir é preciso encontrar o significado do quadrado de função delta. Esta aparece porque estamos a usar ondas planas. Para obviar este problema podemos pôr o sistema numa caixa de volume V e considerar que a interacção teve uma duração 2T. Então

$$(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) = \lim_{\substack{V \to \infty \\ T \to \infty}} \int_V d^3x \int_{-T}^T dx^0 e^{i(P_f - P_i) \cdot x}$$
(2.114)

 $\operatorname{Mas}$ 

$$F \equiv \int_{V} d^{3}x \int_{-T}^{T} dx^{0} e^{i(P_{f} - P_{i}) \cdot x} = V \delta_{\vec{P}_{f}\vec{P}_{j}} \frac{2}{|E_{f} - E_{i}|} \sin|T(E_{f} - E_{i})| \qquad (2.115)$$

O quadrado desta expressão é agora calculável e dá

$$|F|^{2} = V^{2} \delta_{\vec{P}_{f},\vec{P}_{i}} \frac{4}{|E_{f} - E_{i}|^{2}} \sin^{2} |T(E_{f} - E_{i})|$$
(2.116)

Se quisermos a taxa de transição por unidade de tempo e por unidade de volume dividimos por V2T. Então

$$\Gamma_{fi} = \lim_{\substack{V \to \infty \\ T \to \infty}} V \delta_{\vec{P}_f, \vec{P}_i} \ 2 \ \frac{\sin^2 T(E_f - E_i)}{T(E_f - E_i)^2} |T_{fi}|^2 \tag{2.117}$$

Usando agora os resultados

$$\lim_{V \to \infty} V \delta_{\vec{P}_f \vec{P}_j} = (2\pi)^3 \delta^3 (\vec{P}_f - \vec{P}_i)$$
$$\lim_{T \to \infty} 2 \, \frac{\sin^2 T (E_f - E_i)}{T (E_f - E_i)^2} = (2\pi) \delta(E_f - E_i) \tag{2.118}$$

obtemos a taxa de transição por unidade de volume e por unidade de tempo

$$\Gamma_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \tag{2.119}$$

Para obter a secção eficaz dividimos esta taxa de transição pelo fluxo e normalizamos as densidades a uma partícula por unidade de volume. Além disso multiplicamos pelo número de partículas no estado final com energias num certo intervalo. Obtemos Capítulo 2. Estados Físicos. Matriz S. Redução LSZ.

$$d\sigma = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{|\vec{v}_{12}|} \Gamma_{fi} \prod_{j=3}^n \frac{d^3 p_j}{2p_j^0 (2\pi)^3}$$
(2.120)

onde

$$\rho_1 = 2E_1 \quad ; \quad \rho_2 = 2E_2 \tag{2.121}$$

Uma maneira equivalente de escrever esta equação é

$$d\sigma = \frac{1}{4\left[(p_i \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2\right]^{1/2}} (2\pi)^4 \delta^4 (P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \prod_{j=3}^n dp_j$$
(2.122)

o que exibe bem o carácter invariante de Lorentz de cada uma das partes que entram na secção eficaz. Os factores do fluxo incidente e do espaço da fase são puramente cinemática. A física está no elemento da matriz  $T_{fi}$ .

De notar que na nossa convenção, fermiões e bosões têm a mesma normalização, isto é, os estados de uma partícula obedecem a

$$\langle p|p'\rangle = 2p^0(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$$
 (2.123)

diferindo assim da convenção do Bjorken e Drell para o caso dos fermiões.

# Problemas Capítulo 2

2.1 Mostre que a representação espectral para os fermiões  $\rho_{\alpha\beta}(q)$  satisfaz

a) 
$$\rho(q) = S^{-1}(a)\rho(qa^{-1})S(a)$$

- b)  $\rho_{\alpha\beta}(\vec{q}, q^0) = \gamma^0_{\alpha\lambda} \rho_{\lambda\delta}(-\vec{q}, q^0) \gamma^0_{\delta\beta}$
- **2.2** Use os resultados do problema anterior para mostrar que numa teoria que conserva a Paridade, como QED,

$$\rho_{\alpha\beta}(q) = \rho_1(q^2) \not\!\!\!/_{\alpha\beta} + \rho_2(q^2) \delta_{\alpha\beta} \tag{2.124}$$

- **2.3** Mostra que as funções  $\rho_1$  e  $\rho_2$  definidas em 2.2 satisfazem as propriedades
  - i)  $\rho_1 \in \rho_2$  são reais ii)  $\rho_1(\sigma^2) \ge 0$ iii)  $\sigma \rho_1(\sigma^2) - \rho_2(\sigma^2) \ge 0$
- 2.4 Demonstrar que para o campo de Dirac se tem

$$1 = Z_2 + \int_{m_1^2}^{\infty} d\sigma^2 \rho_1(\sigma^2)$$
 (2.125)

2.5 Mostre que

$$\langle 0 | [\varphi_{in}(x), \varphi_{out}(y)] | 0 \rangle = i\Delta(x - y; m)$$
(2.126)

# Capítulo 3

# Teoria das Perturbações Covariante

### **3.1** A matriz U

Neste capítulo vamos ver como desenvolver um método de cálculo para as funções de Green da teoria. De tudo o que vimos nos dois últimos capítulos ressalta que só sabemos como calcular para campos livres, como eram por exemplo os campos in e *out*. Ora as funções de Green em que estamos interessados são dadas em termos dos campos físicos com interacções com os quais não sabemos calcular. Vamos aqui desenvolver o formalismo que permite exprimir os campos físicos em termos dos campos in por meio duma série perturbativa e assim conseguir calcular as funções de Green em teoria das perturbações. Para isso começamos por definir a matriz U.

Os campos físicos com interacções  $\varphi(\vec{x},t)$  e os seus momentos conjugados  $\pi(\vec{x},t)$ satisfazem as mesmas relações de comutação a tempos iguais que os campos *in*,  $\varphi_{in}(\vec{x},t)$  e os seus momentos conjugados  $\pi_{in}(\vec{x},t)$ . Além disso tanto  $\varphi$  como  $\varphi_{in}$ formam conjuntos completos de operadores, no sentido de que qualquer estado pode ser obtido por aplicação de  $\varphi$  ou  $\varphi_{in}$  no vácuo. Isto implica que deve haver uma transformação unitária U(t) que relacione  $\varphi$  com  $\varphi_{in}$ , ou seja,

$$\varphi(\vec{x}, t) = U^{-1}(t)\varphi_{in}(\vec{x}, t)U(t) 
\pi(\vec{x}, t) = U^{-1}(t)\pi_{in}(\vec{x}, t)U(t)$$
(3.1)

A dinâmica de U pode ser encontrada por conhecemos as equações do movimento para  $\varphi(x) \in \varphi_{in}(x)$ . Estas são

$$\frac{\partial \varphi_{in}}{\partial t}(x) = i[H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in}]$$

Capítulo 3. Teoria das Perturbações Covariante

$$\frac{\partial \pi_{in}}{\partial t}(x) = i[H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}), \pi_{in}]$$
(3.2)

 $\mathbf{e}$ 

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) = i[H(\varphi, \pi), \varphi] 
\frac{\partial \pi}{\partial t}(x) = i[H(\varphi, \pi), \pi]$$
(3.3)

Então das Eqs. (3.2) e (3.1) resulta

$$\dot{\varphi}_{in}(x) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ U(t)\varphi(x)U^{-1}(t) \right]$$

$$= \left[ \dot{U}(t)U^{-1}(t), \varphi_{in} \right] + i \left[ H(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in}(x) \right]$$

$$= \dot{\varphi}_{in}(x) + \left[ \dot{U}U^{-1} + i H_I(\varphi_{in}, \pi_{in}), \varphi_{in} \right]$$
(3.4)

onde

$$H_I(\varphi_{in}, \pi_{in}) = H(\varphi_{in}, \pi_{in}) - H_{in}(\varphi_{in}, \pi_{in}) \equiv H_I(t)$$
(3.5)

e de modo semelhante

$$\dot{\pi}_{in}(x) = \dot{\pi}_{in} + \left[ \dot{U}U^{-1} + iH_I(\varphi_{in}, \pi_{in}), \pi_{in} \right]$$
(3.6)

Das Eqs. (3.4) e (3.6) resulta que

$$i\dot{U}U^{-1} = H_I(t) + E_0(t) \tag{3.7}$$

onde  $E_0(t)$  comuta com  $\varphi_{in}$  e  $\pi_{in}$  e é portanto um número função do tempo (não é um operador). Definindo

$$H'_{I}(t) = H_{I}(t) + E_{0}(t)$$
(3.8)

obtemos uma equação diferencial para U(t), que é

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = H_I'(t)U(t) \tag{3.9}$$

A solução desta equação em termos dos campos in é a base da teoria das perturbações.

Para integrar a Eq. (3.9) precisamos duma condição inicial. Para isso introduzimos o operador

$$U(t,t') \equiv U(t)U^{-1}(t')$$
(3.10)

#### 3.1. A matriz U

que obviamente satisfaz

$$U(t,t) = 1 (3.11)$$

É fácil de ver que U(t, t') satisfaz a Eq. (3.9) isto é

$$i\frac{\partial U(t,t')}{\partial t} = H'_I(t)U(t,t')$$
(3.12)

Para prosseguirmos transformamos a Eq. (3.12) numa equação integral equivalente, isto é,

$$U(t,t') = 1 - i \int_{t'}^{t} dt_1 H'_I(t_1) U(t_1,t')$$
(3.13)

Esta equação pode ser iterada obtendo-se a expansão

$$U(t,t') = 1 - i \int_{t'}^{t} dt_1 H'_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t'}^{t} dt_1 H'_I(t_1) \int_{t'}^{t_1} dt_2 H_I(t_2) + \dots + (-i)^n \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n H'_I(t_1) \cdots H'_I(t_n) + \dots$$
(3.14)

Claro que esta expansão só poderá ser útil de alguma forma se  $H_I$  tiver um parâmetro pequeno e se puderem desprezar termos a partir de certa ordem. Voltando à Eq. (3.14), como  $t_1 \ge t_2 \ge \cdots t_n$  o produto é ordenado no tempo e podemos escrever

$$U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t'}^t dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} dt_n T(H_I'(t_1) \cdots H_I'(t_n))$$
(3.15)

Usando a simetria para  $t_1, t_2$  podemos escrever

$$\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 T(H'_I(t_1) H'_I(t_2)) = \int_{t'}^{t} dt_2 \int_{t'}^{t_2} dt_1 T(H'_I(t_1) H'_I(t_2))$$
  
=  $\frac{1}{2} \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t} dt_2 T(H'_I(t_1) H'_2(t_2))$  (3.16)

Em geral, para n integrações, em vez de  $\frac{1}{2}$  será $\frac{1}{n!}$  pelo que obtemos

$$U(t,t') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t'}^t dt_1 \cdots \int_{t'}^t dt_n T(H'_I(t_1) \cdots H'_I(t_n))$$
  
$$\equiv T\left(\exp[-i\int_{t'}^t dt H'_I(t)]\right)$$

Capítulo 3. Teoria das Perturbações Covariante

$$= T\left(\exp\left[-i\int_{t'}^{t} d^4x \mathcal{H}_I(\varphi_{in})\right]\right)$$
(3.17)

onde o produto ordenado da exponencial é para ser interpretado através de sua expansão.

Os operadores U satisfazem a seguinte regra multiplicativa

$$U(t,t') = U(t,t'')U(t'',t')$$
(3.18)

o que se pode ver através de definição Eq. (3.10) ou através da expressão explicita Eq. (3.17). Da Eq. (3.18) resulta ainda

$$U(t,t') = U^{-1}(t',t)$$
(3.19)

## 3.2 Expansão perturbativa das funções de Green

Como vimos no capítulo anterior, a técnica de redução de LSZ reduz o cálculo dos elementos da matriz S a um ingrediente básico, as chamadas funções de Green. Estas são valores de expectação no vácuo de produtos ordenados no tempos de campos de Heisenberg,  $\varphi(x)$ :

$$G(x_1, \cdots, x_n) \equiv \langle 0 | T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n) | 0 \rangle$$
(3.20)

A ideia básica do cálculo das funções de Green consiste em exprimir os campos  $\varphi(x)$  em termos dos campos  $\varphi_{in}(x)$  usando o operador U. Obtemos

$$G(x_{1}, \dots, x_{n}) = \langle 0 | T(U^{-1}(t_{1})\varphi_{in}(x_{1})U(t_{1}, t_{2})\varphi_{in}(x_{2})U(t_{2}, t_{3}) \dots \\ \dots U(t_{n-1}, t_{n})\varphi_{in}(x_{n})U(t_{n})) | 0 \rangle$$
  
$$= \langle 0 | T(U^{-1}(t)U(t, t_{1})\varphi_{in}(x_{1})U(t_{1}, t_{2}) \dots \\ \dots U(t_{n-1}, t_{n})\varphi_{in}(x_{n})U(t_{n} - t)U(-t)) | 0 \rangle$$
(3.21)

onde t é um tempo que vamos deixar ir para  $\infty$ . Quando  $t \to \infty$ , t é mais tarde do que todos os  $t_i \in -t$  é anterior a todos os  $t_i$ . Podemos portanto extrair  $U^{-1}(t) \in U(-t)$  para fora do produto ordenado no tempo. Usando a propriedade multiplicativa do operador U podemos escrever

$$G(x_1, \cdots, x_n) = \langle 0 | U^{-1}(t) T\left(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n) \exp\left[-i \int_{-t}^{t} H'_I(t') dt'\right]\right) U(-t) | 0 \rangle$$
(3.22)

84

#### 3.2. Expansão perturbativa das funções de Green

onde o produto T é para ser aplicado depois de expandir o exponencial. Se não fosse pela presença dos operadores  $U^{-1}(t)$  e U(-t) teríamos conseguido exprimir a função  $G(x_1 \cdots x_n)$  completamente em termos dos campos *in*. Vamos mostrar agora que o vácuo é um estado próprio do operador U(t). Para isso consideremos um estado arbitrário in  $|\alpha p; in\rangle$  que contém uma partícula de momento p, sendo os demais números quânticos representados colectivamente por  $\alpha$ . Para simplificar continuamos a considerar o caso do campo escalar. Escrevemos então

$$\begin{aligned} \langle \alpha p; in | U(-t) | 0 \rangle &= \langle \alpha; in | a_{in}(p) U(-t) | 0 \rangle \\ &= -i \int d^3 x f_p^*(\vec{x}, -t') \left( \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t'} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'} \right) \langle \alpha; in | \varphi_{in}(\vec{x}, -t') U(-t) | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$(3.23)$$

onde  $f_p(\vec{x},t) = e^{-ip \cdot x}$ . Agora vamos usar a Eq. (3.1) para expressar  $\varphi_{in}(\vec{x},-t)$  em termos de  $\varphi(\vec{x},-t)$ . Obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \alpha p; in | U(-t) | 0 \rangle &= \\ &= -i \int d^3 x f_p^*(\vec{x}, -t') \overleftrightarrow{\partial}_0' \left\langle \alpha; in | U(-t') \varphi(\vec{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \right\rangle \\ &= -i \int d^3 x f_p^*(\vec{x}, -t') \Big[ -\overleftarrow{\partial}_{0'} \left\langle \alpha; in | U(-t') \varphi(\vec{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \right\rangle \\ &+ \left\langle \alpha; in | U(-t') \dot{\varphi}(\vec{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \right\rangle \Big] \\ &+ i \int d^3 x f_p^*(\vec{x}, -t') \left\langle \alpha; in | \dot{U}(-t') \varphi(\vec{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \right\rangle \\ &+ i \int d^3 x f_p^*(\vec{x}, -t') \left\langle \alpha; in | U(-t') \varphi(\vec{x}, -t') U^{-1}(-t') U(-t) | 0 \right\rangle \end{aligned}$$
(3.24)

Tomamos agora o limite  $t = t' \rightarrow \infty$ . Então

$$\langle \alpha p; in | U(-t) | 0 \rangle = \sqrt{Z} \langle \alpha; in | U(-t)a_{in}(p) | 0 \rangle$$
  
+  $\langle \alpha; in | \dot{U}(-t)\varphi(\vec{x}, -t) + U(-t)\varphi(\vec{x}, -t)\dot{U}^{-1}(-t)U(-t) | 0 \rangle$  (3.25)

Agora o primeiro termo na Eq. (3.25) é zero pois  $a_{in}(p) |0\rangle = 0$ . O segundo também é zero pois (omitindo o argumento para simplificar)

$$\dot{U}\varphi + U\varphi \dot{U}^{-1}U = \dot{U}U^{-1}\varphi_{in}U + \varphi_{in}U\dot{U}^{-1}U$$
$$= \dot{U}U^{-1}\varphi_{in}U - \varphi_{in}\dot{U}U^{-1}U$$

Capítulo 3. Teoria das Perturbações Covariante

$$= [\dot{U}U^{-1}, \varphi_{in}]U = -i[H_I, \varphi_{in}]U = 0$$
 (3.26)

onde se usou a Eq. (3.6) e a hipótese de interacções sem derivadas. Concluímos assim que

$$\lim_{t \to \infty} \langle \alpha p; in | U(-t) | 0 \rangle = 0 \tag{3.27}$$

para todos os estados inque contenham pelo menos uma partícula. Isto quer dizer que

$$\lim_{t \to \infty} U(-t) \left| 0 \right\rangle = \lambda_{-} \left| 0 \right\rangle \tag{3.28}$$

De modo semelhante se podia mostrar que

$$\lim_{t \to \infty} U(t) \left| 0 \right\rangle = \lambda_+ \left| 0 \right\rangle \tag{3.29}$$

Voltando agora à expressão para a função de Green, podemos escrever

$$G(x_1, \cdots x_n) = \lambda_{-} \lambda_{+}^* \langle 0 | T \left( \varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n) \exp\left[ -i \int_{-t}^{t} H'_I(t') dt' \right] \right) | 0 \rangle \quad (3.30)$$

A dependência no operador U saiu do valor da expectação do vácuo. Para prosseguir calculemos as constantes  $\lambda_{\pm}$  ou melhor a combinação  $\lambda_{-}\lambda_{+}^{*}$  que aparece na Eq. (3.30). Obtemos (no limite  $t \to \infty$ )

$$\lambda_{-}\lambda_{+}^{*} = \langle 0|U(-t)|0\rangle \langle 0|U^{-1}(t)|0\rangle$$

$$= \langle 0|U(-t)U^{-1}(t)|0\rangle = \langle 0|U(-t,t)|0\rangle$$

$$= \langle 0|T\left(\exp\left[+i\int_{-t}^{t}dt'H'_{I}(t')\right]\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|T\left(\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H'_{I}(t')\right]\right)|0\rangle^{-1}$$
(3.31)

Usando este resultado podemos escrever a função de Green Eq. (3.30) na forma

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n) \exp[-i \int_{-t}^{t} dt' H'_I(t')]) | 0 \rangle}{\langle 0 | T(\exp[-i \int_{-t}^{t} dt' H'_I(t')) | 0 \rangle}$$
(3.32)

quando  $t \to \infty$ . Antes de escrevermos a expressão final podemos agora calcular o número  $E_0(t)$ . De facto fazendo

$$H'_{I} = H_{I} + E_{0} \tag{3.33}$$

#### 3.3. Teorema de Wick

e notando que  $E_0$  não é um operador, aparece-nos um factor  $\exp[-i \int_{-t}^{t} dt' E_0(t')]$ tanto no numerador como no denominador, cancelando no final. A expressão final obtém-se da Eq. (3.32) substituindo  $H'_I$  por  $H_I$ . Obtemos portanto

$$G(x_{1}\cdots,x_{n}) = \frac{\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n})\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H_{I}(t')\right)|0\rangle}{\langle 0|T(\exp\left[-i\int_{-t}^{t}dt'H_{I}(t')\right)|0\rangle}$$
$$= \frac{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i)^{m}}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}d^{4}y_{1}\cdots d^{4}y_{m}\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{m})\mathcal{H}_{I}(y_{1})\cdots\mathcal{H}_{I}(y_{m})|0\rangle}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^{n}}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty}d^{4}y_{1}\cdots d^{4}y_{n}\langle 0|T(\mathcal{H}_{I}(y_{1})\cdots\mathcal{H}_{I}(y_{n}))|0\rangle}$$
(3.34)

Esta equação é o resultado fundamental. As funções de Green foram expressas em termos dos campos in cuja álgebra conhecemos. É portanto possível reduzir a Eq. (3.34) a números. Nessa redução desempenha um papel fundamental o teorema de Wick que passamos a expor.

## 3.3 Teorema de Wick

Para calcularmos as amplitudes que aparecem na Eq. (3.34) temos que mover os operadores de destruição para a direita até actuarem no vácuo. O resultado final é o teorema de Wick que tem a seguinte expressão

$$T(\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n})) =$$

$$=:\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n}):+[\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2}))|0\rangle:\varphi_{in}(x_{3})\cdots\varphi_{in}(x_{n}):+\text{perm.}]$$

$$=[\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2}))|0\rangle\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{3})\varphi_{in}(x_{4}))|0\rangle:\varphi_{in}(x_{5})\cdots\varphi_{in}(x_{n})+\text{perm.}]$$

$$+\cdots$$

$$+\begin{cases}\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2}))|0\rangle\cdots\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{n-1})\varphi_{in}(x_{n}))|0\rangle+\text{perm.}\\ n \text{ par}\end{cases}$$

$$\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2})|0\rangle\cdots\langle 0|T(\varphi_{in}(x_{n-2})\varphi_{in}(x_{n-1}))|0\rangle\varphi_{in}(x_{n})+\text{perm.}\\ n \text{ impar}\end{cases}$$

(3.35)

#### Demonstração :

A demonstração faz-se por indução. Para n = 1 é certamente verdadeiro (e trivial). Também é fácil de verificar para n = 2. De facto

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_n(x_2)) =: \varphi_n(x_1)\varphi_{in}(x_2) : +\text{c-number}$$
(3.36)

onde o c – number resulta das comutações que é necessário efectuar para colocar os operadores de destruição à direita. Para encontrar esta constante não é preciso fazer de facto as contas mas somente notar que

$$\langle 0|:\cdots:|0\rangle = 0 \tag{3.37}$$

Então

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2) =: \varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2) :+ \langle 0| T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) |0\rangle$$
(3.38)

o que está de acordo com a Eq. (3.35).

Prosseguindo com a indução, vamos supor que Eq. (3.35) é válida para algum n. Temos que mostrar que é também válida no caso n + 1. Consideremos então  $T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n + 1))$  e supomos que  $t_{n+1}$  é o tempo mais cedo. Então

$$T(\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n+1})) =$$

$$= T(\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n}))\varphi_{in}(x_{n+1})$$

$$= :\varphi_{in}(x_{1})\cdots\varphi_{in}(x_{n}):\varphi_{in}(x_{n+1})$$

$$+ \sum_{\text{perm}} \langle 0| T(\varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2})) |0\rangle:\varphi_{in}(x_{3})\cdots\varphi_{in}(x_{n}):\varphi_{in}(x_{n+1})$$

$$+\cdots \qquad(3.39)$$

Para escrever a Eq. (3.39) na forma Eq. (3.35) é necessário encontrar a regra para introduzir  $\varphi_{in}(x_n + 1)$  no interior do produto normal. Para isso notemos que se

$$\varphi_{in}(x) = \varphi_{in}^{(+)}(x) + \varphi_{in}^{(-)}(x)$$
 (3.40)

onde  $\varphi_{in}^{(+)}(x)$  contém o operador de destruição <br/>e $\varphi_{in}^{(-)}(x)$ o operador de criação podemos escrever

$$:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n):=\sum_{A,B}\prod_{i\in A}\varphi_{in}^{(-)}(x_i)\prod_{j\in B}\varphi_{in}^{(+)}(x_j)$$
(3.41)

onde a soma é sobre todos os conjuntos A,Bque constituem partições dos níndices. Então

$$:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n):\varphi_{in}(x_{n+1})=$$

#### 3.3. Teorema de Wick

$$= \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \varphi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{j \in B} \varphi_{in}^{(+)}(x_j) [\varphi_{in}^{(+)}(x_{n+1}) + \varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1})]$$

$$= \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \varphi_{in}^{(-)}(x_i) \prod_{j \in B} \varphi_{in}^{(+)}(x_j) \varphi_{in}^{+}(x_{n+1})$$

$$+ \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \varphi_{in}^{(-)}(x_i) \varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) \prod_{j \in B} \varphi_{in}^{(+)}(x_j)$$

$$+ \sum_{A,B} \prod_{i \in A} \varphi_{in}^{(-)}(x_i) \sum_{k \in B} \prod_{j \in B j \neq k} \varphi_{in}^{(+)}(x_j) \langle 0 | \varphi_{in}^{(+)}(x_k) \varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) | 0 \rangle \quad (3.42)$$

Agora podemos escrever

$$\langle 0 | \varphi_{in}^{(+)}(x_k) \varphi_{in}^{(-)}(x_{n+1}) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi_{in}(x_k) \varphi_{in}(x_{n+1}) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_k) \varphi_{in}(x_{n+1}) | 0 \rangle$$

$$(3.43)$$

onde se usou o facto de  $t_{n+1}$ ser o tempo mais cedo. Podemos portanto escrever a Eq. (3.42)na forma

$$:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_n):\varphi_{in}(x_{n+1})=:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_{n+1}):$$
  
+
$$\sum_k:\varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_{k-1})\varphi_{in}(x_{k+1})\cdots\varphi_{in}(x_n):\langle 0|T(\varphi_{in}(x_k)\varphi_{in}(x_{n+1})|0\rangle$$
(3.44)

Com este resultado a Eq. (3.39) toma a forma geral da Eq. (3.35) para n + 1 provando portanto o teorema. É conveniente tentar fazer o caso n = 4 para se ver a mecânica do teorema a trabalhar. A importância do teorema de Wick resulta dos seguintes corolários.

