

TÉCNICO LISBOA

Advanced Problems in Electromagnetism

(Version of Tuesday 26th November, 2019)

Jorge Crispim Romão

**Physics Department
2019**

Contents

1 Electrostatical Potential off-axis	9
1.1 Introduction	9
1.2 The correct result for $V(x, y, z)$	9
1.3 Approximations	10
2 Equação de Laplace com Dieléctricos	13
2.1 Example I	13
2.2 Example II	16
2.3 Example III	17
2.4 Example IV	18
2.5 Example V	19
3 Problemas Extra de Electrostática	21
3.1 Introdução	21
3.2 Example I	21
3.3 Example II	22
3.4 Example III	23
4 Duas Esferas Condutoras a Distância Finita	25
4.1 Introdução	25
4.2 O Método das Imagens	25
4.3 O método das imagens no problema das duas esferas	27
4.3.1 As imagens e a sua localização	27
4.3.2 A igualdade dos potenciais	28
4.3.3 O Resultado final para as cargas	29
4.4 O Potencial e o Campo Eléctrico	29
4.4.1 O Potencial	29
4.4.2 O campo eléctrico	29
4.5 Resultados numéricos	30

4.5.1	O Potencial nas esferas de raio R_1 e R_2	30
4.5.2	O Campo Eléctrico e as distribuições de carga nas esferas	32
4.5.3	O <i>poder das pontas</i>	33
4.6	A Força entre as duas esferas	34
4.7	Conclusões	34
5	Force on Spherical Capacitors	35
5.1	Introduction	35
5.2	Calculation of the force using the energy	35
5.3	Calculation of the force using the field \vec{E}	35
5.3.1	The field from the inner conductor	36
5.3.2	The field from the outer spherical surface	36
5.3.3	Calculation of the force	37
5.3.4	Other geometries	37
6	Para onde vai a energia?	39
6.1	Introdução	39
6.2	O circuito RLC em regime transitório	40
6.2.1	$R > R_c$	41
6.2.2	$R = R_c$	41
6.2.3	$R < R_c$	42
6.3	Análise da energia	42
6.3.1	$R > R_c$	43
6.3.2	$R = R_c$	44
6.3.3	$R < R_c$	45
6.4	Que acontece quando $R = 0$?	45
6.5	Exemplos numéricos	46
7	Ampère and Gauss's Laws for non-optimal geometries	49
7.1	Introduction	49
7.2	Ampère Law	49
7.2.1	A square contour	50
7.2.2	A rectangular contour	50
7.3	Gauss Law	52
7.3.1	A cubic surface	52
7.3.2	A rectangular parallelepiped	53
8	Equação de Laplace em Magnetostática	55
8.1	Introdução	55

8.2 Solução Numérica	56
8.3 Solução Analítica e Comparação	57
9 Problemas Extra de Magnetostática	61
9.1 Introdução	61
9.2 Integrais Elípticos Completos	62
9.3 Vector potential of a circular current loop	62
9.4 Magnetic field \vec{B} of a circular current loop derived from \vec{A}	63
9.5 Magnetic field \vec{B} of a circular current loop from Biot-Savart law	64
9.6 Multipole expansion of \vec{A}	65
9.7 On $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ and the magnetic flux	66
9.8 Magnetic field of a finite solenoid	68
9.9 Example VII	70
10 Field \vec{B} of Circular Current Loop	73
10.1 Introduction	73
10.2 Expressions for the fields	73
10.2.1 Setup	73
10.2.2 The Fields	74
10.3 Examples	76
10.3.1 Plots of the \vec{B} field	76
10.3.2 Plots of the field lines	76
11 Mutual inductance of a toroidal coil with a wire	79
11.1 Toroidal coil and straight wire	79
11.2 Toroidal coil and square wire on the axis	80
11.3 Toroidal coil and rectangular wire off-axis	81
11.4 Toroidal coil and off-axis straight wire	81
12 Mutual inductance of a straight wire and a rectangular loop	83
12.1 Introduction	83
12.2 Approximating the rectangular loop by a magnetic dipole	84
12.3 Using the vector potential \vec{A}	85
12.4 Exact calculation	86
12.5 A comment on $\nabla \cdot \vec{A} = 0$	89
12.6 \vec{A} of a straight infinite wire	90
12.6.1 Straight wire and rectangular loop	91
12.6.2 Straight wire on axis and toroid	91
12.6.3 Straight wire off axis and toroid	92

12.6.4 Straight wire at origin but at angle θ with axis and toroid	92
12.6.5 Straight wire off the origin and at angle with axis and toroid	93
13 O “Paradoxo” do disco de Feynman	95
13.1 Introdução	95
13.2 Parte I	96
13.3 Parte II	97
13.4 Parte III	98
13.5 Parte IV	101

Preface

Over the years of teaching electromagnetism I have been collecting many different type of problems that are normally beyond the level of introductory electromagnetism. I collect them here so that this information is not lost in my computer. Some (older ones) are in portuguese, the more recente ones in english.

IST, Fall 2019

Jorge C. Romão

jorge.romao@tecnico.ulisboa.pt

Chapter 1

Electrostatic Potential off-axis

1.1 Introduction

In basic courses in Electromagnetism one chooses, almost all the time, situations with an high degree of symmetry in order to make possible to do the calculations. An example in a charged ring. Consider a charged ring of radius R charged uniformly with total charge Q placed in the plane y and with its center at the origin. Then one asks for the electrostatic potential at a point P on the symmetry axis at the distance z from the origin. This is trivially obtained, as all the points on the ring are at the same distance from the point P . We have

$$V(0, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (1.1)$$

Now if we ask the electric field \vec{E} , most students will say, correctly, that

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} V(0, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{[R^2 + z^2]^{3/2}} \quad (1.2)$$

If asked about E_x and E_y most will also say that they vanish at P , but many will say incorrectly that is because $V(0, 0, z)$ does not depend on x, y and not using symmetry arguments. That they are wrong can easily be seen if we consider an half-ring with charge Q placed in the xy plane with center at the origin, but starting at $(R, 0, 0)$ and ending at $(-R, 0, 0)$. If we calculate the potential we again obtain

$$V(0, 0, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (1.3)$$

but now we know that at point P , we have, using symmetry, that $E_x = 0$ but $E_y \neq 0$.

1.2 The correct result for $V(x, y, z)$

We will try to clarify the points above by going off the symmetry axis. We first consider the full ring. The expression for the potential at a point $P(x, y, z)$ is

$$V^{\text{Full}}(x, y, z) = \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + z^2}}$$

$$= \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} V^{\text{Half}}(x, y, z) &= \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0} \int_0^\pi d\varphi \frac{1}{\sqrt{(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + z^2}} \\ &= \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.3 Approximations

The expressions in the last section are too complicated. If we are near the axis, $x, y \ll z, R$, we can expand the integrand and get information on the dependence of the potential near the z axis. We have

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &\equiv \frac{1}{\sqrt{(x - R \cos \varphi)^2 + (y - R \sin \varphi)^2 + z^2}} \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + x \frac{R \cos \varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + y \frac{R \sin \varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + xy \frac{3R^2 \cos \varphi \sin \varphi}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \\ &\quad + x^2 \frac{3R^2 \cos 2\varphi + R^2 - 2z^2}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} + y^2 \frac{-3R^2 \cos 2\varphi + R^2 - 2z^2}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned} \quad (1.6)$$

where we have neglected higher order terms as we want to expand around $x = y = 0$. Now we integrate first the full ring. We get

$$\int_0^{2\pi} d\varphi f(x, y, z) = \frac{2\pi}{\sqrt{R^2 + z^2}} + x^2 \frac{\pi(R^2 - 2z^2)}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} + y^2 \frac{\pi(R^2 - 2z^2)}{2(R^2 + z^2)^{5/2}} \quad (1.7)$$

For the half-ring we obtain

$$\int_0^\pi d\varphi f(x, y, z) = \frac{\pi}{\sqrt{R^2 + z^2}} + y \frac{2R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + x^2 \frac{\pi(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} + y^2 \frac{\pi(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} \quad (1.8)$$

Putting everything together we get

$$V^{\text{Full}}(x, y, z) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + x^2 \frac{(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} + y^2 \frac{(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (1.9)$$

and

$$V^{\text{Half}}(x, y, z) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} + y \frac{2R}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} + x^2 \frac{(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} + y^2 \frac{(R^2 - 2z^2)}{4(R^2 + z^2)^{5/2}} \right] \quad (1.10)$$

Now we can check that at point $P(0, 0, z)$ we have for the full ring

$$E_x = - \left. \frac{\partial V^{\text{Full}}}{\partial x} \right|_P = 0, \quad E_y = - \left. \frac{\partial V^{\text{Full}}}{\partial y} \right|_P = 0 \quad (1.11)$$

and for the half ring

$$E_x = - \frac{\partial V^{\text{Half}}}{\partial x} \Big|_P = 0, \quad E_y = - \frac{\partial V^{\text{Half}}}{\partial y} \Big|_P = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2R}{\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.12)$$

showing that in this case the electric field component E_y at P has a negative component while $E_x = 0$ as we could guess from the symmetry.