**Corolário 1** : Se *n* é ímpar  $\langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n)) | 0 \rangle = 0$  o que obviamente é consequência das Eqs. (3.35) e (3.37) e de

$$\langle 0 | \varphi_{in}(x) | 0 \rangle = 0 \tag{3.45}$$

Corolário 2: Se n é par

$$\langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n)) | 0 \rangle =$$
  
=  $\sum_{\text{perm}} \delta_p \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) | 0 \rangle \cdots \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_{n-1})\varphi_{in}(x_n)) | 0 \rangle$ (3.46)

onde  $\delta_p$  é o sinal de permutação que é necessário introduzir para o caso de fermiões. Este resultado que é o mais importante na prática resulta também das Eqs. (3.35), (3.37) e (3.45).

Portanto os valores de expectação no vácuo do produto ordenado no tempo de n operadores que aparecem na fórmula geral Eq. (3.34) são obtidos considerando todos os valores de expectação dos campos tomados dois a dois (*contracções*) de todas as formas possíveis. Ora essas *contracções* não são mais do que os propagadores de Feynman dos campos livres. Por exemplo

$$\langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4)) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_3)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_4)) | 0 \rangle$$

$$+ \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_4)) | 0 \rangle \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)) | 0 \rangle$$

$$= \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4)$$

$$+ \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)$$

$$(3.47)$$

onde

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}$$
(3.48)

é o propagador de Feynman da teoria livre para o caso de campos escalares.

E conveniente usar uma representação gráfica para estes propagadores. Temos, no espaço das configurações,

$$\mathbf{y} \bullet \dots \bullet \mathbf{x} \quad \Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x-y)}$$
 (3.49)

$$\mathbf{y} \underbrace{\mathbf{\beta}}_{\boldsymbol{\beta}} \underbrace{\mathbf{p}}_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x} \quad S_F(x-y)_{\alpha\beta} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not p+m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \alpha\beta e^{-ip\cdot(x-y)}$$
(3.50)

$$x \underbrace{\mu}_{\mu} \underbrace{k}_{\nu} y \qquad D_{F}^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^{2}+i\epsilon} e^{-ik\cdot(x-y)}$$
(3.51)

respectivamente para campos escalares, spinoriais e para o fotão (na gauge de Feynman).

Como o Hamiltoniano de interacção está ordenado normalmente não haverá contracções entre os campos que aparecem em  $\mathcal{H}_I$ , mas somente com os outros campos



Figura 3.1:

fora de  $\mathcal{H}_I$ . Assim as contracções ficam ligadas aos pontos correspondendo a  $\mathcal{H}_I$  que são chamados vértices. Para ilustrar este ponto consideremos a teoria  $\lambda \varphi^4$  onde

$$\mathcal{H}_I(x) = \frac{1}{4!}\lambda : \varphi_{in}^4(x) : \tag{3.52}$$

Então uma contribuição de ordem  $\lambda^2$  para  $G(x_1, x_2, x_3, x_4)$  vem do termo

$$\frac{\lambda^2}{(4!)^2} \left\langle 0 \right| T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4) : \varphi_{in}^4(y_1) :: \varphi_{in}^4(y_2) : |0\rangle$$
(3.53)

e conduz a diagramas como os representados na Fig. (3.1). Nestes diagramas a interacção é representada por quatro linhas saindo dum ponto  $(y_1 \text{ ou } y_2)$ . Essas linhas são contracções dum campo aparecendo em  $\mathcal{H}_I$  com outro campo que pode ser pertenvente a outro  $\mathcal{H}_I$  ou um dos outros campos em  $G(x_1 \cdots x_4)$ . Para encontrar as regras de Feynman temos agora somente um problema de cálculo combinatório. Não as vamos apresentar aqui pois elas são mais simples no espaço dos momentos, o que veremos a seguir.

Nas figuras anteriores os diagramas a), b) e d) são ditos *conexos* e o diagrama c) é *desconexo*. Um diagrama diz-se *desconexo* quando há uma sub-parte do diagrama que não está ligada de modo nenhum a uma linha externa. Vamos ver já de seguida que estes não contribuem para as funções de Green. O diagrama d) é conexo mas diz-se *redutível* porque pode ser obtido através do produto de funções de Green mais simples. Como veremos no seguimento só os diagramas irredutíveis são importantes.



Figura 3.2:

## 3.4 Amplitudes Vácuo - Vácuo

Vimos na secção anterior exemplos do numerador da Eq. (3.34). Vamos aqui olhar para o denominador, as chamadas amplitudes vácuo - vácuo sem linhas externas. Continuando a usar como exemplo a teoria  $\lambda \varphi^4$  alguns dos diagramas contribuindo para essas amplitudes são as indicadas na Fig. (3.2). Os diagramas associados com o numerador da Eq. (3.34) podem ser separados unicamente numa parte conexa e noutra desconexa. Para todos os diagramas que têm como parte conexa uma contribuição que é de ordem s na interacção  $\mathcal{H}_I$  o numerador de  $G(x_1 \cdots x_n)$  toma a forma

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_p \left\langle 0 \right| T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n) \mathcal{H}_I(y_1) \cdots \mathcal{H}_I(y_s)) \left| 0 \right\rangle_c$$
$$\times \frac{p!}{s!(p-s)!} \left\langle 0 \right| T(\mathcal{H}_I(y_{s+1}) \cdots \mathcal{H}_I(y_p)) \left| 0 \right\rangle$$
(3.54)

onde o índice c indica que só as partes conexas são incluídas. O factor combinatório

$$\binom{p}{s} = \frac{p!}{s!(p-s)!} \tag{3.55}$$

é o número de maneiras de extrair s termos  $\mathcal{H}_I$  dum conjunto de p. Então escrevemos a Eq. (3.54) na forma

$$\frac{(-i)^s}{s!} \int d^4 y_1 \cdots d^4 y_s \langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1) \cdots \varphi_{in}(x_n) \mathcal{H}_I(y_1) \cdots \mathcal{H}(y_s)) | 0 \rangle_c \\ \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-i)^r}{r!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_r \langle 0 | T(\mathcal{H}_I(z_1) \cdots \mathcal{H}_I(z_r)) | 0 \rangle$$
(3.56)

Esta equação tem a forma dum diagrama conexo de ordem s vezes uma série infinita de amplitudes vácuo-vácuo, que cancela exactamente o denominador. Isto é verdade para qualquer ordem pelo que podemos escrever

$$G(x_1, \cdots x_n) = \frac{\sum_i G_i(x_1 \cdots x_n)}{\sum_k D_k} = \frac{(\sum_i G_i^c(x_1, \cdots x_n))(\sum_k D_k)}{\sum_k D_k}$$
$$= \sum_i G_i^c(x_1 \cdots y_n)$$
(3.57)

onde  $G_i^c$  são os diagramas conexas e  $D_k$  os disconexos. Este resultado quer dizer em termos simples que podemos esquecer completamente todos os diagramas desconexas e considerar apenas os diagramas conexas no cálculo das funções de Green. Esta é simplesmente a soma de todos os diagramas de Feynman conexos. Assim a estrutura da Eq. (3.34) simplifica-se enormemente.

# **3.5** Regras de Feynman para $\lambda \varphi^4$

Para vermos como as regras de Feynman aparecem vamos considerar o caso do campo escalar real com uma auto interacção de forma

$$\mathcal{H}_I = \frac{\lambda}{4!} : \varphi_{in}^4 := -\mathcal{L}_I \tag{3.58}$$

Para sermos precisos vamos considerar duas partículas no estado inicial e duas no estado final. Então o elemento de matriz S é

$$S_{fi} = \langle p'_1 p'_2; out | p_1 p_2; in \rangle$$
  
=  $(i)^4 \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 e^{-ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2 + ip'_1 \cdot x_3 + ip'_2 \cdot x_4}$   
 $(\Box_{x_1} + m^2) \cdots (\Box_{x_4} + m^2) \langle 0 | T(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)) | 0 \rangle (3.59)$ 

Para a função de Green usamos as fórmulas das Eqs. (3.34) e (3.57) e escrevemos

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^p}{p!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_p$$
  
$$\langle 0 | T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4) : \frac{\varphi_{in}^4(z_1)}{4!} : \cdots : \frac{\varphi_{in}^4(z_p)}{4!} :) | 0 \rangle \quad (3.60)$$

Como o caso p = 0 é trivial (não há interacção) começamos pelo caso p = 1



Figura 3.3:

p = 1

Então a função de Green é

$$G(x_{1}, x_{2}, x_{3}, x_{4}) = (-i\lambda) \int d^{4}z \, \langle 0 | T \left( \varphi_{in}(x_{1})\varphi_{in}(x_{2})\varphi_{in}(x_{3})\varphi_{in}(x_{4}) : \frac{\varphi_{in}^{4}(z)}{4!} : \right) | 0 \rangle$$
  
$$= (-i\lambda) \frac{4!}{4!} \int d^{4}z \Delta_{F}(x_{1}-z) \Delta_{F}(x_{2}-z) \Delta_{F}(x_{3}-z) \Delta_{F}(x_{4}-z)$$
(3.61)

a que corresponde no espaço das configurações o diagrama representado na Fig. (3.3). Para prosseguir introduzimos a transformada de Fourier dos propagadores, por exemplo

$$\Delta(x_1 - z) = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} e^{+iq_1 \cdot (x_1 - z)} \Delta_F(q_1)$$
(3.62)

onde

$$\Delta_F(q_1) = \frac{i}{q_1^2 - m^2} \tag{3.63}$$

Então

$$G(x_{1}, \cdots x_{4}) = (-i\lambda) \int d^{4}z d^{4}q_{1} \cdots d^{4}q_{4} \ e^{-iq_{1} \cdot x_{1} - iq_{2}x_{2} - iq_{3}x_{3} - iq_{4}x_{4} + i(q_{1} + q_{2} + q_{3} + q_{4}) \cdot z}$$
  

$$\Delta_{F}(q_{1})\Delta_{F}(q_{2})\Delta_{F}(q_{3})\Delta_{F}(q_{4})$$
  

$$= (-i\lambda) \int d^{4}q_{1} \cdots d^{4}q_{4} \ e^{+iq_{1} \cdot x_{1} + iq_{2} \cdot x_{2} + iq_{3} \cdot x_{3} + iq_{4} \cdot x_{4}}$$
  

$$(2\pi)^{4}\delta^{4}(q_{1} + q_{2} + q_{3} + q_{4})\Delta_{F}(q_{1})\Delta_{F}(q_{2})\Delta_{F}(q_{3})\Delta_{F}(q_{4})$$



Figura 3.4:

(3.64)

Portanto se introduzirmos o elemento reduzido da matriz T definido pela relação

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) T_{fi}$$
(3.65)

obtemos

$$-iT_{fi} = (-i\lambda) \tag{3.66}$$

Para este amplitude desenhamos o diagrama de Feynman da Fig. (3.4) e associamos ao vértice o número  $(-i\lambda)$ .

p = 2

Consideremos agora um caso mais complicado, o cálculo de  $G(x_1 \cdots x_4)$  em segunda ordem no parâmetro. Depois deste caso estaremos em posição de formular as regras de Feynman no espaço dos momentos com toda a generalidade. Da Eq. (3.60) resulta em segunda ordem em  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} G(x_1, \cdots x_4) &= \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \, \langle 0 | \, T \left( \varphi_{in}(x_1) \varphi_{in}(x_2) \varphi_{in}(x_3) \varphi_{in}(x_4) : \frac{\varphi_{in}^4(z_1)}{4!} :: \frac{\varphi_{in}^4(z_2)}{4!} : \right) | 0 \rangle_c \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \left( \frac{4 \times 3}{4!} \right) \times \left( \frac{4 \times 3}{4!} \right) \times 2 \\ &\left\{ \Delta_F(x_1 - z_1) \Delta_F(x_2 - z_1) \Delta_F(z_1 - z_2) \Delta_F(z_1 - z_2) \Delta_F(z_2 - x_3) \Delta_F(z_2 - x_4) \right. \end{aligned}$$



Vamos agora passar para o espaço dos momentos. Comecemos pelo diagrama a)

$$\begin{aligned} G^{(a)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \Delta_F(x_1 - z_1) \Delta_F(x_2 - z_1) \Delta_F(z_1 - z_2) \Delta_F(z_1 - z_2) \\ &\Delta_F(z_2 - x_3) \Delta_F(z_2 - x_4) \\ &= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_4}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_5}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_6}{(2\pi)^4} \\ &e^{i[(q_1 \cdot x_1 + q_2 \cdot x_2 - q_3 \cdot x_3 - q_4 \cdot x_4) + z_1 \cdot (q_5 - q_1 - q_2 + q_6) + z_2 \cdot (q_3 + q_4 - q_5 - q_6)]} \end{aligned}$$

$$\Delta_F(q_1)\Delta_F(q_2)\Delta_F(q_3)\Delta_F(q_4)\Delta_F(q_5)\Delta_F(q_6)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2!}\frac{1}{2}(2\pi)^4\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4q_5}{(2\pi)^4}\delta^4(q_1+q_2-q_3-q_4) \ e^{i[q_1\cdot x_1+q_2\cdot x_2-q_2\cdot x_3-q_4\cdot x_4]}$$

## 3.5. Regras de Feynman para $\lambda \varphi^4$

$$\Delta_F(q_1)\Delta_F(q_2)\Delta_F(q_3)\Delta_F(q_4)\Delta_F(q_5)\Delta_F(q_1+q_2-q_5)$$
(3.68)

Agora introduzimos esta relação na fórmula de redução. Obtemos

$$S_{fi}^{(a)} = (i)^4 \int d^4 x_1 \cdot d^4 x_4 e^{-i[p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - p'_1 \cdot x_3 - p'_2 \cdot x_4]} (\Box_{x_1} + m^2) \cdots (\Box_{x_4} + m^2) G^{(a)}(x_1, \cdots, x_4)$$
(3.69)

A única dependência de  $G^{(a)}$  em  $x_i (i = 1, \cdots 4)$  é na exponencial, pelo que

$$(\Box_{x_i} + m^2) \to (-q_i^2 + m^2)$$
 (3.70)

e portanto usando

$$(-q_i^2 + m^2)\Delta_F(q_i) = -i$$
(3.71)

obtemos

$$S_{fi}^{(a)} = \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_4 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_5}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 (q_1 + q_2 - q_3 - q_4)$$

$$e^{-i[x_1 \cdot (p_1 - q_1) + x_2 \cdot (p_2 - q_2) - x_3 \cdot (p_1' - q_3) - x_4 \cdot (p_2' - q_4)]} \Delta_F(q_5) \Delta_F(q_1 + q_2 - q_5)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 q_5}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 (q_1 + q_2 - q_3 - q_4) (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 - q_1)$$

$$(2\pi)^4 \delta^4 (p_2 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4 (p_1' - q_3) (2\pi)^4 \delta^4 (p_2' - q_4) \Delta_F(q_5) \Delta_F(q_1 + q_2 - q_5)$$

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int \frac{d^4 q_5}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \Delta_F(q_5) \Delta_F(p_1 + p_2 - q_5) \quad (3.72)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma:

$$S_{fi}^{(a)} = (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_1' - p_2') \frac{(-i\lambda)^2}{2!} \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) \Delta_F(p_1 + p_2 - q) \quad (3.73)$$

Se designarmos por a') o diagrama a) com  $z_1 \leftrightarrow z_2$  e refizermos o cálculo anterior obtemos exactamente o mesmo resultado da Eq. (3.73). Portanto

$$S_{fi}^{(a+a')} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')(-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) \Delta_F(p_1 + p_2 - q) \quad (3.74)$$

ou ainda, em termos da matriz ${\cal T}_{fi}$ 



Figura 3.5:

$$-iT_{fi}^{(a+a')} = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) \Delta_F(p_1 + p_2 - q)$$
(3.75)

Para este resultado desenhamos o diagrama de Feynman da Fig. (3.5), que tem a mesma topologia de a) e a') mas agora no espaço dos momentos. Assim vemos que para calcular a matriz -iT, associamos a cada vértice o factor  $(-i\lambda)$ , a cada linha interna o propagador  $\Delta_F$  e por cada loop o integral  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ . Além disso há conservação de 4- momento em cada vértice. Finalmente há ainda um factor de simetria (ver à frente) de  $\frac{1}{2}$  para este diagrama.

Se repetirmos os cálculos para os diagramas b) + b') e c) + c') é fácil de ver que obtemos

$$-iT_{fi}^{(b+b')} = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) \Delta_F(q-p_1+p_1')$$
(3.76)

е

$$-iT_{fi}^{(c+c')} = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Delta_F(q) \Delta_F(q-p_1+p_2')$$
(3.77)

a que correspondem os diagramas da Fig. (3.6).

Depois deste exercício estamos em condições de enunciar com toda a generalidade as regras de Feynman para a teoria  $\lambda \varphi^4$  para o cálculo dos elementos de matriz -iT, isto é, depois de factorizar o  $(2\pi)^4 \delta^4(\cdots)$ . Estas são (para um processo com *n* pernas exteriores):

- 1. Desenhar todos os diagramas topológicamente distintos com n pernas exteriores.
- 2. Por cada vértice multiplicar por  $(-i\lambda)$
- 3. A cada linha interior associar um propagador  $\Delta_F(q)$



Figura 3.6:

- 4. Por cada loop incluir o integral  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ . O sentido deste momento é irrelevante nesta teoria mas tem que haver conservação de 4 momento em cada vértice.
- 5. Multiplicar pelo factor de simetria do diagrama. Este é definido por

$$S = \frac{\text{Maneiras distintas de ligar os vértices às pernas exteriores}}{\text{Permutações em cada vértice } \times \text{Permutações de vértices iguais}}$$
(3.78)

6. Some as contribuições de todos os diagramas topológicamente distintos. O resultado é o elemento da matriz -iT que entra na fórmula para a secção eficaz de difusão.

# **3.6 Regras de Feynman para** QED

Passemos agora ao caso de QED. Também é uma teoria sem derivadas na interacção que é portanto

$$\mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I = -eQ\overline{\psi}_{in}\gamma^{\mu}\psi_{in}A^{in}_{\mu} \tag{3.79}$$

As escrevermos a Eq. (3.79) mudámos a nossa convenção anterior e passámos a chamar e ao módulo de carga do electrão. O sinal está em Q que para o electrão é -1. A vantagem da Eq. (3.79) é que permite uma generalização fácil para o caso dos quarks onde Q deixará de ser inteiro. Para QED, isto é com electrões, podemos portanto escrever

$$\mathcal{L}_{I}^{QED} = e\overline{\psi}_{in}\gamma^{\mu}\psi_{in}A_{\mu}^{in} \tag{3.80}$$

Devido à conservação de carga eléctrica, as funções de Green que vamos ter de calcular têm um número igual de campos  $\psi \in \overline{\psi}$ . Em geral serão

$$G(x_1 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_{2n}; y_1 \cdots y_p) =$$
  
=  $\langle 0 | T(\psi(x_1) \cdots \psi(x_n) \overline{\psi}(x_{n+1}) \cdots \overline{\psi}(x_{2n}) A^{\mu_1}(y_1) \cdots A^{\mu_p}(y_p)) | 0 \rangle$  (3.81)

onde omitiremos os índices spinoriais nos campos fermiónicos. Esta expressão está escrita em termos dos campos físicos. Seguindo um processo idêntico ao do caso dos campos escalares podemos derivar uma fórmula para G em termos dos campos in. Será

$$G(x_{1}\cdots x_{2n}; y_{1}\cdots y_{p}) = \frac{\langle 0|T\psi_{in}(x_{1})\cdots\overline{\psi}_{in}(x_{2n})A_{in}^{\mu_{1}}(y_{1})\cdots A_{in}^{\mu_{p}}(y_{p}) \ e^{[i\int d^{4}z\mathcal{L}_{I}(z)]} |0\rangle}{\langle 0|T\exp[i\int d^{4}z\mathcal{L}_{I}(z)] |0\rangle}$$
$$= \langle 0|T\psi_{in}(x_{1})\cdots\overline{\psi}_{in}(x_{2n})A_{in}^{\mu_{1}}(y_{1})\cdots A_{in}^{\mu_{p}}(y_{p}) \ e^{[i\int d^{4}t\mathcal{L}_{I}(z)]} |0\rangle_{c}$$
(3.82)

onde os campos em  $\mathcal{L}_I$  estão ordenados normalmente e  $\langle 0 | \cdots | 0 \rangle_c$  significa que apenas consideramos os diagramas conexos.

Para chegarmos às regras de Feynman vamos considerar alguns processos simples.