Chapter 2

Equação de Laplace com Dieléctricos

Vamos estudar as soluções da equação de Laplace num condensador plano com dois dieléctricos. Vamos ver que em casos mais complicados que os apresentados no livro de texto [1] no Exemplo 1.18 (página 55), as linhas de campo de \vec{E} deixam de ser perpendiculares aos dois condutores, mesmo admitindo condensadores infinitos. Para ver isto basta considerar situações só ligeiramente mais complicadas. As fronteiras entre os dois dieléctricos que estamos a pensar são as apresentadas na Fig. 2.1:

As fonteiras a) e b) foram consideradas no Exemplo 1.18, conduzindo sempre a campos perpendiculares aos condutores. Vimos que a situação b) implicava que as cargas se iam redistribuir para que as condições na fronteira dos dieléctricos fossem satisfeitas. No entanto os campos continuavam a ser perpendiculares aos condutores. O mesmo raciocínio aplicado aos casos c) e d) mostra que não é possível satisfazer as condições fronteira com campos perpendiculares aos condutores. Que fazer então para determinar a solução? A via analítica, embora possível, é complicada, pelo que vamos usar métodos numéricos que desenvolveremos na forma de problemas.

2.1 Example I

Na secção 1.6.5 e em particular no Exemplo 1.15 (página 44) discutiu-se a implementação da solução numérica da equação de Laplace em condutores no vazio. O resultado central, para problemas a duas dimensões, é dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (2.1)$$

onde o significado dos números está indicado na Fig. 2.2.

Quando se introduzem dieléctricos a situação pode complicar-se. Quando temos só um dieléctrico a situação é como no vazio com a substituição $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. No entanto quando temos dois (ou mais) dieléctricos com fronteiras entre eles o problema é mais complicado.

- Considere a situação representada na Fig. 2.3, onde os eixos dos x e y estão definidos

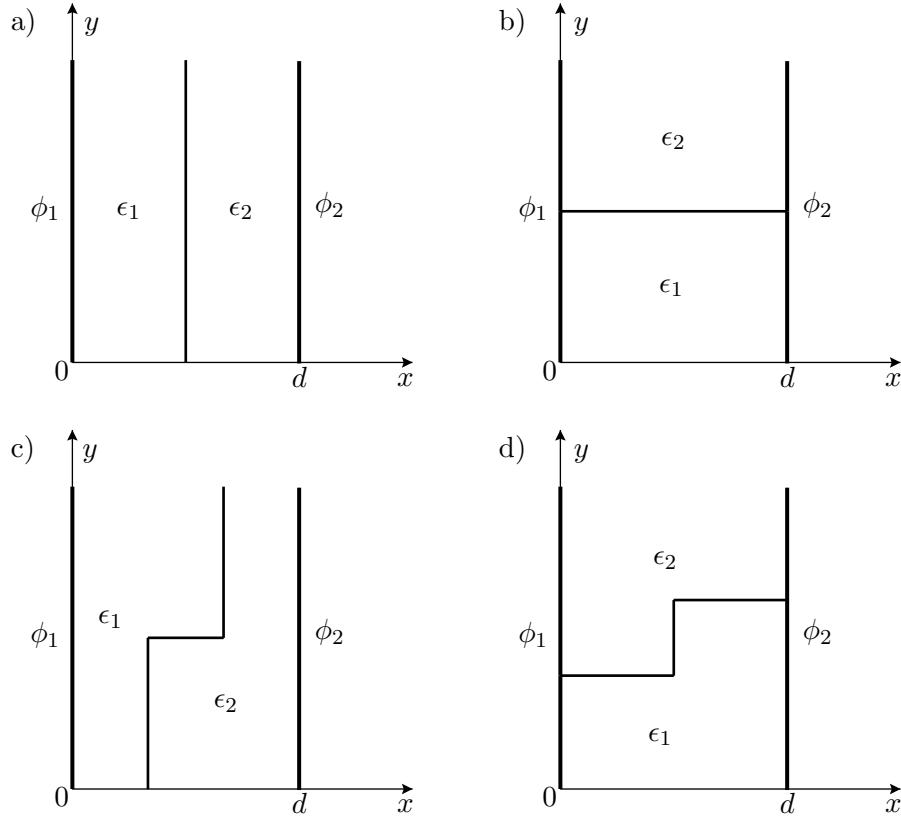


Figure 2.1: Tipos de Fronteira: a) Vertical, b) Horizontal, c) Escada Vertical, d) Escada Horizontal

como na Fig. 2.1. Use $\epsilon_1 E_x(1) = \epsilon_2 E_x(2)$ e $E_y(3) = E_y(4)$ para mostrar que o potencial no ponto P deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} \left(\frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_1 + \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \right) \quad (2.2)$$

b) Considere agora a situação representada na Fig. 2.4. Use agora $E_x(1) = E_x(2)$ e $\epsilon_1 E_y(3) = \epsilon_2 E_y(4)$ para mostrar que o potencial no ponto P deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{4} \left(\phi_1 + \phi_2 + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_3 + \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \phi_4 \right) \quad (2.3)$$

c) Considere agora a situação representada na Fig. 2.5. Mostre que o potencial no ponto P deve ser dado por

$$\phi_P = \frac{1}{3\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \phi_1 + \epsilon_1 \phi_2 + \epsilon_1 \phi_3 + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \phi_4 \right) \quad (2.4)$$

d) Use os resultados anteriores para mostrar que em geral o potencial no ponto P se

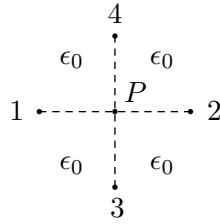


Figure 2.2: Potencial (aproximado) no ponto P como média de quatro pontos equidistantes no vazio.

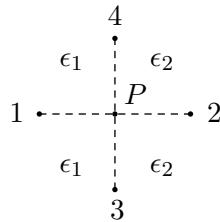


Figure 2.3: Potencial no ponto P na separação (vertical) entre dois dieléctricos.

pode escrever como

$$\phi_P = \frac{1}{W} (w_1\phi_1 + w_2\phi_2 + w_3\phi_3 + w_4\phi_4) \quad (2.5)$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^4 w_i \quad (2.6)$$

e os pesos w_i são definidos da forma seguinte:

$$\begin{cases} w_i = \epsilon_1 & \text{Se } i \text{ no meio com } \epsilon_1 \\ w_i = \epsilon_2 & \text{Se } i \text{ no meio com } \epsilon_2 \\ w_i = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} & \text{Se } i \text{ na fronteira entre os dois meios} \end{cases} \quad (2.7)$$

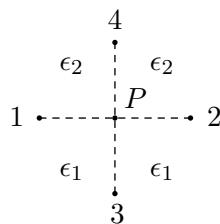


Figure 2.4: Potencial no ponto P na separação (horizontal) entre dois dieléctricos.

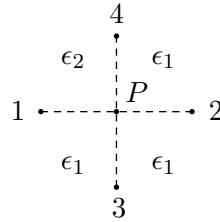


Figure 2.5: Potencial no ponto P na separação (horizontal) entre dois dieléctricos.

2.2 Example II

Estamos agora em posição de resolver numericamente os exemplos de fronteira vertical e horizontal apresentados no livro [1] no Exemplo 1.18 (página 55). Considere que $\phi_1 = 100$ V e $\phi_2 = 0$ V. Considere ainda $x \in [0, 1]$ e $y \in [0, 1]$.

- Para reproduzir as condições dum condensador infinito force $\phi(x, 0)$ e $\phi(x, 1)$ a tomar os valores que o potencial tomaria se o condensador fosse de facto infinito segundo o eixo dos y . Quais são esses valores?
- Resolva numericamente a equação de Laplace para o caso da Fig. 2.1 a) (fronteira vertical) e mostre que as linhas de campo são de facto perpendiculares aos condutores, isto é paralelas ao eixo do x . Reproduza os resultados da Fig. 2.6.

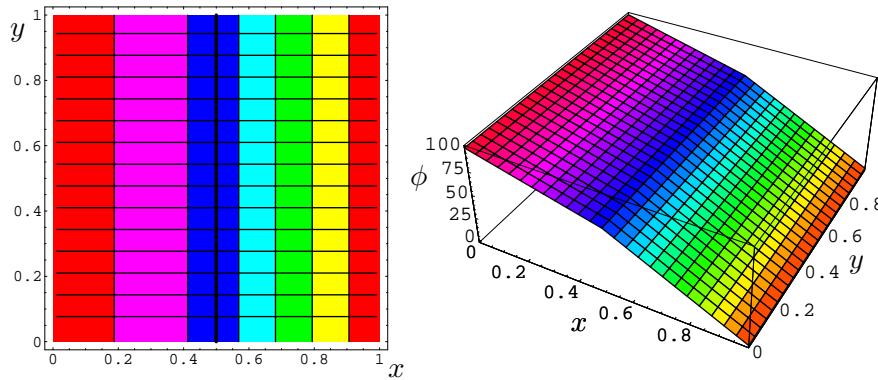


Figure 2.6: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

- Mostre que a densidade de carga à superfície do condutor ao potencial ϕ_1 é uniforme. Para isso notar que

$$\sigma = -\epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=0} . \quad (2.8)$$

Reproduza o gráfico da Fig. 2.7.