#### 3.6.1 Efeito de Compton

Este processo diz respeito à reação

$$e^- + \gamma \to e^- + \gamma \tag{3.83}$$

para o qual escolhemos a cinemática da Fig. (3.7). O elemento da matriz ${\cal S}$  a calcular, é portanto

$$S_{fi} = \langle (p', s'), k'; out | (p, s), k; in \rangle$$

$$(3.84)$$

Usando (3.93) e (3.100) podemos escrever:

$$\begin{split} S_{fi} &= \\ &= \int d^4x d^4x' \int d^4y d^4y' e^{-i[p\cdot x + k\cdot y - p'\cdot x' - k'y']} \varepsilon^{\mu}(k) \varepsilon^{*\mu'}(k') \\ &\overline{u}(p',s')_{\alpha'}(i\overrightarrow{\partial}_{x'} - m)_{\alpha'\beta'} \overrightarrow{\Box}_y \overrightarrow{\Box}_{y'} \langle 0| T(\psi_{\beta'}(x')\overline{\psi}_{\beta}(x)A_{\mu}(y)A_{\mu'}(y') |0\rangle (-i\overleftarrow{\partial}_x - m)_{\beta\alpha} u_{\alpha}(p,s) \end{split}$$



Figura 3.7:

(3.85)

Temos portanto que calcular a função de Green

$$G(x', x, y, y') \equiv \langle 0 | T(\psi_{\beta'}(x')\overline{\psi}_{\beta}(x)A_{\mu}(y)A_{\mu'}(y')) | 0 \rangle$$
(3.86)

Se usarmos agora a Eq. (3.82) e o facto de que a interacção tem um número ímpar de campos, vemos que a contribuição mais baixa é quadrática na interacção (pelo teorema de Wick o valor de expectação no vácuo do produto ordenado no tempo dum número ímpar de campos é nulo). Temos portanto

$$G(x, x', y, y') = = \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0 | T(\psi_{\beta'}^{in}(x') \overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) A_{\mu}^{in}(y) A_{\mu'}^{in}(y') : \overline{\psi}_{in}(z_1) \gamma^{\sigma} \psi_{in}(z_1) A_{\sigma}^{in}(z_1) :: \overline{\psi}^{in}(z_2) \gamma^{\rho} \psi^{in}(z_2) A_{\rho}^{in}(z_2) : |0\rangle = \frac{(ie)^2}{2!} (\gamma^{\sigma})_{\gamma\delta} (\gamma^{\rho})_{\gamma'\delta'} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0 | T(\psi_{\beta'}^{in}(x') \overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) A_{\mu}^{in}(y) A_{\mu'}^{in}(y') : \overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_1) \psi_{\delta}^{in}(z_1) A_{\sigma}^{in}(z_1) :: \overline{\psi}_{\gamma'}^{in}(z_2) \psi_{\delta'}^{in}(z_2) A_{\rho}^{in}(z_2)) |0\rangle$$
(3.87)

Usemos agora o teorema de Wick para escrever $\langle 0|\,T(\cdots)\,|0\rangle$ em termos dos propagadores. Obtemos

$$\begin{split} \langle 0 | T(\psi_{\beta'}^{in}(x')\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x)A_{\mu}^{in}(y)A_{\mu}^{in}(y'):\overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_{1})\psi_{\delta}^{in}(z_{1})A_{\sigma}^{in}(z_{1})::\overline{\psi}_{\gamma'}^{in}(z_{2})\psi_{\delta'}^{in}(z_{2})A_{\rho}^{in}(z_{2})):|0\rangle \\ = & \langle 0 | T\psi_{\beta'}^{in}(x')\overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_{1}) | 0\rangle \langle 0 | T\psi_{\delta'}^{in}(z_{2})\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) | 0\rangle \langle 0 | T\psi_{\delta}^{in}(z_{1})\overline{\psi}_{\gamma'}(z_{2}) | 0\rangle \\ & \langle 0 | T(A_{\mu}^{in}(y)A_{\sigma}^{in}(z_{1})) | 0\rangle \langle 0 | TA_{\mu'}^{in}(y')A_{\rho}^{in}(z_{2}) | 0\rangle \end{split}$$



Figura 3.8:

 $+ \langle 0 | T\psi_{\beta'}^{in}(x')\overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta'}^{in}(z_{2})\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta'}^{in}(z_{1})\overline{\psi}_{\gamma'}(z_{2}) | 0 \\ \langle 0 | TA_{\mu}^{in}(y)A_{\rho}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \langle 0 | TA_{\mu'}^{in}(y')A_{\sigma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \\ + \langle 0 | T\psi_{\beta'}^{in}(x')\overline{\psi}_{\gamma'}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta'}^{in}(z_{1})\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta''}^{in}(z_{2})\overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \\ \langle 0 | TA_{\mu}^{in}(y)A_{\sigma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \langle 0 | TA_{\mu'}^{in}(y')A_{\rho}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \\ + \langle 0 | T\psi_{\beta'}^{in}(x')\overline{\psi}_{\gamma'}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta'}^{in}(z_{1})\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta''}^{in}(z_{2})\overline{\psi}_{\gamma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \\ \langle 0 | TA_{\mu}^{in}(y)A_{\rho}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta''}^{in}(z_{1})\overline{\psi}_{\beta}^{in}(x) | 0 \rangle \langle 0 | T\psi_{\delta''}^{in}(z_{2})\overline{\psi}_{\gamma'}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \\ \langle 0 | TA_{\mu}^{in}(y)A_{\rho}^{in}(z_{2}) | 0 \rangle \langle 0 | TA_{\mu'}^{in}(y')A_{\sigma}^{in}(z_{1}) | 0 \rangle \\ = S_{F\beta'\gamma}(x'-z_{1})S_{F\delta'\beta}(z_{2}-x)S_{F\delta\gamma'}(z_{1}-z_{2})D_{F\mu\sigma}(y-z_{1})D_{F\mu'\rho}(y'-z_{2}) \\ +S_{F\beta'\gamma'}(x'-z_{2})S_{F\delta\beta}(z_{1}-x)S_{F\delta'\gamma}(z_{2}-z_{1})D_{F\mu\sigma}(y-z_{1})D_{F\mu'\rho}(y'-z_{2}) \\ +S_{F\beta'\gamma'}(x'-z_{2})S_{F\delta\beta}(z_{1}-x)S_{F\delta'\gamma}(z_{2}-z_{1})D_{F\mu\rho}(y-z_{2})D_{F\mu\sigma}(y'-z_{1}) \quad (3.88)$ 

Para se compreender melhor a Eq. (3.88) é conveniente desenhar os diagramas correspondentes (no espaço das configurações). É o que fazemos na Fig. (3.8) Daí é claro que  $b \equiv c$  e  $a \equiv d$  pois  $z_1 \in z_2$  são nomes irrelevantes. Daqui resulta um factor de 2 que vai cancelar com o  $\frac{1}{2!}$  na Eq. (3.87). (De facto este resultado é geral, para n vértices tenho n! que cancela com o  $\frac{1}{n!}$  do desenvolvimento da exponencial). Tenho portanto só dois diagramas distintos que vou considerar que são c) e d). Então (já incluindo o factor de 2) temos

$$G^{(2)}(x, x', y, y') = (ie)^{2} (\gamma^{\sigma})_{\gamma\delta} (\gamma^{\rho})_{\gamma'\delta'} \int d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} S_{F\beta'\gamma'}(x'-z_{2}) S_{F\delta\beta}(z_{1}-x)$$

#### 3.6. Regras de Feynman para QED

$$S_{F\delta'\gamma}(z_2 - z_1)D_{F\mu\sigma}(y - z_1)D_{F\mu'\rho}(y' - z_2)$$
(3.89)

Para prosseguir, podíamos tal como no caso de  $\lambda \varphi^4$ , passar para as transformadas de Fourier dos propagadores. Contudo é mais fácil desembaraçar-mo-nos primeiro das pernas exteriores usando os resultados

$$(i\partial_{x} - m)_{\alpha\lambda}S_{F\lambda\beta}(x - y) = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{4}(x - y)$$
$$S_{F\alpha\lambda}(x - y)(-i\overleftarrow{\partial}_{y} - m)_{\lambda\beta} = i\delta_{\alpha\beta}\delta^{4}(x - y)$$
(3.90)

е

$$\Box_x D_{F\mu\nu}(x-y) = ig_{\mu\nu}\delta^4(x-y) \tag{3.91}$$

Obtemos assim

$$S_{fi}^{(c)} = (ie)^{2} \int d^{4}x d^{4}x' d^{4}y d^{4}y' e^{-i(p \cdot x + k \cdot y - p' \cdot x' - k' \cdot y')} \varepsilon^{\mu}(k) g_{\mu\sigma} \varepsilon^{*\mu'}(k') g_{\mu'\rho}$$

$$(\gamma^{\sigma})_{\gamma\delta}(\gamma^{\rho})_{\gamma'\delta'} \overline{u}(p', s')_{\alpha'} \delta_{\alpha'\gamma'} u_{\alpha}(p, s) \ \delta_{\delta\alpha}$$

$$\int d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} \delta^{4}(x' - z_{2}) \delta^{4}(x - z_{1}) \delta^{4}(y - z_{1}) \delta^{4}(y' - z_{2}) \ S_{F\delta'\gamma}(z_{2} - z_{1})$$

$$= (ie)^{2} \int d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} e^{-i(p \cdot z_{1} + k \cdot z_{1} - p' \cdot z_{2} - k' \cdot z_{2})} \varepsilon^{\mu}(k) \varepsilon^{*\mu'}(k')$$

$$\overline{u}(p', s')_{\alpha'}(\gamma_{\mu'})_{\alpha'\delta'} S_{F\delta'\gamma}(z_{2} - z_{1})(\gamma_{\mu})_{\gamma\alpha} u_{\alpha}(p, s)$$
(3.92)

Finalmente usamos

$$S_F(z_2 - z_1) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i(\not q + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)}$$
  
$$\equiv \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S_F(q) e^{-iq \cdot (z_2 - z_1)}$$
(3.93)

para obter

$$S_{fi}^{(c)} = \int \frac{d^{4}q}{(2\pi)^{4}} d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} e^{-iz_{1} \cdot (p+k-q)+iz_{2} \cdot (p'+k'-q)}$$

$$\varepsilon^{\mu}(k)\varepsilon^{\mu'*}(k')\overline{u}(p',s')(ie\gamma_{\mu'})S_{F}(q)(ie\gamma_{\mu'}')u(p,s)$$

$$= (2\pi)^{4}\delta^{(4)}(p+k-p'-k)\cdot$$

$$\varepsilon^{\mu}(k)\varepsilon^{\mu'*}(k')\overline{u}(p',s')(ie\gamma_{\mu'}')S_{F}(p+k)(ie\gamma_{\mu})u(p,s) \qquad (3.94)$$



Figura 3.9:



Figura 3.10:

Portanto o elemento da matriz T é

$$-iT_{fi}^{(c)} = \varepsilon^{\mu}(k)\varepsilon^{\mu'*}(k')\overline{u}(p',s')(ie\gamma_{\mu'})S_F(p+k)(ie\gamma_{\mu})u(p,s)$$
(3.95)

correspondente ao diagrama da Fig. (3.9) Na Eq. (3.95) agrupámos  $(ie\gamma_{\mu})$  porque vai ser claro que é a regra de Feynman para o vértice. As setas nestes diagramas correspondem ao fluir da carga (do electrão). Repare-se que a um electrão no estado inicial associamos o spinor u(p, s) e a um electrão no estado final o spinor  $\overline{u}(p', s')$ . Como o resultado da linha do electrão tem que dar um número começamos a escrever do final da linha no sentido contrário às setas.

De modo semelhante, para o diagrama d) obteríamos o diagrama representado na Fig. (3.10), a que corresponde a seguinte expressão para a amplitude,

$$-iT_{fi}^{(d)} = \varepsilon^{\mu}(k)\varepsilon^{*\mu'}(k)\overline{u}(p',s')(ie\gamma_{\mu})S_F(p-k')(ie\gamma_{\mu'})u(p,s)$$
(3.96)

Olhando para as Eqs. (3.95) e (3.96) estamos quase em posição de enunciar as regras de Feynman para QED. Vamos só antes disso, analisar outro caso em que entrem positrões.



Figura 3.11:

## 3.6.2 Difusão elástica electrão - positrão (Bhabha Scattering)

Este exemplo vai-nos ensinar duas coisas. Primeiro como é que os positrões entram nas amplitudes e segundo, que em alguns casos devido à anticomutatividade dos fermiões há sinais menos relativos entre os diagramas. Temos

$$S_{fi} = \left\langle (p', s'), (q', \overline{s'}); out | (p, s), (q, \overline{s}); in \right\rangle$$
(3.97)

correspondendo à cinemática da Fig. (3.11). Notar que as setas são no sentido da carga do electrão, mas os momentos correspondem aos momentos das partículas: p a entrar e p' a sair para o electrão e q e entrar e q' a sair para o positrão. No seguimento não vamos indicar a dependência no spin para simplificar as fórmulas. Então, usando (3.93) escrevemos:

$$S_{fi} = \int d^{4}x d^{4}y d^{4}x' d^{4}y' e^{-i[p \cdot x + q \cdot y - p' \cdot x' - q' \cdot y']}$$
  

$$\overline{u}(p')_{\alpha}(i\vec{\partial}_{x'} - m)_{\alpha\beta} \ \overline{v}_{\gamma}(q)(i\vec{\partial}_{y} - m)_{\gamma\delta}$$
  

$$\langle 0| \ T\overline{\psi}_{\delta'}(y')\psi_{\beta}(x')\psi_{\beta'}(x)\psi_{\delta}(y) | 0 \rangle$$
  

$$(-i\overline{\partial}_{x} - m)_{\beta'\alpha'}u_{\alpha'}(p)(-i\overline{\partial}_{y'} - m)_{\delta'\gamma'}v_{\gamma'}(q') \qquad (3.98)$$

Temos portanto de calcular a função de Green

$$G(y', x', x, y) \equiv \langle 0 | T\overline{\psi}_{\delta'}(y')\psi_{\beta}(x')\overline{\psi}_{\beta'}(x)\psi_{\delta}(y) | 0 \rangle$$
(3.99)

A contribuição de ordem mais baixa é de segunda ordem (há claro uma contribuição sem interacção mas isso corresponde aos termos disconexos em que não estamos interessados). Temos (para simplificar neste exemplo vamos omitir a indicação de que se trata de campos in):



Figura 3.12:

$$G(y', x', x, y) = \frac{(ie)^2}{2} (\gamma^{\mu})_{\epsilon\epsilon'} (\gamma^{\nu})_{\varphi\varphi'} \int d^4 z_1 d^4 z_2$$

$$\langle 0 | T \overline{\psi}_{\delta'}(y') \psi_{\beta}(x') \overline{\psi}_{\beta'}(x) \psi_{\delta}(y) : \overline{\psi}_{\epsilon}(z_1) \psi_{\epsilon'}(z_1) A_{\mu}(z_1) :: \overline{\psi}_{\varphi}(z_2) \psi_{\varphi'}(z_2) A_{\nu}(z_2) : | 0 \rangle$$

$$= \frac{(ie)^2}{2} (\gamma^{\mu})_{\epsilon\epsilon'} (\gamma^{\nu})_{\varphi\varphi'} \int d^4 z_1 d^4 z_2$$

$$\left[ -S_{F\beta\epsilon}(x'-z_1) S_{F\epsilon'\beta'}(z_1-x) S_{F\delta\varphi}(y-z_2) S_{F\varphi'\delta'}(z_2-y') D_{F\mu\nu}(z_1-z_2) + S_{F\delta\epsilon}(y-z_1) S_{F\epsilon'\beta'}(z_1-x) S_{F\beta\varphi}(x'-z_2) S_{F\varphi'\delta'}(z_2-y') D_{F\mu\nu}(z_1-z_2) + (z_1 \leftrightarrow z_2) \right]$$
(3.100)

Mais uma vez a troca  $(z_1 \leftrightarrow z_2)$  compensa o  $\frac{1}{2!}$  e temos dois diagramas com um sinal menos relativo conforme está representado na Fig. (3.12). Analisemos a contribuição do diagrama a)

$$S_{fi}^{(a)} = -\int d^{4}x d^{4}y d^{4}x' d^{4}y' d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} (ie)^{2} (\gamma^{\mu})_{\varepsilon\varepsilon'} (\gamma^{\nu})_{\varphi\varphi'} e^{-i[p\cdot x + q\cdot y - p'\cdot x' - q'\cdot y']}$$

$$\overline{u}(p')_{\alpha} (i\overrightarrow{\partial}'_{x} - m)_{\alpha\beta} \overline{v}_{\gamma}(q) (i\overrightarrow{\partial}_{y} - m)_{\gamma\delta}$$

$$S_{F\beta\varepsilon}(x' - z_{1}) S_{F\varepsilon'\beta'}(z_{1} - x) S_{F\delta\varphi}(y - z_{2}) S_{F\varphi'\delta'}(z_{2} - y')$$

$$(-i\overleftarrow{\partial}_{x} - m)_{\beta'\alpha'} u_{\alpha'}(p) (-i\overleftarrow{\partial}'_{y} - m)_{\delta'\gamma'} v_{\gamma'}(q') D_{F\mu\nu}(z_{1} - z_{2})$$

$$= -\int d^{4}z_{1} d^{4}z_{2} e^{-i[p\cdot z_{1} + q\cdot z_{2} - p'\cdot z_{1} - q'\cdot z_{2}]}$$

$$\overline{u}(p') (ie\gamma^{\mu}) u(p) \overline{v}(q) (ie\gamma^{\nu}) v(q') D_{F\mu\nu}(z_{1} - z_{2}) \qquad (3.101)$$

Agora usando a transformada de Fourier do propagador do fotão

$$D_{F\mu\nu}(z_1 - z_2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (z_1 - z_2)}$$


Figura 3.13:

$$\equiv \int \frac{d^4k}{(2\pi)^u} D_{F\mu\nu}(k) e^{-ik \cdot (z_1 - z_2)}$$
(3.102)

obtemos

$$S_{fi}^{(a)} = -\overline{u}(p')(ie\gamma^{\mu})u(\rho)\overline{v}(q)(ie\gamma^{\nu})v(q') \int d^{4}z_{1}d^{4}z_{2}\frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}}D_{F\mu\nu}(k)e^{-iz_{1}\cdot(p-p'+k)}e^{-iz_{2}\cdot(q-q'-k)} = -(2\pi)^{4}\delta^{4}(p+q-p'-q')\overline{u}(p')(ie\gamma^{\nu})u(p)\overline{v}(q)(ie\gamma^{\mu})v(a')D_{F\mu\nu}(p'-p) (3.103)$$

e portanto o elemento da matrizT é

\_

$$-iT_{fi}^{(a)} = -\overline{u}(p')(ie\gamma^{\mu})u(p)D_{F\mu\nu}(p'-p)\overline{v}(q)(ie\gamma^{\nu})v(q')$$
(3.104)

a que corresponde o diagrama de Feynman da Fig. (3.13).

Dum modo semelhante chegaríamos a

$$-iT_{fi}^{(b)} = \overline{v}(q)(ie\gamma^{\mu})u(p)D_{F\mu\nu}(p+q)\overline{u}(p')(ie\gamma^{\nu})v(q')$$
(3.105)

que corresponde ao diagrama da Fig. (3.14). Qual dos dois diagramas tem o sinal - é irrelevante. Depende das convenções em construir os estados *in* que levaram à Eq. (3.97). Só o sinal relativo é importante.

## 3.6.3 Loop de fermiões

Antes de enunciamos as regras de Feynman convém ver o que se passa com loops de fermiões. Um exemplo é a correcção de segunda ordem ao propagador do fotão da Fig. (3.15).



Figura 3.14:



Figura 3.15:

Primeiro é fácil de ver que a orientação do loop só é relevante se conduzir a diagramas topológicamente diferentes. Assim os diagramas da Fig. (3.16) são topológicamente iguais e só um deles deve ser considerado. Mas os diagramas seguintes da Fig. (3.17) são topológicamente diferentes e devem ambos ser incluídos.

O segundo aspecto dos loops de fermiões tem a ver com um sinal menos que deve afectar os diagramas onde eles aparecem. Para compreender esse sinal basta notar que por definição de loop ele não está ligado a linhas fermiónicas externas. Deve portanto ter origem apenas na interacção, isto é vir de termos da forma



Figura 3.16:



Figura 3.17:

$$\langle 0 | T \cdots : \overline{\psi}(z_1) \mathcal{A}(z_1) \psi(z_1) : \cdots : \overline{\psi}(z_n \mathcal{A}(z_n) \psi(z_n) : \cdots | 0 \rangle$$
(3.106)

ora para levar isto para a ordenação que conduz a um loop é necessário sempre fazer uma permutação ímpar daquela ordenação inicial pelo que obtemos um sinal (-) para esses loops.

# **3.6.4** Regras de Feynman para QED

Estamos agora em posição de enunciar as regras de Feynman para QED

- 1. Para um dado processo desenhar todos os diagramas topológicamente distintos.
- 2. Para cada electrão que entra no diagrama um factor u(p,s). Se sair do diagrama um factor  $\overline{u}(p,s)$
- 3. Para cada positrão deixando o diagrama (estado final) um factor v(p, s) e entrando o diagrama (estado inicial) um factor  $\overline{v}(p, s)$ .
- 4. Para cada fotão o vector  $\varepsilon^{\mu}(k)$  no estado inicial e  $\varepsilon^{*\mu}(k)$  no estado final
- 5. Por cada linha fermiónica interna o propagador

6. Por cada fotão virtual o propagador (gauge de Feynman)

7. Por cada vértice o factor



8. Por cada momento interno não fixado por conservação de momento (caso de loops) um factor

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tag{3.109}$$

- 9. Por cada loop de fermiões um sinal -1.
- 10. Um factor -1 entre diagramas que diferem por trocas de linhas fermiónicas. (Em caso de dúvida recorrer ao teorema de Wick)

#### Notas:

- Em QED não há factores de simetria, isto é são sempre iguais a 1.
- Em toda esta discussão não considerámos os factores Z que entram nas fórmulas de redução. Isto é verdade em ordem mais baixa. Mas os factores Z podem ser calculados em teoria de perturbação. Para isso a ser definição é (por exemplo para o electrão)

$$\lim_{p \to m} S'_F(p) = Z_2 S_F(p) \tag{3.110}$$

onde  $S'_F(p)$  é o propagador com interacções. Assim podemos obter em teoria de perturbações.

$$Z_2 = 1 + O(\alpha) + \cdots$$
 (3.111)

Em ordem superiores é necessário corrigir a linhas exteriores por estes factores  $\sqrt{Z}$ .

# 3.7 Receita Geral para as regras de Feynman

Vamos aqui apresentar, sem demonstração, um método geral de obter as regras de Feynman de qualquer teoria, mesmo que os acoplamentos tenham derivadas, o que é importante para o Modelo Sandard das intercções fundamentais.

O ponto de partida é a acção tomada como funcional dos campos

$$\Gamma_0[\varphi] \equiv \int d^4x \mathcal{L}[\varphi] \cdot \tag{3.112}$$

De facto  $\Gamma_0[\varphi]$  é o funcional gerador das funções de Green irredutíveis de uma partícula em ordem mais baixa, mas a demonstração desse facto está fora do âmbito deste curso. As regras são as seguintes:

#### **Propagadores:**

- 1. Calcular  $\Gamma_0^{(2)}(x_i, x_j) \equiv \frac{\delta^2 \Gamma_0[\varphi]}{\delta \varphi(x_i) \delta \varphi(x_j)}$
- 2. Calcular a Transformada de Fourier (TF) e obter  $\Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j)$  através de

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_i + p_j) \Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j) \equiv \int d^4 x_i d^4 x_j e^{-i(p_i \cdot x_i + p_j \cdot x_j)} \Gamma_0^{(2)}(x_i, x_j) \qquad (3.113)$$

onde todos os momentos são incoming.

3. O propagador de Feynman é

$$G_{Fij}^{(0)} = i [\Gamma_0^{(2)}(p_i, p_j)]^{-1}$$
(3.114)

#### Vértices

- 1. Calcular  $\Gamma_0^{(n)}(x_1\cdots x_4) = \frac{\delta^n \Gamma_0[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_4)}$
- 2. Calcular a TF definida por

$$(2\pi)^{4} \delta^{4}(p_{1} + p_{2} + \dots + p_{n}) \Gamma_{0}^{(n)}(p_{1} \cdots p_{n})$$
  
$$\equiv \int d^{4}x_{1} \cdots d^{4}x_{n} e^{-i(p_{1} \cdot x_{1} + \dots + p_{n} \cdot x_{n})} \Gamma_{0}^{(n)}(x_{1} \cdots x_{n}) \quad (3.115)$$

3. O vértice, no espaço dos momentos, é então dado por

$$i\Gamma_0^{(n)}(p_1, \cdots p_n)$$
 (3.116)

#### Notas:

• Para os campos fermiónicos é preciso ter cuidado com a ordem de derivação. A convenção é

$$\frac{\delta^2}{\delta\psi_{\alpha}(x)\delta\overline{\psi}_{\beta}(y)}\left(\overline{\psi}(z)\Gamma\psi(z)\right) \equiv \Gamma_{\beta\alpha}\delta^4(z-x)\delta^4(z-y)$$
(3.117)

 $\psi_{\alpha}(x) \in \psi_{\beta}(x)$  são aqui tomados como campos *clássicos* anticomutativos (variáveis de Grassmann)

• As derivadas funcionais são definidas por

$$\frac{\delta\varphi_i(x)}{\delta\varphi_k(y)} \equiv \delta_{ik}\delta^4(x-y) \tag{3.118}$$

## 3.7.1 Exemplo: Electrodinâmica escalar

O Lagrangeano é:

$$\mathcal{L} = (\partial_{\mu} - ieQA_{\mu})\varphi^*(\partial^{\mu} + ieQA^{\mu})\varphi - m\varphi^*\varphi + \mathcal{L}_{EM} - \frac{\lambda}{4}(\varphi^*\varphi)^2$$
(3.119)

Portanto

$$\mathcal{L}_{int} = -ieQ\varphi^* \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}\varphi A^{\mu} + e^2 Q^2 \varphi^* \varphi A_{\mu} A^{\mu}$$
(3.120)

os propagadores são os habituais. Vejamos somente os vértices. Há dois vértices. O cúbico é dado por



$$\Gamma^{(3)}_{\mu}(x_1, x_2, x_3) = -ieQ \int d^4 z \delta^4(z - x_1) (\vec{\partial}_{\mu} - \vec{\partial}_{\mu}) \delta^4(z - x_2) \delta^4(z - x_3)$$
(3.121)

logo

$$(2\pi)^{4}\delta^{4}(p+k+q)\Gamma_{\mu}^{(3)}(p,q,k) \equiv -ieQ\int d^{4}z d^{4}x_{1}d^{4}x_{2}d^{4}x_{3}e^{-i(x_{1}p+x_{2}q+x_{3}k)}$$

$$\delta^{4}(z-x_{1}) \ (\overrightarrow{\partial}_{\mu}-\overleftarrow{\partial}_{\mu})\delta^{4}(z-x_{2})\delta^{4}(x-x_{3})$$

$$= -ieQ\int d^{4}z d^{4}x_{2}e^{-i[(p+k)\cdot x+q\cdot x_{2}]}\partial_{\mu}\delta^{4}(z-x_{2})$$

$$+ieQ\int d^{4}z d^{4}x_{1}e^{-i[px_{1}+(q+k)z]}\partial_{\mu}\delta^{4}(z-x_{1})$$

$$= -ieQ(ip_{\mu}-iq_{\mu})(2\pi)^{4}\delta^{4}(p+q+k) \qquad (3.122)$$

Portanto este vértice é

$$i\Gamma_{\mu}(p,q,k) = ieQ \ (p_{\mu} - q_{\mu}) = -ieQ \ (q_{\mu} - p_{\mu})$$
 (3.123)

O outro vértice é



$$\Gamma^{(4)}_{\mu\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2e^2 Q^2 \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4) g_{\mu\nu}$$
(3.124)

е

$$\Gamma^{(4)}_{\mu\nu}(p,q,k_1,k_2) = 2(eQ)^2 g_{\mu\nu} \tag{3.125}$$

logo o vértice é

$$i2e^2Q^2 g_{\mu\nu}$$
 (3.126)

# Problemas Capítulo 3

**3.1** Mostre explicitamente que o teorema da Wick é válido para o caso de 4 campos, isto é

$$T(\varphi_{in}(x_1)\varphi_{in}(x_2)\varphi_{in}(x_3)\varphi_{in}(x_4)) =: \varphi_{in}(x_1)\cdots\varphi_{in}(x_4):+\cdots \qquad (3.127)$$

**3.2** Para o caso da teoria  $\lambda \varphi^4$  verifique as regras de Feynman para os diagramas



3.3 Considere uma teoria com a interacção

$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{3!} \varphi_{in}^3 \tag{3.128}$$

- a) Encontre as regras de Feynman x
- b) Calcule o factor de simetria do diagrama



3.4 Verifique para o efeito de Compton que o diagrama



dá o resultado da Eq. (3.96).