- Considere agora a fronteira horizontal da Fig. 2.1 b). Repita as alíneas a) e b) mostrando que agora se obtém a situação da Fig. 2.8 e da Fig. 2.9.
- Considere agora um dieléctrico com permitividade muito elevada, $\epsilon_1 = 100 \epsilon_0$, no caso da fronteira vertical (Fig. 2.1 a). Verifique que se aproxima dum condutor. Reproduza

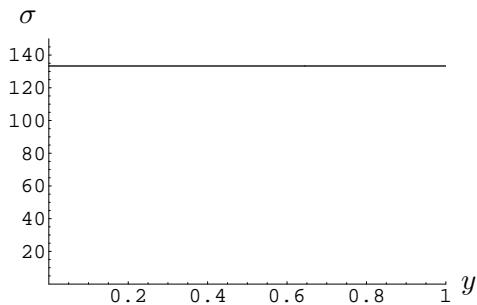


Figure 2.7: σ no condutor 1.

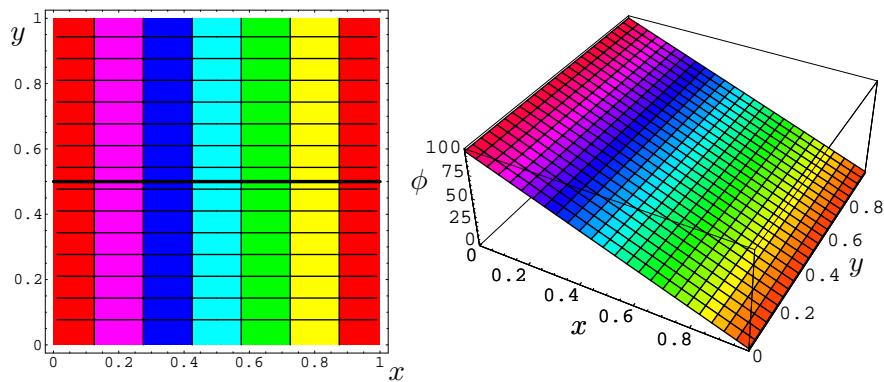


Figure 2.8: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

a Fig. 2.10.

2.3 Example III

Vamos agora estudar agora a fronteira em escada vertical da Fig. 2.1 c).

a) Refaça as alíneas a) e b) do problema anterior para esta fronteira. Verifique que as linhas de campo já não são perpendiculares aos planos condutores. Mostre que se obtém a situação da Fig. 2.11.

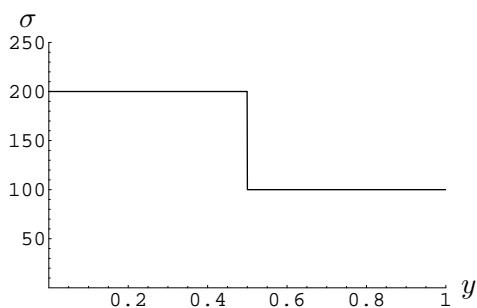


Figure 2.9: σ no condutor 1, para fronteira horizontal entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

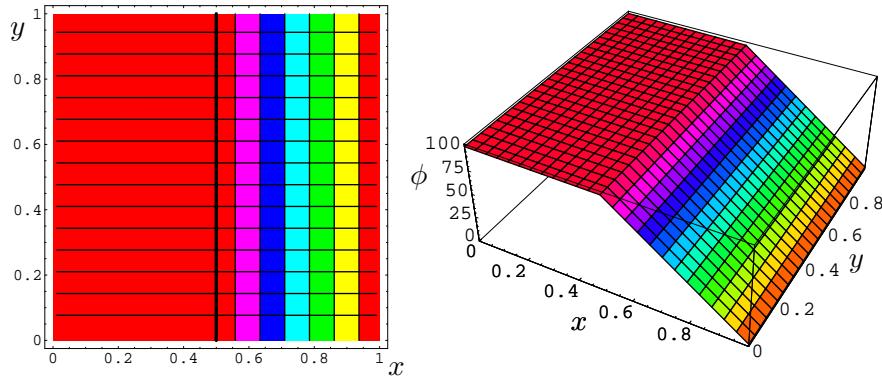


Figure 2.10: Fronteira vertical entre meios com $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

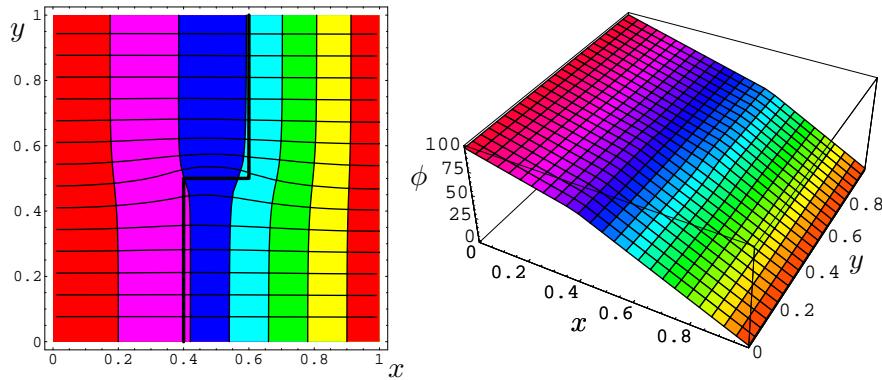


Figure 2.11: Fronteira em escada vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

- b) Determine a densidade de carga superficial no condutor ao potencial ϕ_1 . Mostre que se obtém a situação da Fig. 2.12, indicando uma variação do campo ao longo do condutor.
- c) Tome $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$ e compare com os resultados do problema anterior.
- d) Calcule numericamente o campo \vec{E} ao longo da fronteira e verifique com que aproximação as condições na fronteira são satisfeitas. Veja em que medida o tamanho da grelha é importante.

2.4 Example IV

Vamos agora estudar agora a fronteira em escada horizontal da Fig. 2.1 d).

- a) Refaça as alíneas a) e b) do problema II para esta fronteira. Verifique que as linhas de campo já não são perpendiculares aos planos condutores. Mostre que se obtém a situação da Fig. 2.13. b) Determine a densidade de carga superficial no condutor ao potencial ϕ_1 . Mostre que se obtém a situação da Fig. 2.14, o que mostra que as densidades deixaram de ser constantes ao longo do condutor em cada lado da fronteira em $x = 0$.
- c) Tome $\epsilon_1 = 100\epsilon_0$ e compare com os resultados do problema anterior.

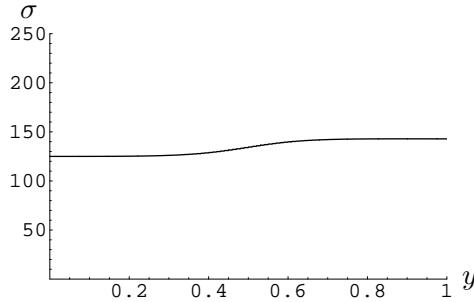


Figure 2.12: σ no condutor 1, para fronteira em escada vertical entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

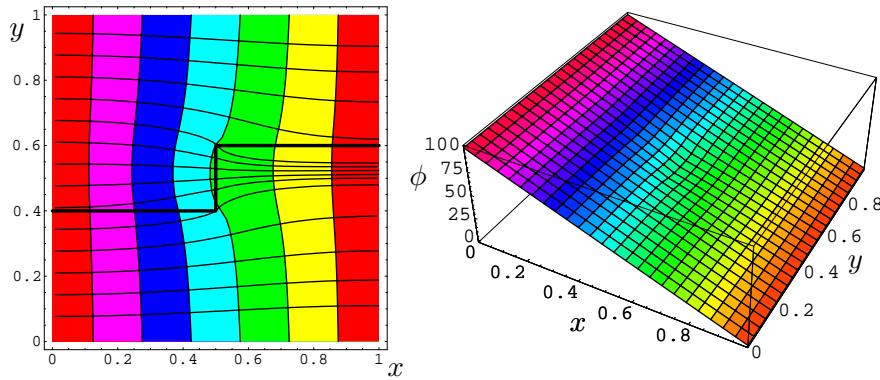


Figure 2.13: Fronteira em escada horizontal entre meios com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

2.5 Example V

Estamos agora em posição de estudar fronteiras mais complicadas, tais como a da Fig. 2.15.