- **3.5** Verifique a equação Eq. (3.105).
- **3.6** Mostre que em *QED* os factores de simetria são sempre 1.
- **3.7** Calcule explicitamente o elemento da matriz T para o processo  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$  (aniquilação dos pares) e verifique que coincide com as regras gerais.
- **3.8** Mostre que as amplitudes para  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma \in e^-\gamma \rightarrow e^-\gamma$  estão relacionadas. Como se pode obter uma da outra?

# Capítulo 4 Correcções Radiativas

# 4.1 Renormalização a 1 loop

Vamos considerar a teoria descrita pelo Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + \overline{\psi} (i\partial \!\!\!/ + eA - m)\psi . \qquad (4.1)$$

Os propagadores livres são

$$b \longrightarrow p \quad a \quad \left(\frac{i}{\not p - m + i\varepsilon}\right)_{\beta\alpha} \equiv S^0_{F\beta\alpha}(p) \quad (4.2)$$

$$-i \left[\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} + \frac{(\xi - 1)}{1} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2 + i\varepsilon)^2}\right]$$

$$\mu \longrightarrow \nu \quad = -i \left\{\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} + \xi \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^4}\right\}$$

$$\equiv G^0_{F\mu\nu}(k) \quad (4.3)$$

O vértice é

$$\begin{array}{c}
\alpha \\
p' \\
\rho \\
\rho \\
\beta
\end{array}
\qquad \mu \qquad +ie(\gamma_{\mu})_{\beta\alpha} \qquad e = |e| > 0 \qquad (4.4)
\end{array}$$



Figura 4.1:

Vamos agora considerar as correcções radiativas em primeira ordem (isto é, 1 - loop) para os propagadores e para o vértice.

#### 4.1.1 Polarização do vácuo

Em primeira ordem a contribuição para o propagador do fotão é dada pelo diagrama da Figura 4.1 que escrevemos na forma

$$G^{(1)}_{\mu\nu}(k) \equiv G^0_{\mu\mu'} \ i \,\Pi_{\mu'\nu'}(k) G^0_{\nu'\nu}(k) \tag{4.5}$$

onde

$$i \Pi_{\mu\nu} = -(+ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \operatorname{Tr} \left( \gamma_{\mu} \frac{i}{\not p - m + i\varepsilon} \gamma_{\nu} \frac{i}{\not p + \not k - m + i\varepsilon} \right)$$
  
$$= -e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\operatorname{Tr}[\gamma_{\mu}(\not p + m)\gamma_{\nu}(\not p + \not k + m)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$
  
$$= -4e^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{[2p_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}k_{\nu} + p_{\nu}k_{\nu} - g_{\mu\nu}(p^2 + p \cdot k - m^2)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$
(4.6)

Simples contagem de potências de p mostra que este integral, é quadraticamente divergente. De facto a divergência é, como veremos, apenas logarítmica. Sendo o integral divergente temos que o regularizar primeiro para depois absorvermos essas divergências nos parâmetros da teoria. Aqui vamos usar o método de regularização dimensional. Para um valor de d suficientemente baixo o integral converge. Se definirmos  $\epsilon = 4 - d$ , no fim de termos feito o integral devemos obter um resultado divergente quando  $\epsilon \to 0$ . Obtemos portanto<sup>1</sup>

$$i \Pi_{\mu\nu}(k,\epsilon) = -4e^2 \mu^{\epsilon} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{[2p_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}k_{\nu} + p_{\nu}k_{\mu} - g_{\mu\nu}(p^2 + p \cdot k - m^2)]}{(p^2 - m^2 + i\varepsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Onde  $\mu$  é um parâmetro com as dimensões de massa introduzido para assegurar a dimensionalidade correcta da constante de acoplamento em dimensão d, isto é,  $[e] = \frac{4-d}{2} = \frac{\epsilon}{2}$ . Assim pomos  $e \to e\mu^{\frac{\epsilon}{2}}$ . Para mais detalhes ver o Apêndice.

#### 4.1. Renormalização a 1 loop

$$= -4e^{2} \mu^{\epsilon} \int \frac{d^{d}p}{(2\pi)^{d}} \frac{N_{\mu\nu}(p,k)}{(p^{2}-m^{2}+i\varepsilon)((p+k)^{2}-m^{2}+i\varepsilon)}$$
(4.7)

onde

$$N_{\mu\nu}(p,k) = 2p_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}k_{\nu} + p_{\nu}k_{\mu} - g_{\mu\nu}(p^2 + p \cdot k - m^2)$$
(4.8)

Para efectuar este integral começamos por utilizar a parametrização de Feynman para escrever o denominador sobre a forma dum único termo. Para isso usamos (ver Apêndice)

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[ax + b(1-x)\right]^2}$$
(4.9)

para obter

$$i \Pi_{\mu\nu}(k,\epsilon) = -4e^2 \mu^{\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p,k)}{[x(p+k)^2 - xm^2 + (1-x)(p^2 - m^2) + i\varepsilon]^2}$$
  
$$= -4e^2 \mu^{\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p,k)}{[p^2 + k \cdot px + xk^2 - m^2 + i\varepsilon]^2}$$
  
$$= -4e^2 \mu^{\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N_{\mu\nu}(p,k)}{[(p+kx)^2 + k^2x(1-x) - m^2 + i\varepsilon]^2}$$
(4.10)

Para dimensão d suficientemente pequena o integral é convergente e podemos efectuar a mudança de variável

$$p \to p - kx \tag{4.11}$$

Obtemos então

$$i \Pi_{\mu\nu}(k,\epsilon) = -4e^2 \,\mu^{\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \,\frac{N_{\mu\nu}(p-kx,k)}{\left[p^2 - C + i\epsilon\right]^2} \tag{4.12}$$

onde

$$C = m^2 - k^2 x (1 - x) \tag{4.13}$$

 $N_{\mu\nu}$  é um polinómio de segundo grau no momento do loop (ver Eq. (4.8)). No entanto usando o facto de que o denominador da Eq. (4.12) só depende de  $p^2$  podemos mostrar que

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^{\mu}}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} = 0$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^{\mu} p^{\nu}}{[p^2 - C + i\epsilon]^2} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{[p^2 - C + i\epsilon]^2}$$
(4.14)

Isto quer dizer que só temos que calcular integrais da forma

$$I_{r,m} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^r}{[p^2 - C + i\epsilon]^m}$$



$$= \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^d} \int dp^0 \frac{(p^2)^r}{[p^2 - C + i\epsilon]^m}$$
(4.15)

Para efectuar esta integração vamos usar a integração no plano complexo da variável  $p^0$  conforme descrito na Fig. (4.2). A deformação do contorno corresponde à chamada a rotação de Wick,

$$p^0 \to i p_E^0 \qquad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \to i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_E^0 \qquad (4.16)$$

e  $p^2 = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = -(p_E^0)^2 - |\vec{p}|^2 \equiv -p_E^2$ , onde  $p_E = (p_E^0, \vec{p})$  é um vector euclidiano, isto é, calculamos o seu produto interno usando a métrica euclidiana diag(+, +, +, +),

$$p_E^2 = (p_E^0)^2 + |\vec{p}|^2 \tag{4.17}$$

Podemos então escrever (para mais detalhes ver o Apêndice)

$$I_{r,m} = i(-1)^{r-m} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^{2^r}}{\left[p_E^2 + C\right]^m}$$
(4.18)

onde não mais precisamos do  $i\epsilon$ , pois o denominador é estritamente positivo<sup>2</sup>(C > 0). Para calcularmos  $I_{r,m}$  escrevemos

$$\int d^d p_E = \int d\overline{p} \ \overline{p}^{\ d-1} \, d\Omega_{d-1} \tag{4.19}$$

onde  $\overline{p} = \sqrt{(p_E^0)^2 + |\vec{p}|^2}$  é o comprimento do vector  $p_E$  no espaço euclidiano a d dimensões e  $d\Omega_{d-1}$  é o ângulo sólido que generaliza as coordenadas esféricas. Os ângulos são definidos por

$$p_E = \overline{p}(\cos\theta_1, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \dots, \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-1})$$
(4.20)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>O caso de C < 0 obtém-se por continuação analítica da fórmula final.

#### 4.1. Renormalização a 1 loop

Então podemos escrever

$$\int d\Omega_{d-1} = \int_0^\pi \sin \theta_1^{d-2} \, d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_{d-1} \tag{4.21}$$

Usando agora

$$\int_0^\pi \sin \theta^m \, d\theta = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \tag{4.22}$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função Gama, obtemos

$$\int d\Omega_{d-1} = 2 \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \tag{4.23}$$

A integração em  $\overline{p}$  faz-se usando o resultado

$$\int_0^\infty dx \ \frac{x^p}{(x^n + a^n)^q} = \pi (-1)^{q-1} a^{p+1-nq} \ \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n})}{n \sin(\pi \frac{p+1}{n}) \Gamma(\frac{p+1}{2} - q + 1)}$$
(4.24)

para finalmente se obter

$$I_{r,m} = iC^{r-m+\frac{d}{2}} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(r+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(m-r-\frac{d}{2})}{\Gamma(m)}$$
(4.25)

Notemos, para finalizar, que a representação integral de  $I_{r,m}$ , Eq. (4.15) é válida somente para d < 2(m-r) para assegurar a convergência quando  $\overline{p} \to \infty$ . Contudo a forma já integrada da Eq. (4.25) pode ser continuada analiticamente para todos os valores de d excepto para aqueles em que a função  $\Gamma(m-r-d/2)$  tem pólos, isto é (ver secção A.6), para

$$m - r - \frac{d}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$
 (4.26)

Para a aplicação aos integrais que aparecem em regularização dimensional é conveniente escrever Eq. (4.25) usando a relação  $d = 4 - \epsilon$ . Obtemos

$$I_{r,m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} \frac{\Gamma(m-r-2+\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(m)}$$
(4.27)

que tem pólos para  $m - r - 2 \leq 0$  (ver secção A.6).

Voltemos agora ao cálculo de  $\Pi_{\mu\nu}$ . Primeiro notemos que após a mudança de variável da Eq. (4.11) obtemos

$$N_{\mu\nu}(p - kx, k) = 2p_{\mu}p_{\nu} + 2x^{2}k_{\mu}k_{\nu} - 2xk_{\mu}k_{\nu} - g_{\mu\nu}\left(p^{2} + x^{2}k^{2} - xk^{2} - m^{2}\right)$$
(4.28)

e portanto

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} \equiv \mu^{\epsilon} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \, \frac{N_{\mu\nu}(p-kx,k)}{\left[p^2 - C + i\epsilon\right]^2}$$

Capítulo 4. Correcções Radiativas

$$= \left(\frac{2}{d}-1\right)g_{\mu\nu}\mu^{\epsilon}I_{1,2} + \left[-2x(1-x)k_{\mu}k_{\nu} + x(1-x)k^{2}g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}m^{2}\right]\mu^{\epsilon}I_{0,2}(4.29)$$

Usando agora a Eq.  $\left(4.27\right)$  podemos escrever

$$\mu^{\epsilon} I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2} \left( \Delta_{\epsilon} - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$
(4.30)

onde se usou a expansão da função  $\Gamma$ , Eq. (A.47),

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{4.31}$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler e se definiu, Eq. (A.50),

$$\Delta_{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \tag{4.32}$$

De modo semelhante

$$\mu^{\epsilon} I_{1,2} = -\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} C \frac{\Gamma(3-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} \frac{\Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2)}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2} C \left(1+2\Delta_{\epsilon}-2\ln\frac{C}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$
(4.33)

Devido à presença dum pólo em  $1/\epsilon$  nas expressões anteriores temos que expandir todas as quantidades até  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Assim temos também

$$\frac{2}{d} - 1 = \frac{2}{4 - \epsilon} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$
(4.34)

Substituindo agora as equações anteriores na Eq. (4.29), e usando a Eq. (4.13), obtemos

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \left[ \frac{i}{16\pi^2} C \left( 1 + 2\Delta_{\epsilon} - 2\ln\frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ + \left[ -2x(1-x)k_{\mu}k_{\nu} + x(1-x)k^2g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}m^2 \right] \left[ \frac{i}{16\pi^2} \left( \Delta_{\epsilon} - \ln\frac{C}{\mu^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ = -\frac{i}{16\pi^2} k_{\mu}k_{\nu} \left[ \left( \Delta_{\epsilon} - \ln\frac{C}{\mu^2} \right) 2x(1-x) \right] \\ + \frac{i}{16\pi^2} g_{\mu\nu}k^2 \left[ \Delta_{\epsilon} \left( x(1-x) + x(1-x) \right) + \ln\frac{C}{\mu^2} \left( -x(1-x) - x(1-x) \right) \right]$$

122



Figura 4.3:

$$+ x(1-x)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \right]$$
  
+  $\frac{i}{16\pi^2}g_{\mu\nu}m^2 \left[\Delta_{\epsilon}(-1+1) + \ln\frac{C}{\mu^2}(1-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]$ (4.35)

e finalmente

$$\mathcal{N}_{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \left( \Delta_{\epsilon} - \ln \frac{C}{\mu^2} \right) \left( g_{\mu\nu} k^2 - k_{\mu} k_{\nu} \right) 2x(1-x) \tag{4.36}$$

e usando Eq. (4.7) obtemos

$$\Pi_{\mu\nu} = -4e^{2} \frac{1}{16\pi^{2}} \left( g_{\mu\nu}k^{2} - k_{\mu}k_{\nu} \right) \int_{0}^{1} dx \ 2x(1-x) \left( \Delta_{\epsilon} - \ln\frac{C}{\mu^{2}} \right)$$
$$= - \left( g_{\mu\nu}k^{2} - k_{\mu}k_{\nu} \right) \Pi(k^{2}, \epsilon)$$
(4.37)

onde

$$\Pi(k^2,\epsilon) \equiv \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \ x(1-x) \left[ \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu^2} \right]$$
(4.38)

Esta expressão é claramente divergente quando  $\epsilon \to 0$ . Antes de falarmos propriamente de renormalização analisemos melhor o significado de  $\Pi_{\mu\nu}(k)$ . O propagador do fotão é dado pela série representada na Figura 4.3, onde

$$\equiv i \Pi_{\mu\nu}(k) = \text{ soma de todos os diagramas}$$

$$próprios \text{ em todas as ordens}$$

$$(4.39)$$

Em ordem mais baixa temos a contribuição representada na Figura 4.4 que é o que



Figura 4.4:

nós calculámos. Para prosseguir é conveniente reescrever o propagador livre do fotão

$$iG^{0}_{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right)\frac{1}{k^{2}} + \xi\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{4}} = P^{T}_{\mu\nu}\frac{1}{k^{2}} + \xi\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{4}}$$
$$\equiv iG^{0T}_{\mu\nu} + iG^{0L}_{\mu\nu}$$
(4.40)

onde se introduziu o projector transversal $P^T_{\mu\nu}$  definido por

$$P_{\mu\nu}^{T} = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right) \tag{4.41}$$

que obviamente satisfaz as relações

$$\begin{cases} k^{\mu} P_{\mu\nu}^{T} = 0 \\ P_{\mu}^{T\nu} P_{\nu\rho}^{T} = P_{\mu\rho}^{T} \end{cases}$$
(4.42)

O propagador completo também poderá ser escrito em geral,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^T + G_{\mu\nu}^L$$
 (4.43)

onde  $G_{\mu\nu}^T$  satisfaz

$$G^T_{\mu\nu} = P^T_{\mu\nu} G_{\mu\nu} \tag{4.44}$$

Nós obtivemos, em primeira ordem, que o tensor de polarização do vácu<br/>o é transversal, isto é

$$i \Pi_{\mu\nu}(k) = -ik^2 P_{\mu\nu}^T \Pi(k)$$
 (4.45)

Este resultado é de facto válido para todas as ordens e pode ser mostrado utilizando as identidades de Ward-Takahashi, como veremos na secção 4.2. Isto quer dizer que a parte longitudinal do propagador não é renormalizada

$$G^{L}_{\mu\nu} = G^{0L}_{\mu\nu} \tag{4.46}$$

Para a parte transversal obtemos

$$iG_{\mu\nu}^{T} = P_{\mu\nu}^{T}\frac{1}{k^{2}} + P_{\mu\mu'}^{T}\frac{1}{k^{2}}(-i)k^{2}P^{T\mu'\nu'}\Pi(k)(-i)P_{\nu'\nu}^{T}\frac{1}{k^{2}}$$

#### 4.1. Renormalização a 1 loop

$$+P_{\mu\rho}^{T}\frac{1}{k^{2}}(-i)k^{2}P^{T\rho\lambda}\Pi(k)(-i)P_{\lambda\tau}^{T}\frac{1}{k^{2}}(-i)k^{2}P^{T\tau\sigma}\Pi(k)(-i)P_{\sigma\nu}^{T}\frac{1}{k^{2}}+\cdots$$

$$=P_{\mu\nu}^{T}\frac{1}{k^{2}}\left[1-\Pi(k)+\Pi^{2}(k^{2})+\cdots\right]$$
(4.47)

ou seja, somando a série geométrica,

$$iG_{\mu\nu}^{T} = P_{\mu\nu}^{T} \frac{1}{k^{2}[1 + \Pi(k)]}$$
(4.48)

Tudo o que fizemos até aqui é formal porque a função  $\Pi(k)$  é divergente. A maneira mais satisfatória de resolver esta dificuldade é a seguinte: O Lagrangeano inicial donde partimos tinha sido obtido a partir da teoria clássica e nada nos diz que seja válido em geral. De facto, como acabámos de ver, a normalização das funções de onda vem alterada quando calculamos correcções de 1 - loop e o mesmo se passa com os parâmetros físicos da teoria, a carga e a massa. Assim podemos pensar que o Lagrangeano correcto se obtém adicionando ao Lagrangeano clássico correcções para manter as definições da carga e massa e a renormalização das funções de onda. Aos termos que se adicionam ao Lagrangeano dá-se o nome de contratermos<sup>3</sup>

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}(e, m, ...) + \Delta \mathcal{L}$$
(4.49)

Os contratermos são definidos a partir das *condições de normalização* que impusermos sobre os campos e outros parâmetros da teoria. Em QED temos ao nosso dispor a normalização dos campos do fotão e do electrão e os dois parâmetros físicos a carga e a massa. As condições de normalização são em larga medida arbitrárias. Há no entanto conveniência em manter as expressões tanto quanto possível perto das encontradas na teoria livre (sem correcções) pelo que definimos para a normalização do campo do fotão

$$\lim_{k \to 0} k^2 i G_{\mu\nu}^{RT} = 1 \cdot P_{\mu\nu}^T \tag{4.50}$$

em que  $G_{\mu\nu}^{RT}$  é o propagador renormalizado calculado a partir do Lagrangeano  $\mathcal{L}_{\text{total}}$ . A justificação para esta expressão vem do argumento seguinte. Consideremos a difusão de Coulomb em todas as ordens de teoria de perturbações. Devemos ter então a situação ilustrada na Figura 4.5, Pode-se mostrar, usando as identidades de Ward-Takahashi, que os últimos 3 diagramas cancelam no limite  $q = p' - p \rightarrow 0$ . Então a condição de normalização Eq. (4.50) significa que devemos ter a situação descrita na Figura 4.6, que quer dizer que o valor da carga eléctrica é determinado no limite  $q \rightarrow 0$  da difusão de Coulomb.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Esta interpretação em termos de correcções quânticas faz sentido porque um desenvolvimento em série na constante de acoplamento é em QED um desenvolvimento em  $\hbar^L$ . Ver adiante mais sobre este ponto.



Figura 4.5:



Figura 4.6:

#### 4.1. Renormalização a 1 loop

O Lagrangeano de contratermos deve ter a mesma forma que o Lagrangeano clássico. Tradicionalmente escreve-se na forma

$$\Delta \mathcal{L} = -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \delta Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$
(4.51)

que corresponde à seguinte regra de Feynman

$$\mu \overset{k}{\longrightarrow} \overset{k}{\smile} \upsilon \quad -i \,\delta Z_3 k^2 \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \tag{4.52}$$

Então devemos ter

$$i\Pi_{\mu\nu} = i\Pi_{\mu\nu}^{loop} - ik^2 \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2}\right) = -i \left(\Pi(k,\epsilon) + \delta Z_3\right) P_{\mu\nu}^T$$
(4.53)

Devemos portanto fazer a substituição

$$\Pi(k,\epsilon) \to \Pi(k,\epsilon) + \delta Z_3 \tag{4.54}$$

no propagador do fotão. Obtemos então

$$iG_{\mu\nu}^{T} = P_{\mu\nu}^{T} \frac{1}{k^{2}} \frac{1}{1 + \Pi(k,\epsilon) + \delta Z_{3}}$$
(4.55)

A condição de normalização, Eq. (4.50), implica

$$\Pi(k,\epsilon) + \delta Z_3 = 0 \tag{4.56}$$

o que permite determinar a constante  $\delta Z_3$ . Obtemos

$$\delta Z_3 = -\Pi(0,\epsilon) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \left[ \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]$$
$$= -\frac{\alpha}{3\pi} \left[ \Delta_\epsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]$$
(4.57)

O propagador renormalizado do fotão pode então ser escrito<sup>4</sup>

$$iG_{\mu\nu}(k) = \frac{P^T_{\mu\nu}}{k^2 [1 + \Pi(k,\epsilon) - \Pi(0,\epsilon)]} + i G^L_{\mu\nu}$$
(4.58)

As correcções radiativas finitas são dadas através da função

 $\Pi^R(k^2)\!\equiv\!\Pi(k^2,\epsilon)-\Pi(0,\epsilon)$ 

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Notar que a massa do fotão não é renormalizada, isto é o pólo em  $k^2 = 0$  mantém-se .

Capítulo 4. Correcções Radiativas

$$= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln\left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2}\right]$$
$$= -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m^2}{k^2}\right) \left[ \left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} \cot^{-1}\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} - 1 \right] \right\} (4.59)$$

expressão válida para  $k^2<4m^2$ . Para valores  $k^2>4m^2$ a expressão para  $\Pi^R(k^2)$ obtém-se por continuação analítica. Usando  $(k^2>4m^2)$ 

$$\cot^{-1} iz = i \left( -\tanh^{-1} z + \frac{i\pi}{2} \right)$$
 (4.60)

е

$$\left(\frac{4m^2}{k^2} - 1\right)^{1/2} \to i\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \tag{4.61}$$

obtemos

$$\Pi^{R}(k^{2}) = -\frac{\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{1}{3} + 2\left(1 + \frac{2m^{2}}{k^{2}}\right) \left[ -1 + \sqrt{1 - \frac{4m^{2}}{k^{2}}} \tanh^{-1}\left(1 - \frac{4m^{2}}{k^{2}}\right)^{1/2} -i\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - \frac{4m^{2}}{k^{2}}} \right] \right\}$$

$$(4.62)$$

A parte imaginária de  $\Pi^R$  é portanto dada por

$$Im \ \Pi^R(k^2) = \frac{\alpha}{3} \left( 1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \theta \left( 1 - \frac{4m^2}{k^2} \right)$$
(4.63)

e está relacionada com a produção de pares  $^5 e^+ e^-.$ 

## 4.1.2 Self-energy do electrão

O propagador completo do electrão será dado pela série diagramática da Figura 4.7, ou seja

$$S(p) = S^{0}(p) + S^{0}(p) \left(-i\Sigma(p)\right) S^{0}(p) + \cdots$$
  
=  $S^{0}(p) \left[1 - i\Sigma(p)S(p)\right]$  (4.64)

Multiplicando à esquerda por  $S_0^{-1}(p)$ e à direita por  $S^{-1}(p)$  obtemos

<sup>5</sup>Para  $k^2 > 4m^2$  há a possibilidade de produzir um par  $e^+e^-$ . Assim ao processo virtual sobrepõe -se um processo real.



Figura 4.7:

$$S_0^{-1}(p) = S^{-1}(p) - i\Sigma(p)$$
(4.65)

ou ainda

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + i\Sigma(p)$$
(4.66)

onde se identificou

$$= -i\Sigma(p)$$
 (4.67)

 $\operatorname{Como}$ 

$$S_0(p) = \frac{i}{\not p - m} \Longrightarrow S_0^{-1}(p) = -i(\not p - m)$$
(4.68)

então vem

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + i\Sigma(p) = -i \left[ \not p - (m + \Sigma(p)) \right]$$
(4.69)

Vemos assim que basta calcular  $\Sigma(p)$  em todas as ordens para se obter o propagador completo do electrão. O nome de *self-energy* dado a  $\Sigma(p)$  provém obviamente de se vir somar a m. De facto, como veremos, também vai alterar o coeficiente de  $\not p$  e portanto alterar a normalização dos campos além de renormalizar a massa m. Em ordem mais baixa, o único diagrama que contribui para  $\Sigma(p)$  é o representado na Figura 4.8 e portanto

$$-i\Sigma(p) = (+ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 - \hat{\mu}^2 + i\varepsilon} \gamma^{\mu} \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \gamma^{\nu}$$
(4.70)

onde se escolheu o gauge de Feynman ( $\xi = 1$ ) para o propagador do fotão bem como se introduziu uma pequena massa  $\hat{\mu}$  por causa de divergências no infravermelho  $(k^2 \rightarrow 0)$ . Usando regularização dimensional e o facto de que em dimensão d se tem

$$\gamma_{\mu}(\not\!p + \not\!k)\gamma^{\mu} = -(\not\!p + \not\!k)\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} + 2(\not\!p + \not\!k) = -(d-2)(\not\!p + \not\!k)$$



$$m\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = m d \tag{4.71}$$

obtemos

$$-i\Sigma(p) = -\mu^{\epsilon}e^{2}\int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{1}{k^{2} - \hat{\mu}^{2} + \varepsilon} \gamma_{\mu} \frac{\not{p} + \not{k} + m}{(p+k)^{2} - m^{2} + i\varepsilon} \gamma^{\mu}$$

$$= -\mu^{\epsilon}e^{2}\int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + m d}{[k^{2} - \hat{\mu}^{2} + i\varepsilon][(p+k)^{2} - m^{2} + i\varepsilon]}$$

$$= -\mu^{\epsilon}e^{2}\int_{0}^{1}dx \int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + m d}{[(k^{2} - \hat{\mu}^{2})(1 - x) + x(p+k)^{2} - xm^{2} + i\varepsilon]^{2}}$$

$$= -\mu^{\epsilon}e^{2}\int_{0}^{1}dx \int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{-(d-2)(\not{p} + \not{k}) + m d}{[(k+px)^{2} + p^{2}x(1 - x) - \hat{\mu}^{2}(1 - x) - xm^{2} + i\varepsilon]^{2}}$$

$$= -\mu^{\epsilon}e^{2}\int_{0}^{1}dx \int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{-(d-2)[\not{p}(1 - x) + \not{k}] + m d}{[k^{2} + p^{2}x(1 - x) - \hat{\mu}^{2}(1 - x) - xm^{2} + i\varepsilon]^{2}}$$

$$= -\mu^{\epsilon}e^{2}\int_{0}^{1}dx \left[ -(d-2)\not{p}(1 - x) + m d \right] I_{0,2}$$

$$(4.72)$$

onde

$$I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} \left[ \Delta_{\epsilon} - \ln \left[ -p^2 x (1-x) + m^2 x + \hat{\mu}^2 (1-x) \right] \right]$$
(4.73)

A contribuição do loop para  $self\text{-}energy\,\Sigma(p)$  pode-se então escrever na forma

$$\Sigma(p)^{loop} = A(p^2) + B(p^2) \not p$$
(4.74)

 $\operatorname{com}$ 

$$A = e^{2}\mu^{\epsilon}(4-\epsilon)m\frac{1}{16\pi^{2}}\int_{0}^{1}dx \left[\Delta_{\epsilon} -\ln\left[-p^{2}x(1-x) + m^{2}x + \hat{\mu}^{2}(1-x)\right]\right]$$
$$B = -e^{2}\mu^{\epsilon}(2-\epsilon)\frac{1}{16\pi^{2}}\int_{0}^{1}dx \left(1-x\right)\left[\Delta_{\epsilon} -\ln\left[-p^{2}x(1-x) + m^{2}x + \hat{\mu}^{2}(1-x)\right]\right]$$
(4.75)

Usando agora as expansões

$$\mu^{\epsilon}(4-\epsilon) = 4\left[1+\epsilon\left(\ln\mu-\frac{1}{4}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right]$$

#### 4.1. Renormalização a 1 loop

$$\mu^{\epsilon}(4-\epsilon)\Delta_{\epsilon} = 4\left[\Delta_{\epsilon} + 2\left(\ln\mu - \frac{1}{4}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right]$$
  

$$\mu^{\epsilon}(2-\epsilon) = 2\left[1 + \epsilon\left(\ln\mu - \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{2})\right]$$
  

$$\mu^{\epsilon}(2-\epsilon)\Delta_{\epsilon} = 2\left[\Delta_{\epsilon} + 2\left(\ln\mu - \frac{1}{2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon)\right]$$
(4.76)

podemos escrever

$$A(p^2) = \frac{4e^2m}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[ \Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \ln\left[\frac{-p^2x(1-x) + m^2x + \hat{\mu}^2(1-x)}{\mu^2}\right] \right]$$
(4.77)

е

$$B(p^2) = -\frac{2e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \,(1-x) \left[ \Delta_\epsilon - 1 - \ln\left[\frac{-p^2 x (1-x) + m^2 x + \hat{\mu}^2 (1-x)}{\mu^2}\right] \right]$$
(4.78)

Para prosseguir com o programa de renormalização temos que introduzir agora o Lagrangeano dos contratermos. É dado por

$$\Delta \mathcal{L} = i \left( Z_2 - 1 \right) \overline{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi - \left( Z_2 - 1 \right) m \overline{\psi} \psi + Z_2 \delta m \overline{\psi} \psi + \delta Z_1 e \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi A_{\mu} \tag{4.79}$$

e portanto a *self-energy* vem

$$-i\Sigma(p) = -i\Sigma^{loop}(p) + i\not p\,\delta Z_2 - i\,m\,\delta Z_2 + i\,\delta m \tag{4.80}$$

Ao contrário do caso do propagador do fotão vemos que temos duas constantes a determinar. No esquema de renormalização *on-shell* que se usa normalamente em QED as duas constantes de renormalização são obtidas requerendo que o pólo do propagador seja na massa física do electrão e que o resíduo do pólo tenha o mesmo valor que para o propagador livre. Isto quer dizer que devemos ter

$$\Sigma(\not p = m) = 0 \quad \to \quad \delta m = \Sigma^{loop}(\not p = m)$$
$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \not p}\Big|_{\not p = m} = 0 \quad \to \quad \delta Z_2 = \frac{\partial \Sigma^{loop}}{\partial \not p}\Big|_{\not p = m}$$
(4.81)

Obtemos então para  $\delta m$ ,

$$\delta m = A(m^2) + m B(m^2)$$

$$= \frac{2 m e^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \left[ 2\Delta_\epsilon - 1 - 2 \ln \left( \frac{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2 (1 - x)}{\mu^2} \right) \right] - (1 - x) \left[ \Delta_\epsilon - 1 - \ln \left( \frac{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2 (1 - x)}{\mu^2} \right) \right] \right\}$$

Capítulo 4. Correcções Radiativas

$$= \frac{2me^2}{16\pi^2} \left[ \frac{3}{2} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \, (1+x) \ln\left(\frac{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2 (1-x)}{\mu^2}\right) \right]$$
  
$$= \frac{3\alpha m}{4\pi} \left[ \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 dx \, (1+x) \ln\left(\frac{m^2 x^2}{\mu^2}\right) \right]$$
(4.82)

onde no último passo na Eq. (4.82) se tomou o limite  $\hat{\mu} \to 0$  pois o integral não diverge nesse limite<sup>6</sup>.

De modo semelhante obtemos para  $\delta Z_2$ ,

$$\delta Z_2 = \left. \frac{\partial \Sigma^{loop}}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} = \left. \frac{\partial A}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} + B + m \left. \frac{\partial B}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m}$$
(4.83)

onde

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial A}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} &= \left. \frac{4 \, e^2 \, m^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \, \frac{2(1-1)x}{-m^2 x(1-x) + m^2 x + \hat{\mu}^2(1-x)} \right. \\ &= \left. \frac{2 \, \alpha \, m^2}{\pi} \int_0^1 dx \, \frac{(1-x)x}{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2(1-x)} \right. \\ B &= \left. -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \, (1-x) \left[ \Delta_\epsilon - 1 - \ln\left(\frac{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2(1-x)}{\mu^2}\right) \right] \right] \\ m \left. \frac{\partial B}{\partial \not{p}} \right|_{\not{p}=m} &= \left. -\frac{\alpha}{2\pi} \, m^2 \int_0^1 dx \, \frac{2x(1-x)^2}{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2(1-x)} \right. \end{aligned}$$
(4.84)

Substituindo Eq. (4.84) em Eq. (4.83) obtemos

$$\delta Z_2 = -\frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \Delta_\epsilon - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \, (1-x) \ln\left(\frac{m^2 x^2}{\mu^2}\right) - 2 \int_0^1 dx \, \frac{(1+x)(1-x)xm^2}{m^2 x^2 + \hat{\mu}^2 (1-x)} \right] \tag{4.85}$$

onde se tomou o limite  $\hat{\mu} \to 0$  onde possível e tal não é possível no último termo. Vemos assim que  $Z_2$  é divergente infravermelho. Se tivéssemos usado outras gauges  $(\xi \neq 1)$  veríamos que  $\delta m$  não era alterado enquanto que  $Z_2$  já o era mostrando assim também a sua dependência da gauge.

### 4.1.3 O vértice

O único diagrama é o indicado na Figura 4.9 que dá a contribuição (na gauge de Feynman,  $\xi=1)$ 

$$-ie\Lambda^{(1)}_{\mu}(p',p) = (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \frac{g_{\rho\sigma}}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}$$

 $<sup>^{6}\</sup>delta m$  não é divergente infra-vermelho (IR).



Figura 4.9:

$$\gamma^{\sigma} \frac{i[(\not p' - \not k) + m]}{(p' - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma_{\mu} \frac{i[(\not p - \not k) + m]}{(p - k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^{\rho} \quad (4.86)$$

onde  $\Lambda_{\mu}$  é definido a partir do vértice completo  $\Gamma_{\mu}$  através da relação

$$i\Gamma_{\mu} \equiv -ie(\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu}) \tag{4.87}$$

O integral que define  $\Lambda_{\mu}(p', p)$  é divergente. Tal como anteriormente esperamos resolver este problema introduzindo funções renormalizadas e constantes de renormalização (infinitas). Assim definimos

$$\Gamma^R_\mu \equiv Z_1 \Gamma_\mu \tag{4.88}$$

ou seja

$$\Lambda_{\mu}^{R} = Z_{1}\Lambda_{\mu} + \gamma_{\mu}(Z_{1} - 1) \tag{4.89}$$

A constante de renormalização será determinada a partir duma escolha de renormalização conveniente. A mais conveniente é  $(p^2 = p'^2 = m^2)$ 

$$\overline{u}(p')\Lambda^R_{\mu}(p',p)u(p)|_{p=p'} = 0$$
(4.90)

o que permite calcular  ${\cal Z}_1^{(1)}$  através da igualdade

$$(Z_1^{(1)} - 1)\overline{u}(p)\gamma_\mu u(p) = -\overline{u}(p)\Lambda_\mu^{(1)}u(p)$$

$$(4.91)$$

Contudo em vez de fazer este cálculo, podemos utilizar a identidade de Ward (que provaremos mais à frente) e que na forma que aqui nos interessa relaciona o vértice com a self-energy do electrão na forma seguinte

$$\Lambda_{\mu}(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \Sigma(p) \tag{4.92}$$

Então

$$\Lambda_{\mu}(p',p) = -\frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \Sigma(p) + \Lambda_{\mu}(p',p) - \Lambda_{\mu}(p,p)$$
$$= (Z_2^{-1} - 1)\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu}(p',p) - \Lambda_{\mu}(p,p) - Z_2^{-1} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \Sigma^R(p) \quad (4.93)$$

Se recordarmos a definição de  $Z_1$ 

$$\Lambda_{\mu}(p',p) = (Z_1^{-1} - 1)\gamma_{\mu} + Z_1^{-1}\Lambda_{\mu}^R(p',p)$$
(4.94)

e calcularmos  $\overline{u}(p)\Lambda_{\mu}(p,p)u(p)$  nas duas expressões concluímos que

$$Z_1 = Z_2 \tag{4.95}$$

e portanto

$$Z_1^{-1}\Lambda^R_\mu(p',p) = \Lambda_\mu(p',p) - \Lambda_\mu(p,p) - Z_2^{-1}\frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma^R(p)$$
(4.96)

ou seja

$$\Lambda^R_\mu(p',p) = Z_1[\Lambda_\mu(p',p) - \Lambda_\mu(p,p)] - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma^R(p)$$
(4.97)

Normalmente só interessa conhecer  $\Lambda^R_{\mu}$  calculado entre dois spinores de Dirac, isto é  $\overline{u}(p')\Lambda^R_{\mu}(p',p)u(p)$ . Isto simplifica bastante os cálculos e permite escrever

$$\Lambda^{R}_{\mu}(p',p) = \gamma_{\mu}F_{1}(q^{2}) + \frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}F_{2}(q^{2})$$
(4.98)

onde se usou a identidade de Gordon e o facto de que  $\Lambda_{\mu}^{R}(p', p)$  é para ser calculado entre spinores na camada de massa. As funções  $F_1(q^2)$  e  $F_2(q^2)$ , designadas por factores de forma, são dados por integrais complicados. Damos aqui somente o resultado para  $q^2 < 0$ 

$$F_1(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \left( \ln \frac{\hat{\mu}}{m} + 1 \right) \left( \theta \coth \theta - 1 \right) - \frac{\theta}{4} \tanh \frac{\theta}{2} - 2 \coth \theta \int_0^{\theta/2} \beta \tanh \beta d\beta \right\}$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\theta}{\sinh \theta}$$
(4.99)

onde

$$\sinh^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{q^2}{4m}.$$
(4.100)

No limite de zero momento transferido (q = p' - p = 0) obtemos

$$\begin{cases} F_1(0) = 0 \\ F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases}$$
(4.101)

resultado que usaremos mais adiante.

# 4.2 As identidades de Ward-Takahashi

No estudo do vértice utilizámos a identidade de Ward

$$\Lambda_{\mu}(p,p) = -\frac{\partial}{\partial p^{\mu}} \Sigma(p) \tag{4.102}$$

Vamos aqui deduzir a expressão mais geral dessas identidades. A discussão que se segue é formal no sentido que as diversas funções de Green que intervém nas identidades são infinitas. É preciso mostrar que é possível encontrar um esquema de regularização que preserve as identidades. Isto acontece quando se usa um esquema de regularização que preserve a invariância de gauge, por exemplo a regularização dimensional ou a de Pauli-Villars. As identidades de Ward são uma consequência da invariância de gauge da teoria. Quando estudarmos os métodos funcionais isso será mais claro. Aqui vamos somente usar o facto que a teoria possui uma corrente conservada

$$j_{\mu} = e\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi$$

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0$$
(4.103)

Estamos interessados em calcular a seguinte quantidade

$$\partial_x^{\mu} \langle 0 | T j_{\mu}(x) \psi(x_1) \overline{\psi}(y_1) \cdots \psi(x_n) \overline{\psi}(y_n) A_{\nu_1}(z_1) \cdots A_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle$$
(4.104)

Esta quantidade não é zero apesar de  $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$  porque no produto ordenado no tempo intervém funções  $\theta$  que envolvem a coordenada  $x^0$ . Por exemplo, para o campo  $\psi(x_i)$  devemos ter uma contribuição da forma

$$\partial_x^0 [\theta(x^0 - x_i^0) j_0(x) \psi(x_i) + \theta(x_i^0 - x^0) \psi(x_i) j_0(x)] = \delta(x^0 - x_i^0) j_0(x) \psi(x_i) - \delta(x^0 - x_i^0) \psi(x_i) j_0(x) = [j_0(x), \psi(x_i)] \delta(x^0 - x_i^0)$$
(4.105)

Obtemos assim ( $\land$  significa que o termo é omitido)

 $\partial_x^{\mu} \langle 0 | T j_{\mu}(x) \psi(x_1) \cdots \overline{\psi}(y_n) A_{\nu_1}(z_1) \cdots A_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle$ 



Figura 4.10:

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle 0 | T \left\{ [j_{0}(x), \psi(x_{i})] \,\delta(x^{0} - x_{i}^{0}) \overline{\psi}(y_{i}) + \psi(x_{i}) \left[ j_{0}(x), \overline{\psi}(y_{i}) \right] \,\delta(x^{0} - y_{i}^{0}) \right\} \psi(x_{1}) \psi(y_{1}) \cdots \psi(\widehat{x_{i}) \overline{\psi}}(y_{i}) \cdots A_{\nu_{p}}(z_{p}) | 0 \rangle \\ + \sum_{j=1}^{p} \langle 0 | T \psi(x_{1}) \cdot \overline{\psi}(y_{n}) A_{\nu_{p}}(z_{1}) \cdots [j_{0}(x), A_{\nu_{j}}(z_{j})] \delta(x^{0} - z_{j}^{0}) \cdots A_{\nu_{p}}(z_{p}) | 0 \rangle$$

$$(4.106)$$

Usando agora as relações de comutação canónicas (tempos iguais)

$$[j_{0}(x), \psi(x')]\delta(x^{0} - x'^{0}) = -e\psi(x)\delta^{4}(x - x')$$
  

$$[j_{0}(x), \overline{\psi}(x')]\delta(x^{0} - x'^{0}) = e\overline{\psi}(x)\delta^{4}(x - x')$$
  

$$[j_{0}(x), A_{\mu}(x')]\delta(x^{0} - x'^{0}) = 0$$
  
(4.107)

que expressam que  $\psi, \overline{\psi} \in A_{\mu}$  criam quantas de carga  $Q = \int d^3x j^0(x)$  igual a -e, +e e zero, respectivamente, obtemos

$$\partial_x^{\mu} \langle 0 | T j_{\mu}(x) \psi(x_1) \cdots \overline{\psi}(y_n) A_{\nu_1}(z_1) \cdots A_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle$$
  
=  $e \langle 0 | T \psi(y_1) \cdots A_{\nu_p}(z_p) | 0 \rangle \sum_{i=1}^n \left[ \delta^4(x - y_i) - \delta^4(x - x_i) \right]$  (4.108)

Tomando diversos valores de  $n \in p$  obtemos diferentes relações entre funções de Green. Vamos no seguimento consideramos dois casos importantes.

# 4.2.1 Transversalidade do propagador do fotão n = 0, p = 1

A função de Green  $\langle 0|Tj_{\mu}(x)A_{\nu}(y)|0\rangle$  corresponde ao diagrama da Figura 4.10 e está relacionada com o propagador completo do fotão representado na Figura 4.11 pela seguinte equação diagramática (equação de Dyson-Schwinger)



Figura 4.11:



que se escreve

$$G_{\mu\nu}(x-y) = G^0_{\mu\nu}(x-y) - i \int d^4x' G^0_{\mu\rho}(x-x') \left\langle 0 \right| T j^{\rho}(x') A_{\nu}(y) \left| 0 \right\rangle$$
(4.110)

Apliquemos agora a derivada $\partial_x^\mu.$  Obtemos

$$\partial_x^{\mu} G_{\mu\nu}(x-y) = \partial_x^{\mu} G_{\mu\nu}^0(x-y) - i \int d^4 x' \partial_x^{\mu} G_{\mu\rho}^0(x-x') \left\langle 0 \right| T j^{\rho}(x') A_{\mu}(y) \left| 0 \right\rangle$$
(4.111)

Mas

$$G^{0}_{\mu\rho}(x-x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-i(x-x')\cdot p} G^{0}_{\mu\rho}(p)$$
(4.112)

onde

$$G^{0}_{\mu\nu}(p) = -i\left[\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^{2}}\right)\frac{1}{p^{2}} + \xi\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^{4}}\right]$$
(4.113)

Então

$$\partial_x^{\mu} G_{\mu\rho}^0(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(x - x') \cdot p} (-ip^{\mu}) G_{\mu\rho}^0(p)$$
  
= 
$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(x - x') \cdot p} (-ip_{\rho}) F(p^2)$$
  
= 
$$-\partial_{\rho}^{x'} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i(x - x') \cdot p} F(p^2)$$

Capítulo 4. Correcções Radiativas

$$= -\partial_{\rho}^{x'} \tilde{F}(x - x') \tag{4.114}$$

Portanto

$$\partial_{x}^{\mu}G_{\mu\nu}(x-y) = \partial_{x}^{\mu}G_{\mu\nu}^{0}(x-y) + i\int d^{4}x'\partial_{x'}^{\rho}\tilde{F}(x-x') \langle 0|Tj_{\rho}(x')A_{\nu}(y)|0\rangle$$
  
$$= \partial_{x}^{\mu}G_{\mu\nu}^{0}(x-y) - i\int d^{4}x\tilde{F}(x-x')\partial_{\rho}^{x'} \langle 0|Tj^{\rho}(x')A_{\nu}(y)|0\rangle$$
  
$$= \partial_{x}^{\mu}G_{\mu\nu}^{0}(x-y)$$
(4.115)

onde se fez uma integração por partes e se usou a identidade de Ward-Takashashi para n = 0, p = 1. Obtivemos portanto

$$\partial_x^{\mu} G_{\mu\nu}(x-y) = \partial_x^{\mu} G_{\mu\nu}^0(x-y) \tag{4.116}$$

o que no espaço dos momentos implica

$$p^{\mu}G_{\mu\nu}(p) = p^{\mu}G^{0}_{\mu\nu}(p) \tag{4.117}$$

Isto quer dizer que a parte longitudinal do propagador do fotão não é renormalizada, ou seja que a self-energy é transversal. De facto

$$p^{\mu}G^{0}_{\mu\nu}(p) = -i\xi \frac{p_{\nu}}{p^{2}}$$
(4.118)

ou ainda

$$p^{\mu} = -i\xi \frac{p_{\nu}}{p^2} G_{\nu\mu}^{-1}(p) = -\xi \frac{p_{\nu}}{p^2} \Gamma_{\nu\mu}(p)$$
(4.119)

Mas de acordo com as nossas definições

$$\Gamma_{\nu\mu}(p) = -(g_{\nu\mu}p^2 - p_{\nu}p_{\mu}) - \frac{1}{\xi}p_{\nu}p_{\mu} + \Pi_{\nu\mu}(p^2)$$
(4.120)

logo

$$-\xi \frac{p_{\nu}}{p^2} \Gamma_{\nu\mu}(p) = p_{\mu} - \frac{1}{\xi} \frac{1}{p^2} p^{\nu} \Pi_{\nu\mu}(p^2) = p_{\mu}$$
(4.121)

ou seja

$$p^{\nu}\Pi_{\nu\mu}(p^2) = 0 \tag{4.122}$$

isto é, a self-energy é transversal, como queríamos mostrar.