- Utilize os métodos dos problemas anteriores para resolver este problema. Experimente para vários valores de ϵ_i e para várias dimensões do domínio. Reproduza os resultados da Fig. 2.16.
- Verifique as condições na fronteira.
- Estude o caso de $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$. Que conclui?
- Estude outros casos de fronteiras. Em particular estude o caso em que a fronteira

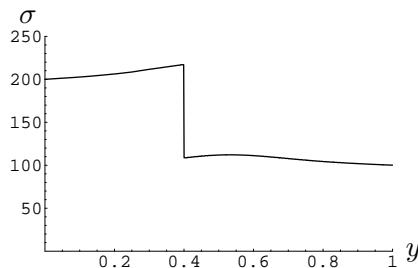


Figure 2.14: σ no condutor 1, para fronteira em escada horizontal com $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

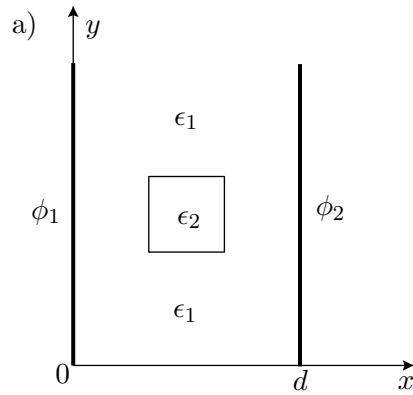
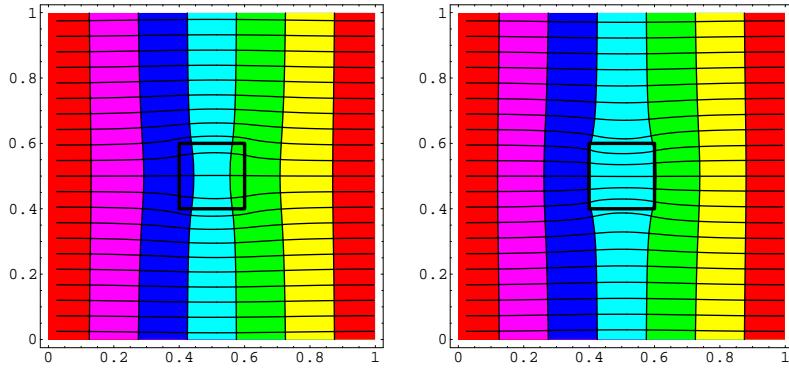
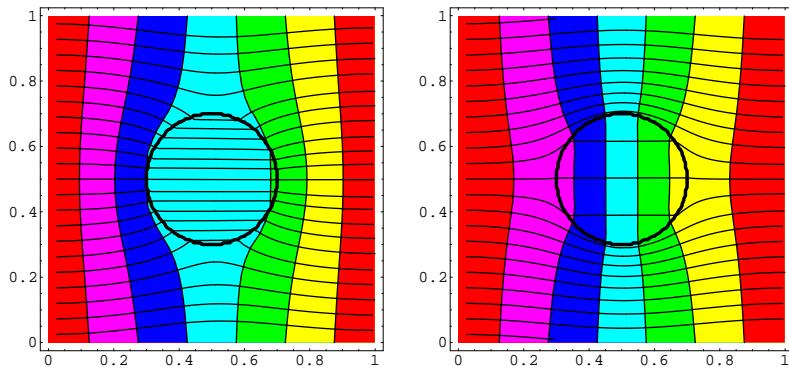


Figure 2.15: Novo tipo de fronteira.

Figure 2.16: a) $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$, b) $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 2\epsilon_0$.

é uma circunferência. Verifique que obtém os resultados da Fig. 2.17. Compare com a

Figure 2.17: a) $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\epsilon_2 = 5\epsilon_0$, b) $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$.

discussão do Exemplo 1.19 da página 57. Verifique que o campo é uniforme no interior do círculo.

Chapter 3

Problemas Extra de Electrostática

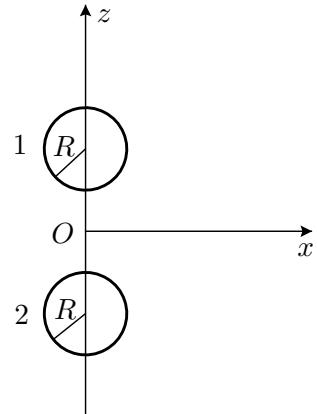
3.1 Introdução

Recentemente deparei com o seguinte problema de electrostática, no âmbito dum curso elementar de electromagnetismo.

Considere duas esferas de raio R com centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0, 0, 2R)$ e $(0, 0, -2R)$, respectivamente, conforme indicado na figura. A esfera 1 não é condutora e está carregada uniformemente com carga total $Q > 0$. A esfera 2 é condutora e está carregada, com carga total $-Q$. Determine o potencial sobre o eixo dos z .

Como se tratava dum curso elementar, o que se deveria querer era que os alunos usassem o princípio da sobreposição, juntamente com a lei de Gauss para as duas esferas.

No entanto, isto é incorrecto e o problema é muito mais complicado. De facto, enquanto que a esfera 1 conserva a sua distribuição esférica mesmo em presença de outras cargas, isso não acontece com a esfera condutora. Assim, na presença da esfera 1 as cargas no condutor vão-se redistribuir na superfície, mantendo, claro, o valor total $-Q$. Assim, pensei que este problema era um bom desafio e organizei uma série de problemas encadeados que irão conduzir à solução. De facto chegaremos mesmo à solução geral em todo o espaço, fora do eixo dos z .



3.2 Example I

Considere duas esferas de raio R com centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0, 0, 4R)$ e $(0, 0, 0)$, respectivamente, conforme indicado na figura. A esfera 1 não é condutora e está carregada uniformemente com carga total $Q > 0$. A esfera 2 é condutora e está ao potencial zero.

- a) Calcule o potencial num ponto genérico do eixo dos z , isto é, $\phi(0, 0, z)$. **Sugestão:** utilize o

método das imagens (ver Ref.[1] pág. 38).

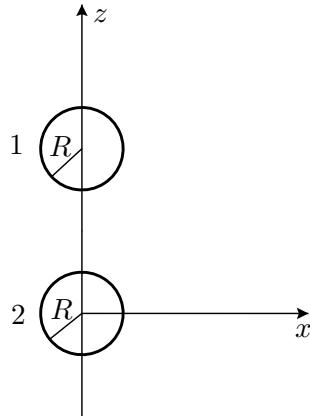


Figure 3.1: Duas Esferas

- b) Verifique que a esfera condutora é uma equipotencial.
- c) Determine a densidade de carga à superfície da esfera condutora, σ_2 . Verifique que não é uniforme mas que se tem

$$\int_{S_2} \sigma_2 dS = -\frac{1}{4} Q$$

Comente.

3.3 Example II

Considere agora que as esferas têm centros sobre o eixo dos z em pontos de coordenadas $(0, 0, 2R)$ e $(0, 0, -2R)$, respectivamente, conforme indicado na figura. A esfera condutora 2 está agora

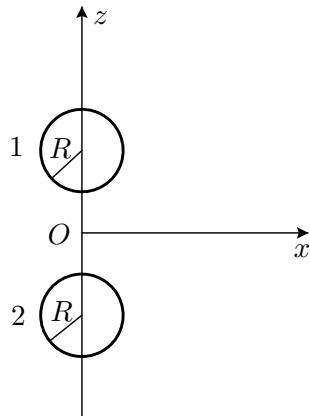


Figure 3.2: Duas esferas

carregada com carga total $-Q$, como no problema inicial.

- a) Calcule o potencial num ponto genérico do eixo dos z , isto é, $\phi(0, 0, z)$ para $z > 2R$. **Sugestão:** utilize os resultados do problema anterior.
- b) Calcule $\phi(0, 0, z)$ para $z \gg R$ e determine o momento dipolar da distribuição de cargas.
- c) Calcule o momento dipolar da distribuição a partir da definição

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

e compare com o valor obtido na alínea b). **Sugestão:** Comece por mostrar que se $\sum_i q_i = 0$, então o momento dipolar da distribuição não depende da escolha da origem. Em seguida escolha a origem mais conveniente.

3.4 Example III

Considere a situação do problema II.

- a) Usando o resultado (ver o livro de J.D. Jackson[2])

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \gamma)$$

onde γ é o ângulo entre \vec{r} e \vec{r}' , $r_<$ ($r_>$) é o menor (maior) valor entre $|\vec{r}|$ e $|\vec{r}'|$ e $P_l(x)$ são os polinómios de Legendre de grau l , mostre que para $|z| > 2R$,

$$\phi(0, 0, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_l}{z^{l+1}}$$

Determine os coeficientes C_l . Verifique que

$$C_0 = 0 \quad , \quad C_1 = \frac{QR}{4\pi\epsilon_0} \frac{63}{16}$$

Comente.

- b) Sabendo que a solução geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-1(l+1)} \right) P_l(\cos \theta)$$

se pode obter a partir da solução para $\theta = 0$ (eixo dos z)

$$\phi(r, \theta = 0) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-1(l+1)} \right)$$

multiplicando por $P_l(\cos \theta)$ (ver livro do Jackson), obtenha a solução geral do potencial do problema anterior $\phi(r, \theta)$, válida em todo o espaço, para $r > 2R$.

- c) Use o resultado anterior para determinar o primeiro termo não nulo do potencial sobre o eixo dos x para $x \gg R$. Comente.

d) Use o resultado da alínea b) para mostrar que sobre a esfera condutora e para $r > 2R$ se tem

$$\phi(\alpha) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(2)^l - \frac{1}{4} \left(\frac{-7}{4} \right)^l - \frac{3}{4} (-2)^l}{(5 - 4 \cos \alpha)^{\frac{l+1}{2}}} \right] P_l(\cos \theta)$$

onde

$$\cos \theta = \frac{\cos \alpha - 2}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}$$

e α é o ângulo que dá a posição sobre a esfera conforme indicado na figura seguinte.

e) Some numericamente a série para mostrar que (para $r > 2R$) a esfera condutora tem potencial constante,

$$\phi = -\frac{3}{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Sugestões: Use o **Mathematica** para somar os primeiros 50 termos da série. No **Mathematica** os polinómios de Legendre são representados pela função:

$$P_n(x) = \text{LegendreP}[n, x]$$

f) Generalize o resultado de b) para que possa verificar que o potencial sobre a esfera condutora é constante para pontos sobre a esfera tais que $r < 2R$.