138





Figura 4.13:

# 4.2.2 Identidade para o vértice n = 1, p = 0

Estamos agora interessados na função de Green

$$\langle 0|Tj_{\mu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1})|0\rangle \qquad (4.123)$$

a que corresponde o diagrama da Figura 4.12. Esta função de Green pode-se relacionar com o vértice  $\langle 0|TA_{\mu}(x)\psi_{\beta}(x_1)\overline{\psi}_{\alpha}(y_1)|0\rangle$  correspondente ao diagrama da Figura 4.13, através da seguinte equação diagramática



e que se escreve

$$\langle 0|TA_{\mu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1})|0\rangle = -i\int d^{4}x'G^{0}_{\mu\nu}(x-x')\langle 0|Tj^{\nu}(x')\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1})|0\rangle$$

$$(4.125)$$

Tomando a transformada de Fourier

$$\int d^{4}x d^{4}x_{1} d^{4}y_{1} e^{i(p' \cdot x_{1} - p \cdot y_{1} - q \cdot x)} \langle 0 | TA_{\mu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1}) | 0 \rangle$$
  
=  $-iG_{\mu\nu}^{0}(q) \int d^{4}x d^{4}x_{1} d^{4}y_{1} e^{i(p' \cdot x_{1} - p \cdot y_{1} - q \cdot x)} \langle 0 | Tj^{\nu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1}) | 0 \rangle (4.126)$ 

onde os sentidos dos momentos são os indicados na Figura 4.14, e o momento transferido qé dado por

$$q = p' - p \tag{4.127}$$

Por outro lado, por definição do vértice  $\Gamma_{\mu}$  temos

$$\int d^{4}x d^{4}x_{1} d^{4}y_{1} e^{i(p' \cdot x_{1} - p \cdot y_{1} - q \cdot x)} \langle 0 | TA_{\mu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}_{\alpha}(y_{1}) | 0 \rangle$$

$$= (2\pi)^{4} \delta^{4}(p' - p - q)G_{\mu\nu}(q)[S(p')i\Gamma_{\nu}(p', p)S(p)]_{\beta\alpha} \qquad (4.128)$$

Portanto

$$(2\pi)^4 \delta(p'-p-q) G_{\mu\nu}(q) S(p') i \Gamma^{\nu}(p',p) S(p)$$



Figura 4.14:

$$= -iG^{0}_{\mu\nu}(q) \int d_{x}^{4} d^{4}x_{1} d^{4}y_{1} e^{i(p'\cdot x_{1}-p\cdot y_{1}-q\cdot x)} \langle 0|Tj^{\nu}(x)\psi(x_{1})\overline{\psi}(y_{1})|0\rangle (4.129)$$

Multiplicando por  $q^{\mu}$ e usando o resultado

$$q^{\mu}G_{\mu\nu}(q) = q^{\mu}G^{0}_{\mu\nu}(q) = -i\xi \frac{q_{\nu}}{q^2}$$
(4.130)

podemos escrever (usando a identidade de Ward para  $n=1,\,p=0)$ 

$$(2\pi)^{4}\delta(p'-q-p)S(p')q^{\nu}\Gamma_{\nu}(p',p)S(p)$$

$$= i\int d^{4}x d^{4}x_{1}d^{4}y_{1}\partial_{x}^{\nu} \langle 0|Tj_{\nu}(x)\psi_{\beta}(x_{1})\overline{\psi}(y_{1})|0\rangle e^{i(p'\cdot x_{1}-p\cdot y_{1}-q\cdot x)}$$

$$= ie\int d^{4}_{x}d^{4}x_{1}d^{4}y_{1}e^{i(p'\cdot x_{1}-p\cdot y_{1}-q\cdot x)} \langle 0|T\psi(x_{1})\overline{\psi}(y_{1})|0\rangle [\delta(x-y_{1})-\delta(x-x_{1})]$$

$$= ie(2\pi)^{4}\delta(p'-p-q)[S(p')-S(p)]$$
(4.131)

ou ainda

$$q^{\nu}\Gamma_{\nu}(p',p) = ie\left[S^{-1}(p) - S^{-1}(p')\right]$$
(4.132)

Com<br/>o $q^\nu = (p'-p)^\nu$ obtemos desta expressão, no limit<br/>ep'=p,

$$\Gamma_{\nu}(p,p) = -ie\frac{\partial S^{-1}}{\partial p^{\nu}}$$
$$= -e\left(\gamma_{\nu} - \frac{\partial \Sigma}{\partial p^{\nu}}\right)$$
(4.133)

Usando  $\Gamma_{\nu} = -e(\gamma_{\nu} + \Lambda_{\nu})$  obtemos finalmente a identidade de Ward na forma utilizada atrás

$$\Lambda_{\nu}(p,p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p^{\nu}} . \qquad (4.134)$$

# 4.3 Contratermos e contagem de potências

Tudo aquilo que vimos nas secções anteriores pode ser interpretado do modo seguinte. O Lagrangeano inicial  $\mathcal{L}(e, m, \cdots)$  foi obtido a partir duma correspondência entre a mecânica clássica e a mecânica quântica. É então natural que seja modificado por correcções quânticas sendo o Lagrangeano total dado então por

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}(e, m, \cdots) + \Delta \mathcal{L}$$
(4.135)

е

$$\Delta \mathcal{L} = \Delta \mathcal{L}^{(1)} + \Delta \mathcal{L}^{[2]} + \cdots$$
(4.136)

onde  $\Delta \mathcal{L}^{[i]}$  é a correcção correspondendo a "i - loops" ou, o que é o mesmo, à ordem  $\hbar^i$  pois uma contagem em termos de  $\hbar$  é o mesmo que uma contagem em termos de  $loops^7$ . Esta interpretação é bastante atraente porque no limite  $\hbar \to 0$  o Lagrangeano se reduz ao clássico. Com o Lagrangeano  $\mathcal{L}_{tot}$  podemos então obter resultados *finitos*, embora  $\mathcal{L}_{tot}$  ele mesmo seja infinito por causa dos termos em  $\Delta \mathcal{L}$ .

Dentro desta linguagem os resultados até à ordem  $\hbar$  podem ser escritos

$$\mathcal{L}(e, m, \cdots) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} A^{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^{2} + i \overline{\psi} \partial \psi - m \overline{\psi} \psi - e \overline{\psi} A \psi$$

$$\Delta \mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{4} (Z_{3} - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (Z_{2} - 1) (i \overline{\psi} \partial \psi - m \overline{\psi} \psi) + Z_{2} \delta m \overline{\psi} \psi - e (Z_{1} - 1) \overline{\psi} A \psi$$

$$(4.138)$$

O Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} A_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + Z_2 (i \overline{\psi} \partial \psi - m \overline{\psi} \psi + \delta m \overline{\psi} \psi)$$

 ${}^{7}\hbar^{E-1+L} = \hbar^{\frac{E}{2}+\frac{V}{2}}$ . Notar que são válidas as seguintes relações L = I - V + 1; 3V = E + 2I.
#### 4.3. Contratermos e contagem de potências

$$-eZ_1\overline{\psi}A\!\psi \tag{4.139}$$

produzirá funções de Green renormalizadas e finitas até à ordem  $\hbar$ .

De facto só mostrámos que as funções de Green de 2 pernas exteriores (propagadores) e de 3 pernas exteriores (vértice) eram finitas. É importante verificarmos se todas as outras funções de Green, com um número arbitrário de pernas exteriores, são finitas pois já esgotámos toda a nossa liberdade ao escolhermos a massa, a constante de acoplamento e os resíduos dos pólos. Isto leva-nos à chamada contagem de potências.

Consideremos um diagrama de Feynman G com L loops,  $I_B$  linhas internas de Bosões e  $I_F$  linhas internas de Fermiões. Se houver vértices com derivadas,  $\delta_v$  é o número de derivadas no vértice v. Define-se então o grau superficial de divergência (notar que  $L = I_B + I_F + 1 - V$ )

$$\omega(G) = 4L + \sum_{v} \delta_{v} - I_{F} - 2I_{B} 
= 4 + 3I_{F} + 2I_{B} + \sum_{v} (\delta_{v} - 4)$$
(4.140)

Para grandes valores do momento o diagrama divergirá com

$$\Lambda^{\omega}(G) \quad \text{se} \quad \omega(G) > 0 \tag{4.141}$$

e com

$$\ln\Lambda \quad \text{se} \quad \omega(G) = 0 \tag{4.142}$$

onde  $\Lambda$  é um *cutoff*. Os diversos termos têm a origem seguinte:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (\text{por loop}) \rightarrow 4L$$
  

$$\partial_{\mu} \Leftrightarrow k_{\mu} \rightarrow \delta_{v}$$
  

$$\frac{i}{q-m} \rightarrow -I_F$$
  

$$\frac{i}{q^2-m^2} \rightarrow -2I_B$$
(4.143)

A expressão para  $\omega(G)$  é mais útil quando expressa em termos do número de linhas externas e da dimensionalidade dos vértices da teoria. Seja  $\omega_v$  a dimensão, em termos de massa, do vértice v, isto é

$$\omega_v = \delta_v + \#_{\text{campos bosónicos}} + \frac{3}{2} \#_{\text{campos fermiónicos}}$$
(4.144)

Então, se designarmos por  $f_v(b_v)$  o número de linhas internas fermiónicas (bosónicas) que vão dar ao vértice v, podemos escrever

$$\sum_{v} \omega_{v} = \sum_{v} (\delta_{v} + \frac{3}{2}f_{v} + b_{v}) + \frac{3}{2}E_{F} + E_{B}$$
(4.145)

onde  $E_F(E_B)$  são o número de linhas *externas* fermiónicas (bosónicas). Atendendo a que temos

$$I_F = \frac{1}{2} \sum_{v} f_v$$

$$I_B = \frac{1}{2} \sum_{v} b_v$$
(4.146)

obtemos

$$\sum_{v} \omega_{v} = \sum_{v} \delta_{v} + 3I_{F} + 2I_{B} + \frac{3}{2}E_{F} + E_{B}$$
(4.147)

Substituindo na expressão para  $\omega(G)$  obtemos finalmente

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B + \sum_{v}(\omega_v - 4)$$
(4.148)

Se  $[g_v]$  for a dimensão em termos de massa da constante de acoplamento do vértice v, então

$$\omega_v + [g_v] = 4 \tag{4.149}$$

De acordo com a expressão anterior para o grau superficial de divergência classificamos as teorias em três classes

#### i) Teorias não renormalizáveis

Contém pelo menos um vértice com  $\omega_v > 4$ . O grau superficial de divergência aumenta com o número de vértices, isto é com a ordem das teorias de perturbações. Para uma ordem suficientemente grande  $\forall$  função de Green diverge.

#### ii) Teorias renormalizáveis

Todos os vértices têm  $\omega_v \leq 4$  e pelo menos um tem  $\omega_v = 4$ . Se todos os vértices tiverem  $\omega_v = 4$  então

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B \tag{4.150}$$

e todos os diagramas contribuindo para uma dada função de Green têm o mesmo grau de divergência. Somente um número *finito* de *funções de Green* são divergentes.

iii) Teorias super-renormalizáveis

Todos os vértices têm  $\omega_v < 4$ . Somente um número *finito* de *diagramas* é divergente <sup>8</sup>.

Voltando ao nosso problema de saber quais os diagramas divergentes em QED, podemos fazer a tabela seguinte.

$E_F$	$E_B$	$\omega(G)$	Grau efectivo
			de divergencia
0	2	2	0 (cons. de corrente
0	3		0 (T. de Furry)
0	4	0	Convergente
2	0	1	0 (cons. de corrente)
2	1	0	0

Tabela 6.1

Todos os outros diagramas são superficialmente convergentes. Como veremos o grau efectivo de divergência é reduzido em virtude das identidades de Ward ou seja de conservação de corrente.

Esta análise mostra que até à ordem  $\hbar$  o Lagrangeano

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} Z_3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu A_{\mu} A^{\mu} - \frac{1}{2\xi} (\partial \cdot A)^2 + Z_2 (i \overline{\psi} \partial \psi - m \overline{\psi} \psi + \delta m \overline{\psi} \psi) - e Z_1 \overline{\psi} A \psi$$
(4.151)

produz funções de Green finitas e renormalizadas com um número arbitrário de pernas. Resta mostrar, o que não faremos aqui, que o Lagrangeano anterior continua a ser válido numa ordem qualquer com a mesma forma, com a única diferença que as constantes  $Z_1, Z_2, Z_3$  e  $\delta m$  serão dados por séries, p.e.

$$Z_1 = Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \cdots$$
(4.152)

 $<sup>^{8}</sup>$ O grau efectivo de divergência é por vezes inferior ao grau superficial, quando devido a simetrias da teoria algumas potências do momento exterior podem ser factorizadas. É o que acontece com a polarização do vácuo em QED.

O Lagrangeano anterior permite uma outra interpretação que por vezes também é útil. Os campos  $A, \overline{\psi} \in \psi$  são os campos renormalizados que produzem resíduos iguais a 1 nos pólos dos propagadores, e as constantes m, e são a massa e a carga *físicas*. Definamos os campos não renormalizados  $\psi_0, \overline{\psi}_0 \in A_0$  e os parâmetros despidos (dependentes do cutoff)  $\mu_0^2, m_0$  e de acordo com

$$\psi_{0} = \sqrt{Z_{2}} \psi \qquad m_{0} = m - \delta m$$
  

$$\overline{\psi} = \sqrt{Z_{2}} \overline{\psi} \qquad \mu_{0}^{2} = Z_{3}^{-1} \mu^{2}$$
  

$$A_{0} = \sqrt{Z_{3}} A \qquad e_{0} = Z_{1} Z_{2}^{-1} \sqrt{Z_{3}^{-1}} e = \frac{1}{\sqrt{Z_{3}}} e$$
  

$$\xi_{0} = Z_{3} \xi$$
  
(4.153)

Então o Lagrangeano em termos das quantidades despidas é idêntico ao Lagrangeano original $^9$ 

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu} F_0^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu_0 A_{0\mu} A_0^{\mu} - \frac{1}{2\xi_0} (\partial \cdot A_0)^2 + i (\overline{\psi}_0 \partial \!\!\!/ \psi_0 - m_0 \overline{\psi} \psi_0) - e_0 \overline{\psi}_0 A_0 \psi_0$$
(4.154)

As funções de Green despidas estão relacionadas com as funções de Green renormalizadas por

$$G_0^{n,\ell}(p_1, \cdots p_{2n}, k_1, \cdots k_\ell, \mu_0, m_0, \ell_0, \xi_0, \Lambda) = Z_2^n(\Lambda) Z_3^{\ell/2} G_R^{n,\ell}(p_1, \cdots p_{2n}, k_1 \cdots k_\ell, \mu, m, e, \xi)$$
(4.155)

onde  $p_1 \cdots p_{2n}$  são os momentos dos fermiões e  $k_1 \cdots k_\ell$  os momentos dos bosões.

#### 4.4 Momento magnético anómalo do electrão

Vamos aqui ver como as correcções finitas produzem resultados verificados experimentalmente dando credibilidade a todo o programa de renormalização. Calculemos a correcção ao momento magnético anómalo do electrão. O momento magnético do electrão é dado por

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m}g\frac{\vec{\sigma}}{2} \tag{4.156}$$

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Os termos  $\frac{\mu^2}{2}A^2 = \frac{\mu_0^2}{2}A_0^2$  e  $\frac{1}{2\xi}(\partial \cdot A)^2 = \frac{1}{2\xi_0}(\partial \cdot A_0)^2$ não são renormalizados. Isto é uma consequência das identidades de Ward-Takashashi. A identidade de Ward  $Z_1 = Z_2$  é crucial para que  $e_0A_0 = eA$  dando um significado ao acoplamento mínimo independente da renormalização.

#### 4.4. Momento magnético anómalo do electrão

onde e = -|e| para o electrão.

Um dos grandes triunfos da equação de Dirac foi prever o valor g = 2. Definamos a anomalia do momento magnético através da relação

$$g = 2(1+a) \tag{4.157}$$

ou seja

$$a = \frac{g}{2} - 1 \tag{4.158}$$

Vamos calcular a anomalia a dada pela correcção de 1-loop. Vejamos primeiro de que forma é que apareceria um valor de  $a \neq 0$  em mecânica quântica não relativista. A equação de Schrödinger para uma partícula num campo exterior é

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left[\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{e}{2m}(1+a)\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\right]\varphi \tag{4.159}$$

Consideremos que o campo exterior é um campo magnético  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Então conservando somente termos em primeira ordem em *e* obtemos

$$H = \frac{p^2}{2m} - e\frac{\vec{p}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{p}}{2m} - \frac{e}{2m}(1+a)\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A}$$
$$\equiv H_0 + H_{int}$$
(4.160)

A amplitude de transição devida a  $H_{int}$  é

$$\langle p' | H_{int} | p \rangle = -\frac{e}{2m} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \chi^{\dagger} e^{-i\vec{p}' \cdot \vec{x}} [\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p} + (1+a)\vec{\sigma} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{A}] e^{i\vec{p} \cdot x} \chi$$

$$= -\frac{e}{2m} \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \chi^{\dagger} [(\vec{p}' + \vec{p}) + i(1+a)\sigma^i \epsilon^{ijk} q^j A^k] e^{-i\vec{q} \cdot x} \chi$$

$$= -\frac{e}{2m} \chi^{\dagger} [(p' + p)^k + i(1+a)\sigma^i \epsilon^{ijk} q^j] A^k(q) \chi$$

$$(4.161)$$

É este o resultado que que remos comparar com o limite não relativista da correcção do vértice. A amplitude é dada por

$$A = e\overline{u}(p')(\gamma_{\mu} + \Lambda_{\mu}^{R})u(p)A^{\mu}(q)$$
  
=  $e\overline{u}(p')\left[\gamma_{\mu}(1 + F_{1}(q^{2})) + \frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}F_{2}(q^{2})\right]u(p)A^{\mu}(q)$   
=  $\frac{e}{2m}\overline{u}(p')\left\{(p'+p)_{\mu}\left[1 + F_{1}(q^{2})\right] + i\sigma_{\mu\nu}q^{\nu}\left[1 + F_{2}(q')\right]\right\}u(p)A^{\mu}(q)$  (4.162)

onde se usou a identidade Gordon. Para um campo magnético externo  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ e no limite  $q^2 \to 0$  a expressão anterior reduz-se a

$$A = \frac{e}{2m}\overline{u}(p')\left\{(p'+p)_{k}[1+F_{1}(0)]+i\sigma_{kj}q^{j}[1+F_{2}(0)]\right\}u(p)A^{k}(q)$$
  
$$= \frac{e}{2m}\overline{u}(p')\left[-(p'+p)^{k}+i\Sigma^{i}\epsilon^{kij}q^{j}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\right]u(p)A^{k}(q)$$
(4.163)

onde se usaram os resultados 4.101

$$\begin{cases} F_1(0) = 0 \\ F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \end{cases}$$
(4.164)

Usando a forma explicita dos spinores u

$$u(p) = \begin{pmatrix} \chi \\ \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})}{2m} \chi \end{pmatrix}$$
(4.165)

podemos escrever no limite não relativista

$$A = -\frac{e}{2m}\chi^{\dagger} \left[ (p'+p)^k + i\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\sigma^i \epsilon^{ijk} q^j \right] \chi A^k$$
(4.166)

o que após identificação com (6.136) conduz a

$$a_{th}^e = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{4.167}$$

Este resultado obtido pela primeira vez por Schwinger e confirmado experimentalmente foi muito importante na aceitação do programa de renormalização em QED.

#### 4.5 Correcções radiativas à difusão de Coulomb

Vimos no capítulo anterior que a difusão de Coulomb correspondente ao diagrama da Figura 4.15, tinha a seguinte expressão para o elemento da matriz S

$$S_{fi} = iZe^2(2\pi)\delta(E_i - E_f)\frac{1}{|\vec{q}|^2} \ \overline{u}(p_f)\gamma^0 u(p_i)$$
(4.168)

Vamos agora estudar as correcções radiativas a este resultado, em ordem mais baixa. Devido às divergências infravermelhas que vão aparecer é conveniente introduzir uma massa para o fotão, o que em termos dum campo clássico quer dizer um screening. Se tomarmos

$$A_c^0(x) = Ze \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|}$$
(4.169)



Figura 4.15:



Figura 4.16:

então a transformada de Fourier é

$$A_c^0(q) = Ze \frac{1}{|\vec{q}|^2 + \mu^2}$$
(4.170)

o que mostra que o  $\mu$  tem o efeito duma massa. Com estas modificações temos

$$S_{fi} = iZe^2(2\pi)\delta(E_f - E_i) \;\frac{i}{|\vec{q}|^2 + \mu^2} \;\overline{u}(p_f)\gamma^0 u(p_i) \tag{4.171}$$

Estamos interessados em calcular as correcções até à ordem  $e^3$  na amplitude. Para isso contribuem os diagramas representados na Figura 4.16. O diagrama 1 é de ordem  $e^2$  enquanto que os 2, 3, e 4 são de ordem  $e^4$ . Portanto a interferência entre 1 e (2+3+4) é de ordem  $\alpha^3$  e deverá ser adicionada ao resultado do bremstrahlung num campo de Coulomb. A contribuição de 1 + 2 + 3 obtém-se muito facilmente notando que

$$eA^{\mu}_{c}\gamma_{\mu} \to eA^{\mu}_{c}(\gamma_{\mu} + \Lambda^{R}_{\mu} + \Pi^{R}_{\mu\nu}G^{\nu\rho}\gamma_{\rho})$$
(4.172)

onde  $\Lambda^R_{\mu}$  e  $\Pi^R_{\mu\nu}$  for am calculados anteriormente. Obtemos

$$S_{fi}^{(1+2+3)} = iZe^{2}(2\pi)\delta(E_{i} - E_{f})\frac{1}{|\vec{q}|^{2} + \mu^{2}}\overline{u}(p_{f})\gamma^{0}\left\{1 + \frac{\alpha}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\varphi\tanh\varphi\right]\right\}$$
$$\left(1 + \ln\frac{\mu}{m}\right)(2\varphi\coth2\varphi - 1) - 2\coth2\varphi\int_{0}^{\varphi}\beta\tanh\beta d\beta$$
$$+ \left(1 - \frac{\coth^{2}\varphi}{\beta}\right)(\varphi\coth\varphi - 1) + \frac{1}{9}\right] - \frac{\not{q}}{2m}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\varphi}{\sinh2\varphi}\left\{u(p_{i})\left(4.173\right)\right\}$$

onde

$$\frac{\left|\vec{q}\right|^2}{4m} = \sinh^2\varphi \tag{4.174}$$

Finalmente o quarto diagrama dá

$$S_{fi}^{(4)} = (iZe)^{2}(e)^{2} \int \frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}} \overline{u}(p_{f}) \left[ \frac{2\pi\delta(E_{f}-k^{0})}{(p_{f}-k)^{2}-\mu^{2}} \gamma^{0} \frac{i}{\not{k}-m+i\varepsilon} \gamma^{0} \frac{2\pi\delta(k^{0}-E_{i})}{(k-p_{i})^{2}-\mu^{2}} \right]$$
  
$$= -2i \frac{Z^{2}\alpha^{2}}{\pi} 2\pi\delta(E_{f}-E_{i})\overline{u}(p_{f})[m(I_{1}-I_{2})+\gamma^{0}E_{i}(I_{1}+I_{2})]u(p_{i}) \qquad (4.175)$$

onde

$$I_1 = \int d^3k \frac{1}{[(\vec{p}_f - \vec{k})^2 + \mu^2][(\vec{p}_i - \vec{k})^2 + \mu^2][(\vec{p})^2 - (\vec{k})^2 + i\varepsilon]}$$
(4.176)

е

$$\frac{1}{2}(\vec{p}_i + \vec{p}_f)I_2 \equiv \int d^3k \frac{\vec{k}}{[(\vec{p}_f - \vec{k})^2 + \mu^2][(\vec{p}_i - \vec{k})^2 + \mu^2][(\vec{p})^2 - (\vec{k})^2 + i\varepsilon]}$$
(4.177)