Chapter 4

Duas Esferas Condutoras a Distância Finita

4.1 Introdução

Consideremos o seguinte problema. *Dois condutores esféricos de raios R_1 e R_2 têm os seus centros à distância $r_0 > R_1 + R_2$, conforme indicado na Fig. 4.1. Inicialmente o condutor de raio R_1 tem uma carga Q e o outro está descarregado. Ligam-se os dois condutores por um fio condutor e espera-se que o sistema atinja o equilíbrio electrostático. Pretende-se saber as cargas Q_1 e Q_2 nos condutores de raios R_1 e R_2 , respectivamente, desprezando as cargas no fio que as liga.*

Este problema interessou os *pais* do electromagnetismo, Poisson, Kirchhoff, Thomson e o próprio Maxwell[3]. Vamos aqui apresentar uma solução em termos duma série e usar o

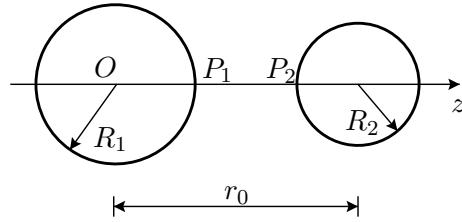


Figure 4.1: Duas esferas condutoras a distância finita e ligadas por um fio condutor.

Mathematica para verificar os resultados.

4.2 O Método das Imagens

Comecemos por recordar o problema duma esfera de raio R ligada à Terra, $V = 0$, na presença duma carga q , conforme indicado na Fig. 4.2. Como se sabe (ver por exemplo a Ref.[1], o potencial para todos os pontos exteriores à esfera é dado pela soma dos potenciais criados pela

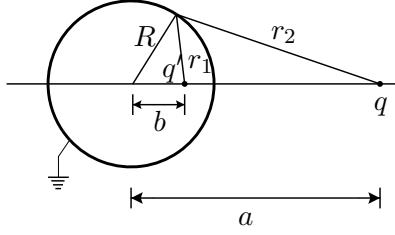


Figure 4.2: Imagem duma carga numa esfera ligada à Terra.

carga q e pela sua imagem q' colocada à distância b do centro da esfera, tais que

$$q' = -q \frac{R}{a}, \quad b = \frac{R^2}{a} \quad (4.1)$$

Usando coordenadas esféricas com centro na esfera e com o eixo dos z na linha que une as cargas, a expressão do potencial válida para $r \geq R$ é

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{r} \left[-\frac{R}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos\theta}} + \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos\theta}} \right] \quad (4.2)$$

que conduz ao potencial nulo quando $r = R$ (ver Ref.[1]. De facto

$$\frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \left(-\frac{R}{ar_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{R} \left(-\frac{R^2}{ar_1} + \frac{R}{r_2} \right) = \frac{q}{R} \left(-\frac{b}{r_1} + \frac{R}{r_2} \right) = 0 \quad (4.3)$$

onde a última igualdade resulta da semelhança dos dois triângulos. Definindo a distribuição de carga sobre a esfera

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(R, \theta) = \frac{q}{4\pi} \left[-\frac{R(R - b \cos\theta)}{(R^2 + b^2 - 2Rb \cos\theta)^{3/2}} + \frac{a(R - a \cos\theta)}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos\theta)^{3/2}} \right] \quad (4.4)$$

podemos calcular a carga total sobre a esfera,

$$\begin{aligned} Q^{\text{esfera}} &= 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \sigma(\theta) \\ &= \frac{q}{2} \frac{R^2}{a} \left[- \int_{-1}^1 dx \frac{R(R - bx)}{(R^2 + a^2 - 2Rbx)^{3/2}} + \int_{-1}^1 dx \frac{a(R - ax)}{(R^2 + a^2 - 2Rax)^{3/2}} \right] \quad (4.5) \\ &= \frac{q}{2} \frac{R^2}{a} \left(-\frac{2}{R} + 0 \right) = -q \frac{R}{a} = q' \end{aligned}$$

que é igual à carga da imagem q' . Na Fig. 4.3 mostramos a densidade de carga, $\sigma(\theta)$, em unidades de q/R^2 em função de θ , para dois casos.

O caso geral da esfera estar a um potencial V arbitrário, é obtido adicionando uma carga na origem da esfera e de valor dado por $q'' = 4\pi\epsilon_0 RV$.

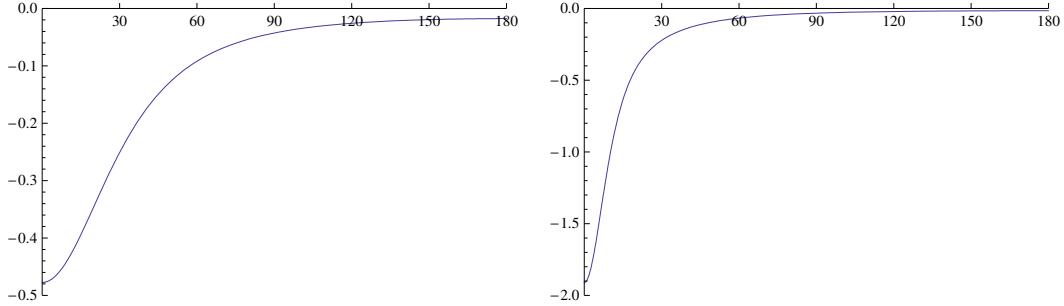


Figure 4.3: Densidade de carga na superfície da esfera, $\sigma(\theta)$, em unidades de q/R^2 em função de $\theta \in [0, 180]$. No gráfico da esquerda $b/R = 0.5$ e $a/R = 2$. No gráfico da direita $b/R = 0.5$ e $a/R = 1.25$.

4.3 O método das imagens no problema das duas esferas

4.3.1 As imagens e a sua localização

Vamos agora usar o método das imagens para resolver o problema das duas esferas. Se as esferas estivessem muito afastadas, o problema era muito fácil (ver [1]),

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}, \quad \text{com} \quad Q_1 + Q_2 = Q \quad (4.6)$$

Vamos então começar por imaginar que colocamos uma carga q_1 no centro da esfera de raio R_1 e uma carga q_2 no centro da esfera de raio R_2 . A carga $q_1 \equiv q_{11}$ vai ter uma imagem na esfera de raio R_2 , que designamos por q_{22} , e a carga $q_2 \equiv q_{21}$ vai ter uma imagem na esfera de raio R_1 que designamos por q_{12} . Com os resultados da secção anterior temos

$$q_{12} = -q_{21} \frac{R_1}{z_{21}}, \quad q_{22} = -q_{11} \frac{R_2}{r_0 - z_{11}} \quad (4.7)$$

onde

$$z_{11} = 0, \quad z_{21} = r_0 \quad (4.8)$$

são as coordenadas das cargas q_{11} e q_{21} no referencial definido na Fig. 4.1. Agora cada uma destas imagens vai dar origem a outra imagem e assim sucessivamente. É fácil de verificar que o resultado final para as imagens dentro da esfera de raio R_1 é

$$q_{1,n+1} = -q_{2,n} \frac{R_1}{z_{2,n}}, \quad z_{1,n+1} = \frac{R_1^2}{z_{2,n}} \quad (4.9)$$

e para as cargas dentro da esfera de raio R_2

$$q_{2,n+1} = -q_{1,n} \frac{R_2}{r_0 - z_{1,n}}, \quad z_{2,n+1} = \frac{R_2^2}{r_0 - z_{1,n}} \quad (4.10)$$

com as condições iniciais

$$q_{11} = q_1, \quad q_{21} = q_2, \quad z_{11} = 0, \quad z_{21} = r_0 \quad (4.11)$$

As cargas finais nas duas esferas deverão ser dadas por

$$Q_1 = \sum_1^{\infty} q_{1,i}, \quad Q_2 = \sum_1^{\infty} q_{2,i}, \quad Q = Q_1 + Q_2 \quad (4.12)$$

4.3.2 A igualdade dos potenciais

Se pensarmos um pouco e olharmos a Eq. (4.12), verificamos que o problema ainda não está bem definido. De facto temos duas quantidades, q_1 e q_2 que não conhecemos e só uma equação que as relaciona,

$$Q = \sum_{i=1}^{\infty} (q_{1,i} + q_{2,i}) \quad (4.13)$$

Mas o enunciado do problema diz-nos que as esferas estão ao mesmo potencial. Assim, usando os pontos P_1 e P_2 da Fig. 4.1 devemos ter

$$\phi(P_1) = \phi(P_2) \quad (4.14)$$

Comecemos por calcular o potencial em P_1 , isto é sobre a esfera de raio R_1 no ponto $P_1 = (0, 0, R_1)$. Obtemos

$$\begin{aligned} \phi(P_1) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}}{R_1 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - R_1} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i+1}}{R_1 - z_{1,i+1}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - R_1} \right] \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

onde a última igualdade resulta do facto de que a carga $q_{1,i+1}$ ser a imagem na esfera de raio R_1 da carga $q_{2,i}$ e o ponto estar sobre a esfera de raio R_1 donde a contribuição para o potencial da soma na Eq. (4.15) é nula.