No limite  $\mu \to 0$  pode-se mostrar que

$$I_{1} = \frac{\pi^{2}}{2ip^{3}\sin^{2}\theta/2} \ln\left(\frac{2p\sin(\theta/2)}{\mu}\right)$$
(4.178)  
$$I_{2} = \frac{\pi^{2}}{2p^{3}\cos^{2}\theta/2} \left\{ \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sin\theta/2} \right] - i \left[ \frac{1}{\sin^{2}\theta/2} \ln\left(\frac{2p\sin\theta/2}{\mu}\right) + \ln\frac{\mu}{2p} \right] \right\}$$
(4.179)

Com estas expressões obtemos para a secção eficaz

#### 4.5. Correcções radiativas à difusão de Coulomb

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2}{|\vec{q}|^2} \frac{1}{2} \sum_{pol} |\overline{u}(p_f) \Gamma u(p_i)|^2$$
(4.180)

 ${\rm onde}$ 

$$\Gamma = \gamma^{0}(1+A) + \gamma^{0} \frac{\not a}{2m} B + C$$
(4.181)

e

$$A = \frac{\alpha}{\pi} \left[ \left( 1 + \ln \frac{\mu}{m} \right) \left( 2\varphi \coth 2\varphi - 1 \right) - 2 \coth 2\varphi \int_{0}^{\varphi} d\beta \beta \tanh \beta - \frac{\varphi}{2} \tanh \varphi \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{1}{3} \coth^{2} \varphi \right) \left( \varphi \coth \varphi - 1 \right) + \frac{1}{9} \right] - \frac{Z\alpha}{2\pi^{2}} |\vec{q}|^{2} E(I_{1} + I_{2})$$
(4.182)

$$B = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} \tag{4.183}$$

$$C = -\frac{Z\alpha}{2\pi^2} m |\vec{q}|^2 (I_1 - I_2)$$
(4.184)

Então

$$\frac{1}{4} \sum_{pol} |\overline{u}(p_f)pu(p_i)|^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}[\Gamma(\not p_i + m)\overline{\Gamma}(\not p_f + m)]$$
  
=  $2E^2(1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2) + 2E^2 2B\beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$   
 $+ 2E^2 2ReA\left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + 2ReC(2mE) + O(\alpha^2) (4.185)$ 

Notar que  $A, B \in C$  são de ordem  $\alpha$  e que a dependência em  $\mu$  desapareceu (o resultado não depende de ImA ou ImC). O resultado final é portanto, até ordem  $\alpha^3$ :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{elastic}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left\{ 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \left(1 + \ln\frac{\mu}{m}\right) \left(2\varphi \coth\varphi - 1\right) - \frac{\varphi}{2} \tanh\varphi \right. \right. \\ \left. -2 \coth 2\varphi \int_{0}^{\varphi} d\beta \tanh\beta + \left(-\frac{\coth^{2}\varphi}{3}\right) \left(\varphi \coth\varphi - 1\right) + \frac{1}{9} \right. \\ \left. -\frac{\varphi}{\sinh 2\varphi} \frac{B^{2} \sin^{2}\theta/2}{1 - \beta^{2} \sin^{2}\theta/2} \right] + Z\alpha\pi \frac{\beta \sin\frac{\theta}{2} [1 - \sin\theta/2]}{1 - \beta^{2} \sin^{2}\theta/2} \right\}$$
(4.186)

Tal como tínhamos anunciado, o resultado é divergente infravermelho (no limite  $\mu \rightarrow 0$ ). Como explicamos anteriormente esta divergência não é física e é resolvida

151

da seguinte maneira. Os detectores têm uma energia abaixo da qual não detectam, pelo que no limite  $\omega \to 0$  o bremsstrahlung na presença do campo de Coulomb e a difusão no campo de Coulomb não são distinguidas pelo detector. Isto quer dizer que temos que somar os dois resultados. Se considerarmos um intervalo de energia  $\Delta E \text{ com } \mu \leq \Delta E \leq E$  obtemos

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{BR} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \int_{\omega \le \Delta E} \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} e^2 \left[\frac{2p_i \cdot p_f}{k_i \cdot p_i k \cdot p_f} - \frac{m^2}{(k \cdot p \cdot)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p_f)^2}\right]$$
(4.187)

Introduzindo uma massa para o fotão (isto <br/>é $\omega=(|\vec{k}|^2+\mu^2)^{1/2})$ o integral pode ser efectuado obtendo-se

$$\left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{BR} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \frac{2\alpha}{\pi} \left\{ (2\varphi \coth 2\varphi - 1) \ln \frac{2\Delta E}{\mu} + \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{1}{2} \cosh 2\varphi \frac{1-\beta^2}{\beta \sin \theta/2} \int_{\cos \theta/2}^{1} d\xi \frac{1}{(1-\beta^2\xi^2)[\xi - \cos^2 \theta/2]^{1/2}} \ln \frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi} \right\}$$

$$(4.188)$$

Vemos agora que quando consideramos a secção eficaz inclusiva

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{elastic}} + \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(\Delta E)\right]_{BR} \\
= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} (1 - \delta_R + \delta_B)$$
(4.189)

onde  $\delta_R e \delta_B$  são expressões complicadas que dependem da energia  $\Delta E$  (resolução de detector) mas não dependem do parâmetro  $\mu$  que pode finalmente ser posto igual a zero. Pode-se mostrar que em QED todas as divergências podem ser tratadas duma forma semelhante. Notar que o efeito final do bremsstrahlung é finito e pode ser importante.

## Apêndice A

# Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

May 19, 2010

#### A.1 Parâmetro $\mu$

A razão do parâmetro  $\mu$  introduzindo no texto é a seguinte. Em dimensão  $d = 4 - \epsilon$ , os campos  $A_{\mu} \in \psi$  têm as dimensões dadas pelos termos cinéticos da acção

$$\int d^d x \left[ -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \overline{\psi} \gamma \cdot \partial \psi \right]$$
(A.1)

logo

$$0 = -d + 2 + 2[A_{\mu}] \Rightarrow [A_{\mu}] = \frac{1}{2}(d - 2) = 1 - \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 = -d + 1 + 2[\psi] \Rightarrow [\psi] = \frac{1}{2}(d - 1) = \frac{3}{2} - \frac{\epsilon}{2}$$
(A.2)

Usando estas dimensões no termo de interacção

$$S_I = \int d^d x e \overline{\psi} \gamma_\mu \psi A^\mu \tag{A.3}$$

obtemos

$$[S_{I}] = -d + [e] + 2[\psi] + [A]$$
  
=  $-4 + \epsilon + [e] + 3 - \epsilon + 1 - \frac{\epsilon}{2}$   
=  $[e] - \frac{\epsilon}{2}$  (A.4)

Portanto se quisermos que a acção não tenha dimensões (notar que  $\hbar = c = 1$ , portanto a acção não tem dimensões) temos que pôr

Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

$$[e] = \frac{\epsilon}{2} \tag{A.5}$$

Assim vemos que em dimensões  $d \neq 4$  a constante de acoplamento tem dimensões. Como é mais conveniente trabalhar com uma constante de acoplamento sem dimensões introduzimos um parâmetro  $\mu$  com dimensões de massa e quando estamos em  $d \neq 4$  fazemos a substituição

$$e \to e\mu^{\frac{\epsilon}{2}} \qquad (\epsilon = 4 - d) \tag{A.6}$$

mantendo a constante e sem dimensões.

#### A.2 Parametrização de Feynman

A forma mais geral dum integral a 1-loop é<sup>1</sup>

$$\hat{T}_{n}^{\mu_{1}\cdots\mu_{p}} \equiv \int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{k^{\mu_{1}}\cdots k^{\mu_{p}}}{D_{1}D_{2}\cdots D_{n}}$$
 (A.7)

onde

$$D_{i} = (k + r_{i})^{2} - m_{i}^{2} + i\epsilon$$
(A.8)

onde os momentos  $r_i$  estão relacionados com os momentos exteriores (por convenção tomados todos *incoming*) através das relações

$$r_{j} = \sum_{i=1}^{j} p_{i} \quad ; \quad j = 1, \dots, n-1$$
  
$$r_{n} = \sum_{i=1}^{n} p_{i} = 0$$
(A.9)

conforme indicado na Fig. (A.1). Nestas expressões aparecem no denominador produtos dos denominadores dos propagadores das partículas no *loop*. É conveniente combinar esses produtos num só denominador. Isso consegue-se através duma técnica devida a Feynman. Exemplifiquemos para dois denominadores

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[ax + b(1-x)\right]^2}$$
(A.10)

A demonstração é trivial. De facto, a primitiva da função integranda é

$$\int dx \, \frac{1}{\left[ax + b(1-x)\right]^2} = \frac{x}{b\left[(a-b)x + b\right]} \tag{A.11}$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>We introduce here the notation  $\hat{T}$  to distinguish from a more standard notation that will be explained in section A.9.



Figura A.1:



Figura A.2:

e portanto Eq. (A.10) segue imediatamente. Por derivação sucessiva em ordem a a e b obtemos

$$\frac{1}{a^{p}b^{q}} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_{0}^{1} dx \; \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\left[ax+b(1-x)\right]^{p+q}} \tag{A.12}$$

e por indução obtemos uma fórmula geral

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{\left[a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n (1-x_1-\dots-x_{n-1})\right]^n}$$
(A.13)

Antes de terminar esta secção vamos dar um exemplo que será útil no caso das *selfenergies*. Consideremos a situação descrita pela cinemática da Fig. (A.2). Obtemos então

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+p)^2 - m_1^2 + i\epsilon] [k^2 - m_2^2 + i\epsilon]}$$
  
=  $\int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2p \cdot k \, x + p^2 \, x - m_1^2 \, x - m_2^2 \, (1-x) + i\epsilon]^2}$   
=  $\int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 + 2P \cdot k - M^2 + i\epsilon]^2}$ 

Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[(k+P)^2 - P^2 - M^2 + i\epsilon\right]^2}$$
(A.14)

onde na última linha se completou o quadrado do termo no momento k do loop. As grandezas  $P \in M^2$  são, neste caso da *self-energy*, definidas por

$$P = xp \tag{A.15}$$

е

$$M^{2} = -x p^{2} + m_{1}^{2} x + m_{2}^{2} (1 - x)$$
(A.16)

só dependem das massas, momentos exteriores e dos parâmetros de Feynman. Agora fazendo a mudança de variável  $k\to k-P$ eliminamos os termos lineares em ke obtemos finalmente

$$I = \int_0^1 dx \, \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \, \frac{1}{\left[k^2 - C + i\epsilon\right]^2} \tag{A.17}$$

onde C é independente do momento k e dado por

$$C = P^2 + M^2 \tag{A.18}$$

Notar que os factores  $i\epsilon$  se adicionam correctamente e se podem pôr sempre como na Eq. (A.17).

#### A.3 Rotação de Wick

Do exemplo visto na secção anterior se pode concluir que todos os integrais escalares se podem reduzir à forma

$$I_{r,m} = \int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \, \frac{k^{2^r}}{\left[k^2 - C + i\epsilon\right]^m} \tag{A.19}$$

Também e fácil de ver que todos os integrais tensoriais se podem reduzir a integrais escalares. Por exemplo

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = 0$$

$$\int \frac{d^d x}{(2\pi)^d} \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{[k^2 - C + i\epsilon]^m} = \frac{1}{d} g^{\mu\nu} \int d^d x \frac{k^2}{[k^2 - C + i\epsilon]^m}$$
(A.20)

e assim sucessivamente. Então os integrais  $I_{r,m}$  são os que serão importantes para calcular. Vamos supor que C > 0 e o caso C < 0 far-se-á por continuação analítica. Para calcular o integral  $I_{r,m}$  vamos usar a integração no plano complexo da variável  $k^0$  conforme descrito na Fig. (A.3). Podemos escrever

156



Figura A.3:

$$I_{r,m} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^d} \int dk^0 \, \frac{k^{2^r}}{\left[k_0^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\epsilon\right]^m} \tag{A.21}$$

A função integranda tem pólos para

$$k^{0} = \pm \left(\sqrt{|\vec{k}|^{2} + C} - i\epsilon\right) \tag{A.22}$$

conforme indicado na Fig. (A.3). Assim, usando as propriedades das funções complexas (Teorema de Cauchy), podemos deformar o contorno passando a integração do eixo real para o eixo imaginário mais os dois quarto de círculo indicados na figura. A contribuição destes quarto de círculos no infinito é nula se a dimensão for suficientemente pequena para o integral convergir, como estamos a supor em regularização dimensional. Então transformámos a integração ao longo do eixo real numa integração ao longo do eixo imaginário no plano da variável complexa  $k^0$ . Se escrevermos então

$$k^0 = ik_E^0 \qquad \text{com} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \to i \int_{-\infty}^{+\infty} dk_E^0$$
 (A.23)

e  $k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = -(k_E^0)^2 - |\vec{k}|^2 \equiv -k_E^2$ , onde  $k_E = (k_E^0, \vec{k})$  é um vector euclidiano, isto é, calculamos o seu produto interno usando a métrica euclidiana diag(+, +, +, +),

$$k_E^2 = (k_E^0)^2 + |\vec{k}|^2 \tag{A.24}$$

Podemos então escrever

$$I_{r,m} = i(-1)^{r-m} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k_E^{2^r}}{[k_E^2 + C]^m}$$
(A.25)

onde não mais precisamos do  $i\epsilon$  pois o denominador é estritamente positivo (C > 0). Este procedimento é conhecido como *Rotação de Wick*. É de notar que a prescrição de Feynman para os propagadores que deu origem ao  $i\epsilon$  nos denominadores é crucial para se poder fazer a rotação de Wick.

#### A.4 Integrais Escalares em Regularização Dimensional

Vimos na secção anterior que os integrais a calcular em regularização dimensional tinham a forma geral da Eq. (A.25). Vamos aqui encontrar uma expressão geral para  $I_{r,m}$ . Para isso escrevemos

$$\int d^d k_E = \int d\overline{k} \ \overline{k}^{\ d-1} d\Omega_{d-1} \tag{A.26}$$

onde  $\overline{k} = \sqrt{(k_E^0)^2 + |\vec{k}|^2}$  é o comprimento do vector  $k_E$  no espaço euclidiano a d dimensões e  $d\Omega_{d-1}$  é o ângulo sólido que generaliza as coordenadas esféricas. Os ângulos são definidos por

$$k_E = \overline{k}(\cos\theta_1, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2, \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \dots, \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-1})$$
(A.27)

Então podemos escrever

$$\int d\Omega_{d-1} = \int_0^\pi \sin \theta_1^{d-2} \, d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_{d-1} \tag{A.28}$$

Usando agora

$$\int_0^\pi \sin \theta^m \, d\theta = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \tag{A.29}$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função gama, obtemos

$$\int d\Omega_{d-1} = 2 \, \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \tag{A.30}$$

A integração em  $\overline{k}$  faz-se usando o resultado

$$\int_0^\infty dx \ \frac{x^p}{(x^n + a^n)^q} = \pi (-1)^{q-1} a^{p+1-nq} \ \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n})}{n \sin(\pi \frac{p+1}{n}) \Gamma(\frac{p+1}{2} - q + 1)}$$
(A.31)

para finalmente se obter

$$I_{r,m} = iC^{r-m+\frac{d}{2}} \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(r+\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{\Gamma(m-r-\frac{d}{2})}{\Gamma(m)}$$
(A.32)

Notemos, para finalizar, que a representação integral de  $I_{r,m}$ , Eq. (A.19) é válida somente para d < 2(m-r) para assegurar a convergência quando  $\overline{k} \to \infty$ . Contudo a forma já integrada da Eq. (A.32) pode ser continuada analiticamente para todos os valores de d excepto para aqueles em que a função  $\Gamma(m-r-d/2)$  tem pólos, isto é (ver secção A.6), para

$$m - r - \frac{d}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$
 (A.33)

Para a aplicação aos integrais que aparecem em regularização dimensional é conveniente escrever Eq. (A.32) usando a relação  $d = 4 - \epsilon$ . Obtemos

$$I_{r,m} = i \frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} C^{2+r-m} \frac{\Gamma(2+r-\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(2-\frac{\epsilon}{2})} \frac{\Gamma(m-r-2+\frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(m)}$$
(A.34)

#### A.5 Integrais Tensoriais em Regularização Dimensional

Frequentemente estamos também interessados em calcular os integrais tensoriais da forma da Eq. (A.7)

$$\hat{T}_{n}^{\mu_{1}\cdots\mu_{p}} \equiv \int \frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}} \frac{k^{\mu_{1}}\cdots k^{\mu_{p}}}{D_{1}D_{2}\cdots D_{n}}$$
 (A.35)

Para fazermos estes integrais começamos por efectuar a redução ao mesmo denominador usando a parametrização de Feynman. O resultado é

$$\hat{T}_{n}^{\mu_{1}\cdots\mu_{p}} = \Gamma(n)\int_{0}^{1}dx_{1}\cdots\int_{0}^{1-x_{1}-\cdots-x_{n-1}}dx_{n-1}\int\frac{d^{d}k}{(2\pi)^{d}}\frac{k^{\mu_{1}}\cdots k^{\mu_{p}}}{[k^{2}+2k\cdot P-M^{2}+i\epsilon]^{n}} \\
= \Gamma(n)\int_{0}^{1}dx_{1}\cdots\int_{0}^{1-x_{1}-\cdots-x_{n-1}}dx_{n-1}I_{n}^{\mu_{1}\cdots\mu_{p}}$$
(A.36)

onde se definiu

$$I_n^{\mu_1 \cdots \mu_p} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, \frac{k^{\mu_1} \cdots k^{\mu_p}}{\left[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon\right]^n} \tag{A.37}$$

que designamos por integral tensorial. Em princípio todos estes integrais se podem escrever em termos de integrais escalares. No entanto é conveniente ter uma fórmula geral para os obter. Essa fórmula pode ser obtida notando que

$$\frac{\partial}{\partial P^{\mu}} \frac{1}{\left[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon\right]^n} = -n \frac{2k_{\mu}}{\left[k^2 + 2k \cdot P - M^2 + i\epsilon\right]^{n+1}}$$
(A.38)

Usando a relação anterior pode-se mostrar que

$$I_n^{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{(4\pi)^{\epsilon/2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{dt}{(2t)^p} t^{n-3+\epsilon/2} \frac{\partial}{\partial P_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial P_{\mu_p}} e^{-tC}$$
(A.39)

onde  $C = P^2 + M^2$ . Depois de efectuadas as derivadas os integrais podem ser feitos usando as propriedades da função  $\Gamma$  (ver secção A.6). Notar que  $P, M^2$  e portanto C dependem não só dos parâmetros de Feynman mas também dos momentos exteriores.

#### A.6 Função $\Gamma(z)$ e outras fórmulas úteis

A definição da função  $\Gamma$ é

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \tag{A.40}$$

ou

$$\int_{0}^{\infty} t^{z-1} e^{-\mu t} dt = \mu^{-z} \Gamma(z)$$
 (A.41)

A função  $\Gamma(z)$  tem as seguintes propriedades

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$
  

$$\Gamma(n+1) = n!$$
(A.42)

Outra função relacionada com a função  $\Gamma$  é a sua derivada logarít<br/>mica com as propriedades

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \tag{A.43}$$

$$\psi(1) = -\gamma \tag{A.44}$$

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$$
 (A.45)

onde  $\gamma$  é a constante de Euler. A função  $\Gamma(z)$  tem pólos para  $z = 0, -1, -2, \cdots$ . Junto do pólo z = -m temos

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{m+z} + \frac{(-1)^m}{m!} \psi(m+1) + O(z+m)$$
(A.46)

Daqui concluímos que quando  $\epsilon \to 0$ 

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} + \psi(1) + O(\epsilon) \qquad \Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{2}{\epsilon} + \psi(n+1) + 1\right]$$
(A.47)

 $\mathbf{e}$ 

$$\Gamma(1+\epsilon) = 1 - \gamma\epsilon + \left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}\right) \frac{\epsilon^2}{2!} + \cdots , \quad \epsilon \to 0$$
 (A.48)

Usando estes resultados podemos expandir os nossos integrais em potências de  $\epsilon$  e extrair a parte divergente e a parte finita. Exemplifiquemos para um dos integrais da *self-energy*.

160

$$I_{0,2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi}{C}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{2\Gamma(1+\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln C + O(\epsilon)\right]$$
$$= \frac{i}{16\pi^2} \left[\Delta_{\epsilon} - \ln C + O(\epsilon)\right]$$
(A.49)

onde introduzimos a notação

$$\Delta_{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \tag{A.50}$$

para uma combinação que vai aparecer em todas as expressões.

#### A.7 Explicit formulæ for the 1-loop integrals

Although we have presented in the previous sections the general formulæ for all the integrals that appear in 1-loop, Eqs. (A.34) and (A.39), in pratice it is convenient to have expressions for the most important cases with the expansion on the  $\epsilon$  already done. The results presented below were generated with the Mathematica package OneLoop [1] from the general expressions. In these results the integration on the Feynman parameters has still to be done. This is in general a difficult problem and we will present in section A.9 an alternative way of expressing these integrals more convenient for a numerical evaluation.

#### A.7.1 Tadpole integrals

With the definitions of Eqs. (A.34) and (A.39) we get

$$I_{0,1} = \frac{i}{16\pi^2} C(1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C)$$

$$I_1^{\mu} = 0$$

$$I_1^{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{8} C^2 g^{\mu\nu} (3 + 2\Delta_{\epsilon} - 2\ln C)$$
(A.51)

where for the *tadpole* integrals

$$P = 0 \quad ; \quad C = m^2 \tag{A.52}$$

because there are no Feynman parameters and there is only one mass. In this case the above results are final.

#### A.7.2 Self–Energy integrals

For the integrals with two denominators we get,

$$I_{0,2} = \frac{i}{16\pi^2} (\Delta_{\epsilon} - \ln C)$$

$$I_2^{\mu} = \frac{i}{16\pi^2} (-\Delta_{\epsilon} + \ln C) P^{\mu}$$

$$I_2^{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left[ Cg^{\mu\nu} (1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C) + 2(\Delta_{\epsilon} - \ln C) P^{\mu} P^{\nu} \right]$$

$$I_2^{\mu\nu\alpha} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left[ -Cg^{\mu\nu} (1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C) P^{\alpha} - Cg^{\nu\alpha} (1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C) P^{\mu} - Cg^{\mu\alpha} (1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C) P^{\nu} - (2\Delta_{\epsilon} P^{\alpha} P^{\mu} - 2\ln C P^{\alpha} P^{\mu}) P^{\nu} \right]$$
(A.53)

where, with the notation and conventions of Fig. (A.1), we have

$$P^{\mu} = x r_1^{\mu}$$
;  $C = x^2 r_1^2 + (1 - x) m_2^2 + x m_1^2 - x r_1^2$  (A.54)

#### A.7.3 Triangle integrals

For the integrals with three denominators we get,

$$I_{0,3} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{2C}$$

$$I_3^{\mu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2C} P^{\mu}$$

$$I_3^{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4C} \left[ Cg^{\mu\nu} (\Delta_{\epsilon} - \ln C) - 2P^{\mu}P^{\nu} \right]$$

$$I_3^{\mu\nu\alpha} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4C} \left[ Cg^{\mu\nu} (-\Delta_{\epsilon} + \ln C)P^{\alpha} + Cg^{\nu\alpha} (-\Delta_{\epsilon} + \ln C)P^{\mu} + Cg^{\mu\alpha} (-\Delta_{\epsilon} + \ln C)P^{\nu} + 2P^{\alpha}P^{\mu}P^{\nu} \right]$$

$$I_3^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{8C} \left[ C^2 (1 + \Delta_{\epsilon} - \ln C) \left( g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \right) + 2C (\Delta_{\epsilon} - \ln C) \left( g^{\mu\nu}P^{\alpha}P^{\beta} + g^{\nu\beta}P^{\alpha}P^{\mu} + g^{\mu\alpha}P^{\beta}P^{\nu} + g^{\mu\beta}P^{\alpha}P^{\nu} + g^{\alpha\beta}P^{\mu}P^{\nu} \right) - 4P^{\alpha}P^{\beta}P^{\mu}P^{\nu} \right]$$
(A.55)

where

$$P^{\mu} = x_1 r_1^{\mu} + x_2 r_2^{\mu}$$

$$C = x_1^2 r_1^2 + x_2^2 r_2^2 + 2x_1 x_2 r_1 \cdot r_2 + x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2$$

$$+ (1 - x_1 - x_2) m_3^2 - x_1 r_1^2 - x_2 r_2^2 \qquad (A.56)$$

#### A.7.4 Box integrals

$$I_{0,4} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{6C^2}$$

$$I_4^{\mu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{6C^2} P^{\mu}$$

$$I_4^{\mu\nu} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{-1}{12C^2} \left[ Cg^{\mu\nu} - 2P^{\mu}P^{\nu} \right]$$

$$I_4^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{12C^2} \left[ C\left(g^{\mu\nu}P^{\alpha} + g^{\nu\alpha}P^{\mu} + g^{\mu\alpha}P^{\nu}\right) - 2P^{\alpha}P^{\mu}P^{\nu} \right]$$

$$I_4^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{12C^2} \left[ C^2 \left( \Delta_{\epsilon} - \ln C \right) \left( g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} \right) - 2C \left( g^{\mu\nu}P^{\alpha}P^{\beta} + g^{\nu\beta}P^{\alpha}P^{\mu} + g^{\nu\alpha}P^{\beta}P^{\mu} + g^{\mu\alpha}P^{\beta}P^{\nu} + g^{\mu\beta}P^{\alpha}P^{\nu} + g^{\alpha\beta}P^{\mu}P^{\nu} \right) + 4P^{\alpha}P^{\beta}P^{\mu}P^{\nu} \right]$$
(A.57)

where

$$P^{\mu} = x_{1} r_{1}^{\mu} + x_{2} r_{2}^{\mu} + x_{3} r_{3}^{\mu}$$

$$C = x_{1}^{2} r_{1}^{2} + x_{2}^{2} r_{2}^{2} + x_{3}^{2} r_{3}^{2} + 2x_{1} x_{2} r_{1} \cdot r_{2} + 2x_{1} x_{3} r_{1} \cdot r_{3} + 2x_{2} x_{3} r_{2} \cdot r_{3}$$

$$+ x_{1} m_{1}^{2} + x_{2} m_{2}^{2} + x_{3} m_{3}^{2} + (1 - x_{1} - x_{2} - x_{3}) m_{4}^{2}$$

$$- x_{1} r_{1}^{2} - x_{2} r_{2}^{2} - x_{3} r_{3}^{2}$$
(A.58)

#### A.8 Divergent part of 1-loop integrals

When we want to study the renomalization of a given theory it is often convenient to have expressions for the divergent part of the one-loop integrals, with the integration on the Feynman parameters already done. We present here the results for the most important cases. These divergent parts were calculated with the help of the package OneLoop [1].