Da mesma forma sobre em $z = r_0 - R_2$ (sobre a esfera de raio R_2) temos

$$\begin{aligned} \phi(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}}{r_0 - R_2 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i}}{z_{2,i} - (r_0 - R_2)} \right] \\ &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}}{r_0 - R_2 - z_{1,i}} + \frac{q_{2,i+1}}{z_{2,i+1} - r_0 + R_2} \right] \\ &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

e portanto a igualdade dos potenciais diz-nos que

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2} \quad (4.17)$$

4.3.3 O Resultado final para as cargas

Para determinar as cargas q_1 e q_2 , as nossas incógnitas, definimos as cargas *reduzidas*

$$\begin{aligned}\hat{q}_{1,i} &= \frac{q_{1,i}}{q_1}, \quad \text{com} \quad \hat{q}_{1,1} = 1 \\ \hat{q}_{2,i} &= \frac{q_{2,i}}{q_1}, \quad \text{com} \quad \hat{q}_{2,1} = \frac{R_2}{R_1}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Então obtemos

$$q_1 = \frac{Q}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})}, \quad q_2 = q_1 \frac{R_2}{R_1} \quad (4.19)$$

e

$$Q_1 = Q \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_{1,i}}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})}, \quad Q_2 = Q \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \hat{q}_{2,i}}{\sum_{i=1}^{\infty} (\hat{q}_{1,i} + \hat{q}_{2,1})} \quad (4.20)$$

4.4 O Potencial e o Campo Eléctrico

4.4.1 O Potencial

Consideremos um ponto genérico no referencial definido na Fig. 4.1. Em coordenadas esféricas o potencial só depende de r e θ e é dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}}{\sqrt{r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta}} + \frac{q_{2,i}}{\sqrt{r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta}} \right] \quad (4.21)$$

4.4.2 O campo eléctrico

O campo eléctrico obtém-se facilmente em coordenadas esféricas com o resultado ($E_\varphi = 0$),

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}(r - z_{1,i} \cos \theta)}{\left(r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta \right)^{3/2}} + \frac{q_{2,i}(r - z_{2,i} \cos \theta)}{\left(r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta \right)^{3/2}} \right] \quad (4.22)$$

e

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{q_{1,i}z_{1,i} \sin \theta}{\left(r^2 + z_{1,i}^2 - 2rz_{1,i} \cos \theta \right)^{3/2}} + \frac{q_{2,i}z_{2,i} \sin \theta}{\left(r^2 + z_{2,i}^2 - 2rz_{2,i} \cos \theta \right)^{3/2}} \right] \quad (4.23)$$

4.5 Resultados numéricos

4.5.1 O Potencial nas esferas de raio R_1 e R_2

O potencial sob a esfera de raio R_1 calcula-se facilmente fazendo $r = R_1$ na Eq. (4.21). Para isso usamos o seguinte programa de **Mathematica**

```
(***** Programa para calcular as cargas nas esferas *****)
Remove["Global`*"]
(* Input Data *)
k1=0.9      (* Constante para o potencial: Carga em pC e distâncias em cm *)
k2=90       (* Constante para o campo: Carga em pC e distâncias em cm *)
k3= 1./(36 Pi)  (* Constante para a densidade de carga vir em nC/m^2 *)

Q=10        (* pC = pico Coulomb *)
q1hat=1
r0=4.       (* cm *)
R1=2         (* cm *)
R2=1         (* cm *)
x1=R1/r0
x2=R2/r0
nmax=10

(* Calculo das imagens. As distancias estao em unidades de r0 *)

z1=Function[n,If[n>1,x1^2/z2[n-1],0]]
z2=Function[n,If[n>1,1-x2^2/(1-z1[n-1]),1]]

q1aux=Function[n,If[n>1,-q2aux[n-1]*x1/z2[n-1],q1hat]]
q2aux=Function[n,If[n>1,-q1aux[n-1]*x2/(1-z1[n-1]),q1hat*x2/x1]]

(* Calculo das cargas Q1 e Q2 *)

Sum1=Sum[q1aux[n],{n,1,nmax}]
Sum2=Sum[q2aux[n],{n,1,nmax}]

Q1=Q Sum1/(Sum1+Sum2)
Q2=Q Sum2/(Sum1+Sum2)

q1=Function[n,Q/(Sum1+Sum2) q1aux[n]]
q2=Function[n,Q/(Sum1+Sum2) q2aux[n]]
```

```
(* Potencial e Campo Electrico. Coordenadas Esfericas na primeira esfera *)

V=Function[{r,teta},Sum[k1*q1[n]/Sqrt[r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]* \
Cos[teta]] \ 
+k1*q2[n]/Sqrt[r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]* \
Cos[teta]],{n,1,nmax}]];

plot1=Plot[V[R1, teta], {teta, 0, Pi}, PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 5}}, \
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic}, \
AxesLabel -> {"\[Theta]", \
"V(\!\(*SubscriptBox[\\"R\", \"1\"]\)) (Volt)"}]
```

Com este programa é fácil de mostrar que o potencial é constante sobre a esfera de raio R_1 , basta colocar $r = R_1$ e variar $\theta \in [0, \pi]$. Para a esfera de raio R_2 temos de escrever as coordenadas sobre a esfera em termos das variáveis (r, θ) . Da Fig. 4.4 resulta,

$$r = \sqrt{r_0^2 + R_2^2 + 2r_0R_2 \cos \alpha}, \quad \theta = \arctan \left(\frac{R_2 \sin \alpha}{r_0 + R_2 \cos \alpha} \right) \quad (4.24)$$

e variar agora $\alpha \in [0, \pi]$.

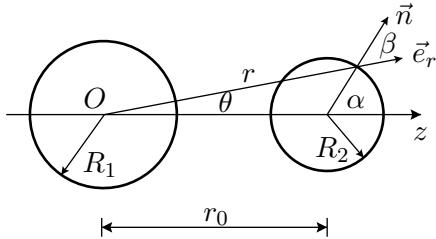


Figure 4.4: Definição das coordenadas sobre a esfera de raio R_2 .

```

***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) *****
(* Potencial na Esfera 2  *)

V2=Function[teta2,V[Sqrt[R2^2+r0^2+2*r0*R2*Cos[teta2]], \
ArcTan[R2*Sin[teta2]/(r0+R2*Cos[teta2])]]]

plot2=Plot[V2[alpha], {alpha, 0, Pi}, PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 5}}]
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
AxesLabel -> {"\[Alpha]",
"V(\!\!(\!*SubscriptBox[\\"R\", \"2\"]\!)) (Volt)"}]
```

Os resultados estão na Fig. 4.5 para $Q = 10$ pC, $r_0 = 4$ cm, $R_1 = 2$ cm e $R_2 = 1$ cm.

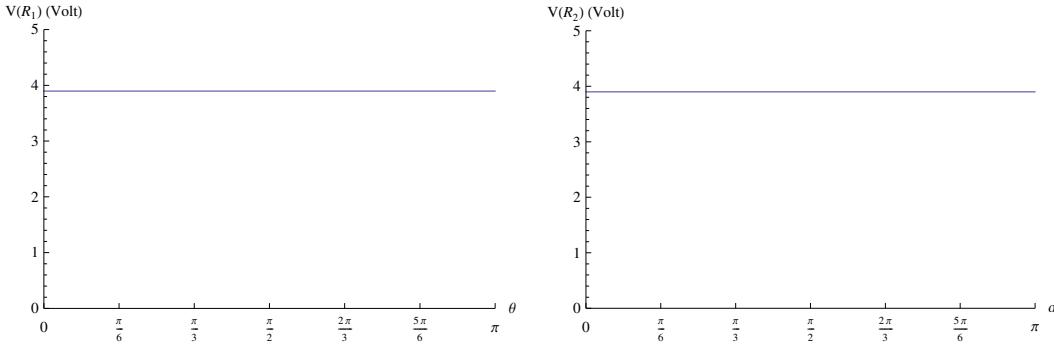


Figure 4.5: Potenciais sobre as esferas. No painel esquerdo para a esfera de raio R_1 e no painel direito para a esfera de raio R_2 . As figuras correspondem a $Q = 10 \text{ pC}$, $r_0 = 4 \text{ cm}$, $R_1 = 2 \text{ cm}$ e $R_2 = 1 \text{ cm}$.

4.5.2 O Campo Eléctrico e as distribuições de carga nas esferas

As distribuições de carga nas esferas podem ser obtidas facilmente a partir da definição,

$$\sigma = \epsilon_0 E_r \quad (4.25)$$

Para a esfera de raio R_1 usamos o programa seguinte do Mathematica,

```
(***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) ****)
(* Distribuição de carga na primeira esfera *)

Er=Function[{r,teta},Sum[k2*q1[n]*(r-r0*z1[n]*Cos[teta])/ \
(r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]*Cos[teta])^(3/2) \
+k2*q2[n]*(r-r0*z2[n]*Cos[teta])/ \
(r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]*Cos[teta])^(3/2),{n,1,nmax}]];

Eteta=Function[{r,teta},Sum[k2*q1[n]*r0*z1[n]*Sin[teta]/ \
(r^2+(z1[n]*r0)^2-2*r*r0*z1[n]*Cos[teta])^(3/2) \
+k2*q2[n]*r0*z2[n]*Sin[teta]/ \
(r^2+(z2[n]*r0)^2-2*r*r0*z2[n]*Cos[teta])^(3/2),{n,1,nmax}]];

Sigma1=Function[teta,k3*Er[R1,teta]];

plot3 = Plot[Sigma1[teta], {teta, 0, Pi},
PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 2}},
Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
AxesLabel -> {"\[Theta]",
"\[Sigma] (\!\!\(\!*\!SubscriptBox[\\"R\", \
\"1\"]\)) (nC/\!\!\(\!*\!SuperscriptBox[\\"m\", \
\"2\"]\))"}]
```

Para a segunda esfera temos que usar a Eq. (4.24) para relacionar as coordenadas em relação ao referencial da Fig. 4.1. Além disso, a direcção normal à segunda esfera é

$$\vec{n} = \cos \beta \vec{e}_r + \sin \beta \vec{e}_\theta, \quad \beta = \alpha - \theta \quad (4.26)$$

pelo que a componente normal do campo será

$$E_n = E_r \cos \beta + E_\theta \sin \beta \quad (4.27)$$

Usamos o seguinte programa

```
(***** Programa para calcular as cargas nas esferas (cont) ****)
(* Distribuicao de carga na segunda esfera *)

Sigma2=Function[alfa,r=Sqrt[R2^2+r0^2+2*r0*R2*Cos[alfa]];
  teta=ArcTan[R2*Sin[alfa]/(r0+R2*Cos[alfa])];
  beta=alfa-teta; k3*(Er[r,teta]*Cos[beta]+Eteta[r,teta]*Sin[beta])];

plot4 = Plot[Sigma2[alfa], {alfa, 0, Pi},
  PlotRange -> {{0, Pi}, {0, 3}},
  Ticks -> {{0, Pi/6, Pi/3, Pi/2, 2 Pi/3, 5 Pi/6, Pi}, Automatic},
  AxesLabel -> {"\[Alpha]",
    "\[Sigma] (\!\!(*SubscriptBox[\\"R\", \
\"
2\"]) (nC/\!\!(*SuperscriptBox[\\"m\", \
\"2\"])\))"}];
```

e obtemos o resultado da Fig. 4.6. Podemos ainda verificar que estas distribuições reproduzem

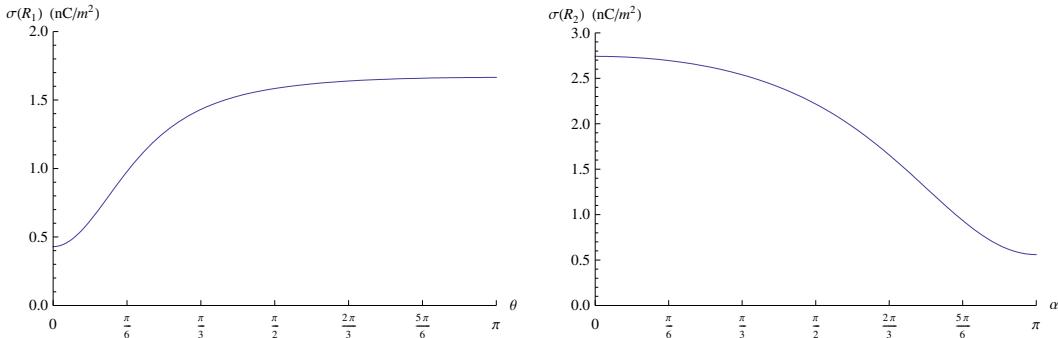


Figure 4.6: Densidade de carga nas esferas de raio R_1 (R_2) no painel esquerdo (direito), para as condições da Fig. 4.5.

as cargas totais nas esferas, isto é,

$$Q_1 = 2\pi R_1^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sigma_1(\theta), \quad Q_2 = 2\pi R_2^2 \int_0^\pi d\alpha \sin \alpha \sigma_2(\alpha) \quad (4.28)$$

onde usámos a simetria azimutal do problema.

4.5.3 O poder das pontas

Este exemplo é por vezes utilizado para mostrar que o campo eléctrico é muito intenso nas *pontas*, isto é em regiões com um raio de curvatura muito pequeno. Podemos mostrar isso escolhendo as seguintes quantidades

$$Q = 10 \text{ pC}, \quad R_1 = 2 \text{ cm}, \quad R_2 = 0.01 \text{ cm}, \quad r_0 = 2.15 \text{ cm} \quad (4.29)$$

Obtemos então a situação da Fig. 4.7, onde vemos que o campo \vec{E} é cerca de 15 vezes mais intenso à superfície da esfera de raio R_2 na *ponta*, isto é para $\alpha = 0$, do que na esfera de raio R_1 .

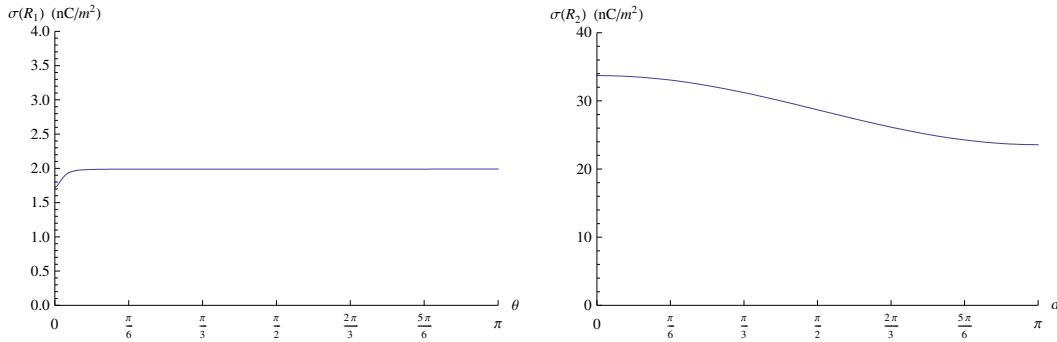


Figure 4.7: Densidade de carga nas esferas de raio R_1 (R_2) no painel esquerdo (direito), para as condições da Eq. (4.29). Notar as diferentes escalas nas duas figuras.

4.6 A Força entre as duas esferas

Podemos finalmente calcular a força resultante entre as duas esferas. A força será necessariamente repulsiva e dirigida segundo o eixo dos z . Obtemos

$$F_z = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,n}q_{2,m}}{(z_{1,n} - z_{2,m})^2} \quad (4.30)$$

Para as condições da Fig. 4.5 obtemos, com a ajuda do **Mathematica**, que $F_z = 0.87$ pN.

4.7 Conclusões

Mostrámos, num exemplo não trivial, como o uso do método das imagens combinado com as modernas possibilidades do programa **Mathematica** podem levar a resoluções simples para problemas muito complexos.

Chapter 5

Force on Spherical Capacitors

5.1 Introduction

We review the calculation of the force on the external plate of a spherical capacitor, using two methods, first using the energy and then directly from the electric field.

Consider a spherical capacitor with radius R_1 (internal) and R_2 (external). The charge on the inner conductor is $Q > 0$. The capacity of such system can be written as

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.1)$$

5.2 Calculation of the force using the energy

The easiest way to determine the force acting on the external spherical surface is using the energy. For this system the electrostatic energy is given by,

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.2)$$

The force is then

$$F_r = -\frac{dU_E}{dR_2} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2^2} \quad (5.3)$$

giving an attractive force between the two plates.

5.3 Calculation of the force using the field \vec{E}

To usual law for the electrostatic force, $\vec{F} = q\vec{E}$, we need to know the electric field. Let us evaluate the field at the north pole of the external spherical conductor. This has two origins, the field from the inner conductor and that from the external spherical surface.

5.3.1 The field from the inner conductor

The field from the inner conductor can be easily obtained from Gauss's law and the spherical symmetry of the problem. We get, for $R_1 < r < R_2$,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (5.4)$$

and therefore the field at the north pole from the inner conductor is

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \quad (5.5)$$

5.3.2 The field from the outer spherical surface

Now we turn to the calculation of the field due to a spherical surface of radius R charged with surface density

$$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2} \quad (5.6)$$

where we have assumed that the total charge is negative, as in the spherical capacitor we are studying. We will evaluate the field at the north pole. At first sight this seems to be problematic as the north pole is inside the charge distribution. However it turns out that it does not diverge.

From symmetry considerations only the E_z will be non-zero. The situation is described in Fig. 5.1.

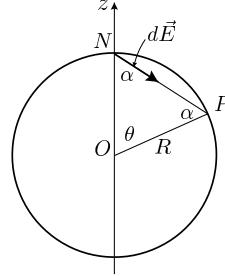


Figure 5.1: Geometry for the calculation of the electric field.