#### A.8.1 Tadpole integrals

$$\operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_{0,1} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \Delta_{\epsilon} m^2$$
$$\operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_1^{\mu} \end{bmatrix} = 0$$
$$\operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_1^{\mu\nu} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4} \Delta_{\epsilon} m^4 g^{\mu\nu}$$
(A.59)

#### A.8.2 Self-Energy integrals

$$Div \begin{bmatrix} I_{0,2} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \Delta_{\epsilon}$$
  

$$Div \begin{bmatrix} I_2^{\mu} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{2} \right) \Delta_{\epsilon} r_1^{\mu}$$
  

$$Div \begin{bmatrix} I_2^{\mu\nu} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{12} \Delta_{\epsilon} \left[ (3m_1^2 + 3m_2^2 - r_1^2)g^{\mu\nu} + 4r_1^{\mu}r_1^{\nu} \right]$$
  

$$Div \begin{bmatrix} I_2^{\mu\nu\alpha} \end{bmatrix} = \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{24} \right) \Delta_{\epsilon} \left[ (4m_1^2 + 2m_2^2 - r_1^2) \left( g^{\mu\nu}r_1^{\alpha} + g^{\nu\alpha}r_1^{\mu} + g^{\mu\alpha}r_1^{\nu} \right) + 6r_1^{\alpha}r_1^{\mu}r_1^{\nu} \right]$$
(A.60)

#### A.8.3 Triangle integrals

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_{0,3} \end{bmatrix} &= 0 \\ \operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_3^{\mu} \end{bmatrix} &= 0 \\ \operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_3^{\mu\nu} \end{bmatrix} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{4} \Delta_{\epsilon} g^{\mu\nu} \\ \operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_3^{\mu\nu\alpha} \end{bmatrix} &= \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{1}{12} \right) \Delta_{\epsilon} \left[ g^{\mu\nu} (r_1^{\alpha} + r_2^{\alpha}) + g^{\nu\alpha} (r_1^{\mu} + r_2^{\mu}) + g^{\mu\alpha} (r_1^{\nu} + r_2^{\nu}) \right] \\ \operatorname{Div} \begin{bmatrix} I_3^{\mu\nu\alpha\beta} \end{bmatrix} &= \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{48} \Delta_{\epsilon} \left[ (2m_1^2 + 2m_2^2 + 2m_3^2) \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \right) \right. \\ &\left. + g^{\alpha\beta} \left[ 2r_1^{\mu} r_1^{\nu} + r_1^{\mu} r_2^{\nu} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] + g^{\mu\beta} \left[ 2r_1^{\alpha} r_1^{\nu} + r_1^{\alpha} r_2^{\mu} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] \right. \\ &\left. + g^{\nu\beta} \left[ 2r_1^{\alpha} r_1^{\mu} + r_1^{\alpha} r_2^{\mu} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] + g^{\mu\nu} \left[ 2r_1^{\alpha} r_1^{\beta} + r_1^{\alpha} r_2^{\beta} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] \right. \\ &\left. + g^{\mu\alpha} \left[ 2r_1^{\beta} r_1^{\nu} + r_1^{\beta} r_2^{\nu} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] + g^{\nu\alpha} \left[ 2r_1^{\beta} r_1^{\mu} + r_1^{\beta} r_2^{\mu} + (r_1 \leftrightarrow r_2) \right] \right] \end{aligned}$$

+ 
$$\left(-r_1^2 + r_1 \cdot r_2 - r_2^2\right) \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right)$$
 (A.61)

#### A.8.4 Box integrals

$$\operatorname{Div}\left[I_{0,4}\right] = \operatorname{Div}\left[I_{4}^{\mu}\right] = \operatorname{Div}\left[I_{4}^{\mu\nu}\right] = \operatorname{Div}\left[I_{4}^{\mu\nu\alpha}\right] = 0$$
$$\operatorname{Div}\left[I_{4}^{\mu\nu\alpha\beta}\right] = \frac{i}{16\pi^{2}}\frac{1}{24}\Delta_{\epsilon}\left[g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right]$$
(A.62)

#### A.9 Passarino-Veltman Integrals

#### A.9.1 The general definition

The description of the previous sections works well if one just wants to calculate the divergent part of a diagram or to show the cancellation of divergences in a set of diagrams. If one actually wants to numerically calculate the integrals the task is normally quite complicated. Except for the *self-energy* type of diagrams the integration over the Feynman parameters is normally quite difficult.

To overcome this problem a scheme was first proposed by Passarino and Veltman [2]. These scheme with the conventions of [3, 4] was latter implemented in the Mathematica package FeynCalc [5] and, for numerical evaluation, in the LoopTools package [6, 7]. The numerical evaluation follows the code developed earlier by van Oldenborgh [8].

We will now describe this scheme. We will write the generic one-loop tensor integral as

$$T_n^{\mu_1\cdots\mu_p} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \; \frac{k^{\mu_1}\cdots k^{\mu_p}}{D_0 D_1 D_2 \cdots D_{n-1}} \tag{A.63}$$

where we follow for the momenta the conventions of section A.2 and Fig. A.1 and defined  $D_0 \equiv D_n$  and  $m_n = m_0$  so that  $D_0 = k^2 - m_0^2$  (remember that  $r_n \equiv r_0 = 0$ . The main difference between this definition and the previous one Eq. (A.7) is that a factor of  $\frac{i}{16\pi^2}$  is taken out. This is because, as we have seen in section A.3 these integrals always give that prefactor. So with our new convention that prefactor **has** to included in the end. Factoring out the *i* has also the convenience of dealing with real functions in many cases.<sup>2</sup> From all those integrals in Eq. (A.63) the scalar integrals are, has we have seen, of particular importance and deserve a special notation. It can be shown that there are only four independent such integrals, namelly  $(4 - d = \epsilon)$ 

$$A_0(m_0^2) = \frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2} \int d^d k \, \frac{1}{k^2 - m_0^2} \tag{A.64}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>The one loop functions are in general complex, but in some cases they can be real. These cases correspond to the situation where cutting the diagram does not corresponding to a kinematically allowed process.

Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

$$B_0(r_{10}^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2} \int d^d k \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.65)

$$C_0(r_{10}^2, r_{12}^2, r_{20}^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2} \int d^d k \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.66)

$$D_0(r_{10}^2, r_{12}^2, r_{23}^2, r_{30}^2, r_{20}^2, r_{13}^2, m_1^2, \dots, m_3^2) = \frac{(2\pi\mu)^{\epsilon}}{i\pi^2} \int d^d k \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.67)

where

$$r_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2$$
;  $\forall i, j = (0, n - 1)$  (A.68)

Remember that with our conventions  $r_0 = 0$  so  $r_{i0}^2 = r_i^2$ . In all these expressions the  $i\epsilon$  part of the denominator factors is supressed. The general one-loop tensor integrals are not independent. Their decomposition is not unique. We follow the conventions of [5, 7] to write

$$B^{\mu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^{\mu} \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.69)

$$B^{\mu\nu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu \prod_{i=0}^1 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.70)

$$C^{\mu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^{\mu} \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.71)

$$C^{\mu\nu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu \, \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]} \tag{A.72}$$

$$C^{\mu\nu\rho} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu k^\rho \, \prod_{i=0}^2 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.73)

$$D^{\mu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^{\mu} \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]} \tag{A.74}$$

$$D^{\mu\nu} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.75)

$$D^{\mu\nu\rho} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu k^\rho \, \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.76)

$$D^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d k \, k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma \prod_{i=0}^3 \frac{1}{[(k+r_i)^2 - m_i^2]}$$
(A.77)

These integrals can be decomposed in terms of (reducible) functions in the following way:

$$B^{\mu} = r_1^{\mu} B_1 \tag{A.78}$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + r_1^{\mu} r_1^{\nu} B_{11}$$
(A.79)

166

#### A.9. Passarino-Veltman Integrals

$$C^{\mu} = r_1^{\mu} C_1 + r_2^{\mu} C_2 \tag{A.80}$$

$$C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i=1}^{2} r_i^{\mu} r_j^{\nu} C_{ij}$$
(A.81)

$$C^{\mu\nu\rho} = \sum_{i=1}^{2} \left( g^{\mu\nu} r_{i}^{\rho} + g^{\nu\rho} r_{i}^{\mu} + g^{\rho\mu} r_{i}^{\nu} \right) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{2} r_{i}^{\mu} r_{j}^{\nu} r_{k}^{\rho} C_{ijk} \qquad (A.82)$$

$$D^{\mu} = \sum_{i=1}^{3} r_{i}^{\mu} D_{i}$$
 (A.83)

$$D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} D_{00} + \sum_{i=1}^{3} r_i^{\mu} r_j^{\nu} D_{ij}$$
(A.84)

$$D^{\mu\nu\rho} = \sum_{i=1}^{3} \left( g^{\mu\nu} r_i^{\rho} + g^{\nu\rho} r_i^{\mu} + g^{\rho\mu} r_i^{\nu} \right) D_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^{2} r_i^{\mu} r_j^{\nu} r_k^{\rho} D_{ijk} \quad (A.85)$$

$$D^{\mu\nu\rho\sigma} = (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) D_{0000} + \sum_{i,j=1}^{3} \left( g^{\mu\nu}r_{i}^{\rho}r_{j}^{\sigma} + g^{\nu\rho}r_{i}^{\mu}r_{j}^{\sigma} + g^{\mu\rho}r_{i}^{\nu}r_{j}^{\sigma} + g^{\mu\sigma}r_{i}^{\nu}r_{j}^{\rho} - (A.86) \right) + g^{\nu\sigma}r_{i}^{\mu}r_{j}^{\rho} + g^{\rho\sigma}r_{i}^{\mu}r_{j}^{\nu} D_{00ij} + \sum_{i,j,k,l=1}^{3} r_{i}^{\mu}r_{j}^{\nu}r_{k}^{\rho}r_{l}^{\sigma} C_{ijkl}$$
(A.87)

All coefficient functions have the same arguments as the corresponding scalar functions and are totally symmetric in their indices. In the FeynCalc [5] package one generic notation is used,

PaVe 
$$\left[i, j, \dots, \{r_{10}^2, r_{12}^2, \dots\}, \{m_0^2, m_1^2, \dots\}\right]$$
 (A.88)

for instance

$$B_{11}(r_{10}^2, m_0^2, m_1^2) = \text{PaVe}\left[1, 1, \{r_{10}^2\}, \{m_0^2, m_1^2\}\right]$$
(A.89)

All these coefficient functions are not independent and can be reduced to the scalar functions. FeynCalc provides the command PaVeREduce[...] to acomplish that. This is very useful if one wants to check for cancellation of divergences or for gauge invariance where a number of diagrams have to cancel.

#### A.9.2 The divergences

The package LoopTools provides ways to numerically check for the cancellation of divergences. However it is useful to know the divergent part of the Passarino-Veltman integrals. Only a small number of these integrals are divergent. They are

$$\operatorname{Div}\left[A_0(m_0^2)\right] = \Delta_{\epsilon} m_0^2 \qquad (A.90)$$

Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

$$\text{Div}\left[B_0(r_{10}^2, m_0^2, m_1^2)\right] = \Delta_{\epsilon}$$
 (A.91)

Div 
$$\left[B_1(r_{10}^2, m_0^2, m_1^2)\right] = -\frac{1}{2}\Delta_{\epsilon}$$
 (A.92)

$$\operatorname{Div}\left[\operatorname{B}_{00}(\operatorname{r}_{10}^2, \operatorname{m}_0^2, \operatorname{m}_1^2)\right] = \frac{1}{12} \Delta_{\epsilon} \left(3m_0^2 + 3m_1^2 - r_{10}^2\right) \quad (A.93)$$

Div 
$$\left[B_{11}(r_{10}^2, m_0^2, m_1^2)\right] = \frac{1}{3}\Delta_{\epsilon}$$
 (A.94)

$$\operatorname{Div}\left[\operatorname{C}_{00}(\operatorname{r}_{10}^{2}, \operatorname{r}_{12}^{2}, \operatorname{r}_{20}^{2}, \operatorname{m}_{0}^{2}, \operatorname{m}_{1}^{2}, \operatorname{m}_{2}^{2})\right] = \frac{1}{4}\Delta_{\epsilon}$$
(A.95)

$$\operatorname{Div}\left[\operatorname{C}_{001}(\operatorname{r}_{10}^{2}, \operatorname{r}_{12}^{2}, \operatorname{r}_{20}^{2}, \operatorname{m}_{0}^{2}, \operatorname{m}_{1}^{2}, \operatorname{m}_{2}^{2})\right] = -\frac{1}{12}\Delta_{\epsilon}$$
(A.96)

$$\operatorname{Div}\left[\operatorname{C}_{002}(\operatorname{r}_{10}^{2}, \operatorname{r}_{12}^{2}, \operatorname{r}_{20}^{2}, \operatorname{m}_{0}^{2}, \operatorname{m}_{1}^{2}, \operatorname{m}_{2}^{2})\right] = -\frac{1}{12}\Delta_{\epsilon}$$
(A.97)

$$Div \left[ D_{0000}(r_{10}^2, \dots, m_0^2, \dots) \right] = \frac{1}{24} \Delta_{\epsilon}$$
(A.98)

(A.99)

These results were obtained with the package LoopTools, after reducing to the scalar integrals with the command PaVeReduce, but they can be verified by comparing with our results of section A.8, after factoring out the  $i/(16\pi^2)$ .

# A.10 Examples of *1-loop* calculations with PV functions

In this section we will work out in detail a few examples of one-loop calculations using the FeynCalc package and the Passarino-Veltman scheme.

#### A.10.1 Vaccum Polarization in QED

We have done this example in section 4.1.1 using the techniques described in sections A.3, A.4 and A.5. Now we will use FeynCalc. The first step is to write the Matematica program. We list it below:

```
ds[p_]:=DiracSlash[p]
mt[mu_,nu_]:=MetricTensor[mu,nu]
fv[p_,mu_]:=FourVector[p,mu]
epsilon[a_,b_,c_,d_]:=LeviCivita[a,b,c,d]
id[n_]:=IdentityMatrix[n]
sp[p_,q_]:=ScalarProduct[p,q]
li[mu_]:=LorentzIndex[mu]
L:=dm[7]
R:=dm[6]
(* Now write the numerator of the Feynman diagram. We define the
  constant
      C=alpha/(4 pi)
*)
num := -C Tr[dm[mu] . (ds[q] + m) . dm[nu] . (ds[q]+ds[k]+m)]
(* Tell FeynCalc to evaluate the integral in dimension D *)
SetOptions[OneLoop,Dimension->D]
(* Define the amplitude *)
amp:=num * FeynAmpDenominator[PropagatorDenominator[q+k,m], \
                          PropagatorDenominator[q,m]]
(* Calculate the result *)
res:=(-I / Pi^2) OneLoop[q,amp]
```

The output from Mathematica is:

2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 Out[4]= (4 C (k + 6 m B0[0, m, m] - 3 (k + 2 m) B0[k, m, m]) 2 (k g[mu, nu] - k[mu] k[nu])) / (9 k) Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização

Now remembering that,

$$C = \frac{\alpha}{4\pi} \tag{A.100}$$

and

$$i \Pi_{\mu\nu}(k,\varepsilon) = -i k^2 P^T_{\mu\nu} \Pi(k,\varepsilon)$$
(A.101)

we get

$$\Pi(k,\varepsilon) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -\frac{4}{9} - \frac{8}{3} \frac{m^2}{k^2} B_0(0,m^2,m^2) + \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{2m^2}{k^2} \right) B_0(k^2,m^2,m^2) \right]$$
(A.102)

To obtain the renormalized vacuum polarization one needs to know the value of  $\Pi(0,\varepsilon)$ . To do that one has to take the limit  $k \to 0$  in Eq. (A.102). For that one uses the derivative of the  $B_0$  function

$$B'_0(p^2, m_1^2, m_2^2) \equiv \frac{\partial}{\partial p^2} B_0(p^2, m_1^2, m_2^2)$$
(A.103)

to obtain

$$\Pi(0,\varepsilon) = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ -\frac{4}{9} + \frac{4}{3} B_0(0,m^2,m^2) + \frac{8}{3} m^2 B_0'(0,m^2,m^2) \right]$$
(A.104)

Using

$$B_0'(0,m^2,m^2) = \frac{1}{6m^2} \tag{A.105}$$

we finally get

$$\Pi(0,\varepsilon) = -\delta Z_3 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ \frac{4}{3} B_0(0,m^2,m^2) \right]$$
(A.106)

and the final result for the renormalized vertex is:

$$\Pi^{R}(k) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[ -\frac{1}{3} + \left( 1 + \frac{2m^{2}}{k^{2}} \right) \left( B_{0}(k^{2}, m^{2}, m^{2}) - B_{0}(0, m^{2}, m^{2}) \right) \right]$$
(A.107)

If we want to compare with our earlier analytical results we need to know that

$$B_0(0, m^2, m^2) = \Delta_{\varepsilon} - \ln \frac{m^2}{\mu^2}$$
 (A.108)

Then Eq. (A.107) reproduces the result of Eq. (4.57). The comparison between Eq. (A.107) and Eq. (4.59) can be done numerically using the package LoopTools[7].

#### A.10.2 Electron Self-Energy in QED

In this section we repeat the calculation of section 4.1.2 using the Passarino-Veltman scheme. We start with the Mathematica program,

170

```
(* First input FeynCalc *)
<< FeynCalc.m
(* These are some shorthands for the FeynCalc notation *)
dm[mu_]:=DiracMatrix[mu,Dimension->D]
dm[5]:=DiracMatrix[5]
ds[p_]:=DiracSlash[p]
mt[mu_,nu_]:=MetricTensor[mu,nu]
fv[p_,mu_]:=FourVector[p,mu]
epsilon[a_,b_,c_,d_]:=LeviCivita[a,b,c,d]
id[n_]:=IdentityMatrix[n]
sp[p_,q_]:=ScalarProduct[p,q]
li[mu_]:=LorentzIndex[mu]
L:=dm[7]
R:=dm[6]
(* Tell FeynCalc to reduce the result to scalar functions *)
SetOptions[{B0,B1,B00,B11},BReduce->True]
(* Now write the numerator of the Feynman diagram. We define the
  constant
      C = - alpha/(4 pi)
  The minus sign comes from the photon propagator. The factor
  i/(16 pi^2) is already included in this definition.
*)
num:= C dm[mu]. (ds[p]+ds[k]+m). dm[mu]
(* Tell FeynCalc to evaluate the one-loop integral in dimension D *)
SetOptions[OneLoop,Dimension->D]
```

```
Apêndice A. Técnicas e fórmulas úteis para a renormalização
172
(* Define the amplitude *)
amp:= num \
FeynAmpDenominator[PropagatorDenominator[p+k,m], \
                   PropagatorDenominator[k]]
(* Calculate the result *)
res:=(-I / Pi^2) OneLoop[k,amp]
ans=-res;
(*
The minus sign in ans comes from the fact that -i \Sigma = diagram
*)
(* Calculate the functions A(p^2) and B(p^2) *)
A=Coefficient[ans,DiracSlash[p],0];
B=Coefficient[ans,DiracSlash[p],1];
(* Calculate deltm *)
delm=A + m B /. p->m
(* Calculate delZ2 *)
Ap2 = A /. ScalarProduct[p,p]->p2
Bp2 = B /. ScalarProduct[p,p]->p2
aux=2 m D[Ap2,p2] + Bp2 \
    + 2 m<sup>2</sup> D[Bp2,p2] /. D[B0[p2,0,m<sup>2</sup>],p2]->DB0[p2,0,m<sup>2</sup>]
aux2= aux /. p2->m^2
aux3= aux2 /. A0[m<sup>2</sup>]->m<sup>2</sup> (B0[m<sup>2</sup>,0,m<sup>2</sup>] -1)
delZ2=Simplify[aux3]
```

The output from Mathematica is:

We therefore get

$$A = \frac{\alpha m}{\pi} \left[ -\frac{1}{2} + B_0(p^2, 0, m^2) \right]$$
(A.109)

$$B = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 1 + \frac{1}{p^2} A_0(m^2) - \left( 1 + \frac{m^2}{p^2} \right) B_0(p^2, 0, m^2) \right]$$
(A.110)

$$\delta_m = \frac{3\alpha m}{4\pi} \left[ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3m^2} A_0(m^2) + \frac{2}{3} B_0(m^2, 0, m^2) \right]$$
(A.111)

One can check that Eq. (A.111) is in agreement with Eq. (4.82). For that one needs the following relations,

$$A_0(m^2) = m^2 \left( B_0(m^2, 0, m^2) - 1 \right)$$
 (A.112)

$$B_0(m^2, 0, m^2) = \Delta_{\varepsilon} + 2 - \ln \frac{m^2}{\mu^2}$$
 (A.113)

$$\int_0^1 dx (1+x) \ln \frac{m^2 x^2}{\mu^2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln \frac{m^2}{\mu^2}$$
(A.114)

For  $\delta Z_2$  we get

$$\delta Z_2 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[ 2 - B_0(m^2, 0, m^2) - 4m^2 B_0'(m^2, \lambda^2, m^2) \right]$$
(A.115)

This expression can be shown to be equal to Eq. (4.85) although this is not trivial. The reason is that  $B'_0$  is IR divergent, hence the parameter  $\lambda$  that controls the divergence.

#### A.10.3 QED Vertex

#### A.10.4 $\mu \rightarrow e\gamma$ : Neutral scalar charged fermion loop

### Bibliografia

- [1] J. C. Romao, http://porthos.ist.utl.pt/OneLoop.
- [2] G. Passarino and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B160, 151 (1979).
- [3] A. Denner, Fortschr. Phys. **41**, 307 (1993).
- [4] R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, Comput. Phys. Commun. 64, 345 (1991).
- [5] R. Mertig, http://www.feyncalc.org.
- [6] T. Hahn and M. Perez-Victoria, Comput. Phys. Commun. 118, 153 (1999), [hep-ph/9807565].
- [7] T. Hahn, http://www.feynarts.de/looptools .
- [8] G. J. van Oldenborgh, Comput. Phys. Commun. 66, 1 (1991).