We get

$$dE_z = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 d^2} \cos \alpha \quad (5.7)$$

where

$$d = \overline{NP} = 2R \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.8)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \sin \frac{\theta}{2} \quad (5.9)$$

$$dq' = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2R^2 \sigma \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta d\varphi \quad (5.10)$$

Using these relations we get

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta d\varphi \quad (5.11)$$

showing that it is a well behaved function at $\theta = 0$. Integrating on the spherical surface we get

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\pi d\theta \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

We see that it has the opposite direction of the field from the inner conductor in Eq. (5.5) and it is reduced by a factor of $1/2$. Therefore the total electric field at the north pole of the outer spherical surface is

$$E_z = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \quad (5.13)$$

We should note, that if the point N was just inside the spherical surface we would get zero, and if it was just outside one would get

$$E_z = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \quad (5.14)$$

without the $1/2$ factor.

5.3.3 Calculation of the force

Assuming now that this electric field acts on the charge $-Q$ of the outer spherical surface we get

$$F_r = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} \quad (5.15)$$

in agreement with Eq. (5.3).

5.3.4 Other geometries

It is clear that in the parallel plate capacitor the field from the upper surface at a point on it vanishes, so the total electric field at the upper conductor comes from the lower plate.

For the cylindrical capacitor again we have a factor $1/2$. The calculation is as before. We can still use Fig. 5.1 with a line charge density λ and θ being the azimuthal angle.

Chapter 6

Para onde vai a energia?

6.1 Introdução

Um problema interessante em electrostática é o seguinte (ver Problemas 1.22 e 1.37 na Ref.[1])¹

Dois condensadores de capacidades C_1 e C_2 , um carregado, outro não, são ligados em paralelo.

1) Mostre que no equilíbrio se verificam as seguintes relações:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \frac{Q_2}{Q} = \frac{C_2}{C_1 + C_2},$$

onde Q é a carga inicial do condensador carregado e Q_1 e Q_2 as cargas finais de cada um deles.

2) Mostre que a energia final armazenada no sistema é menor que a energia inicial e deduza uma expressão para a diferença entre as duas energias em termos de Q e de C_1 e C_2 . Considere que o fio que liga os dois condensadores tem resistência R . Mostre que a diferença de energia é exactamente igual à energia dissipada por efeito de Joule, isto é,

$$U_J = \int_0^\infty RI^2(t) dt .$$

3) Que acontece no caso em que R tende para zero?

A resposta à primeira questão é trivial. A segunda, embora faça sentido fisicamente por dever haver conservação de energia, já não é tão trivial. Em particular, a diferença de energias entre o estado inicial e final só depende das capacidades C_1 e C_2 . Como pode então ser dissipada por efeito de Joule que depende da resistência? A terceira, embora académica por haver sempre alguma resistência nos fios, é muito interessante e não trivial. Para sermos capazes de responder à última pergunta não podemos desprezar a auto indutância L do circuito. Assim somos levados à análise dum circuito RLC em regime transitório.

¹Este texto reproduz um artigo nunca publicado resultante de discussões com Jorge Dias de Deus e Pedro Brogueira

6.2 O circuito RLC em regime transitório

Consideremos o circuito RLC da Fig. 6.1 com a condição inicial de termos uma carga Q_0 no condensador C_1 em $t = 0$.

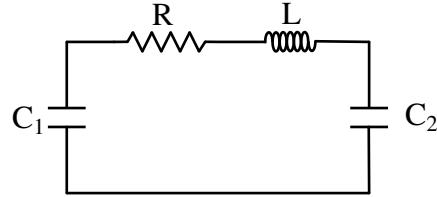


Figure 6.1: Circuito *RLC*

condensador C_1 em $t = 0$. Vamos determinar a carga nos condensadores e a corrente no circuito em função do tempo. A equação diferencial do circuito pode-se escrever em termos da carga $Q(t)$ no condensador C_2 na forma seguinte

$$\frac{Q_0}{C_1} = R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}, \quad (6.1)$$

onde C é a capacidade do conjunto dos dois condensadores, isto é

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.2)$$

A solução geral da Eq. (6.1) será a soma dumha solução particular da equação ($Q = C/C_1 Q_0$) com a solução da equação homogénea,

$$R \frac{dQ}{dt} + L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (6.3)$$

A solução da equação homogénea é da forma $e^{\alpha t}$. Substituindo na Eq. (6.3) obtemos a equação característica

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad (6.4)$$

com soluções

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (6.5)$$

Vemos assim que a característica das soluções depende do sinal do discriminante

$$\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} \quad (6.6)$$

O discriminante é nulo para um valor crítico da resistência dada por

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.7)$$

Vamos estudar separadamente as várias situações.

6.2.1 $R > R_c$

Neste caso ambas as raízes são reais e negativas. A solução geral da equação é então

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \left(1 + Ae^{-t/\tau_1} + Be^{-t/\tau_2} \right) \quad (6.8)$$

com

$$\tau_1 = \frac{2L}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R_c}{R}\right)^2}}, \quad \tau_2 = \frac{2L}{R} \frac{1}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_c}{R}\right)^2}} \quad (6.9)$$

É fácil de ver que as soluções com as condições na fronteira do problema, $Q(0) = 0$ e $i(0) = 0$ são,

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \left[1 - e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right) \right] \quad (6.10)$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \left[\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \right) \right] \quad (6.11)$$

Para referência futura notemos que

$$\tau_1 + \tau_2 = RC \quad (6.12)$$

Na Figura 6.2 mostramos os gráficos da carga no condensador C_2 e da corrente no circuito.

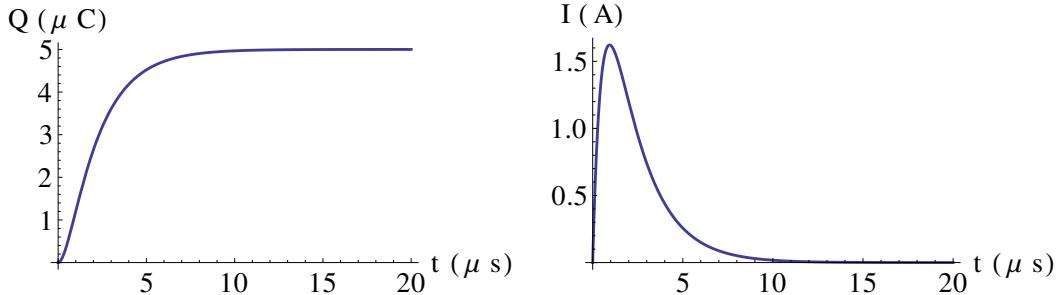


Figure 6.2: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso A. Dados: $Q_0 = 10 \mu \text{C}$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$, $R_c = 2 \Omega$ e $R = 1.2R_c$.

6.2.2 $R = R_c$

Neste caso temos uma raiz dupla

$$\tau = \tau_1 = \tau_2 = \frac{2L}{R} = \frac{1}{2}RC \quad (6.13)$$

onde se usou o facto que $R = R_c$. A solução geral da Eq. (6.1) é agora

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (6.14)$$

o que dá para a corrente,

$$I(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \quad (6.15)$$

Na Figura 6.3 mostramos os gráficos da carga no condensador C_2 e da corrente no circuito.

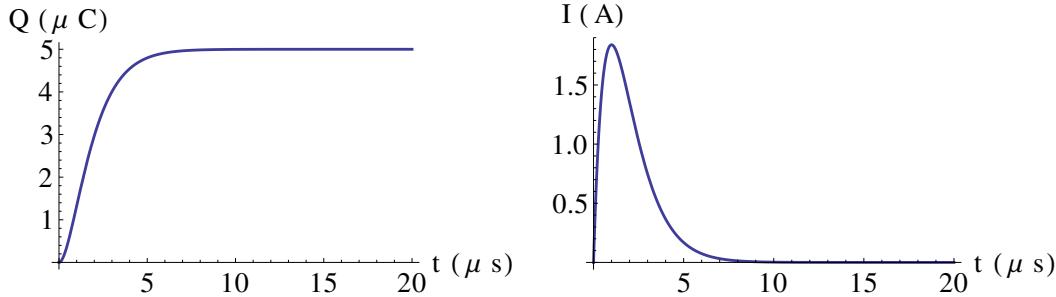


Figure 6.3: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso B. Dados: $Q_0 = 10 \mu \text{C}$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$, $R_c = 2 \Omega$ e $R = R_c$.

6.2.3 $R < R_c$

Este é o caso mais interessante e vai conduzir a oscilações pois as raízes são complexas. Para fixar notação escrevemos

$$\alpha = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega \quad (6.16)$$

onde

$$\tau = \frac{2L}{R}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6.17)$$

As soluções gerais são agora,

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \left[1 - \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega \tau} \sin \omega t \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (6.18)$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \frac{1 + \omega^2 \tau^2}{\omega \tau^2} \sin \omega t e^{-t/\tau} \quad (6.19)$$

Nas Figuras 6.4, 6.5 e 6.6 mostramos os gráficos da carga no condensador C_2 e da corrente no circuito.

6.3 Análise da energia

A questão que motivou este estudo era saber qual a diferença entre a energia inicial com o condensador C_1 com carga Q_0 e a situação final com os dois condutores atingindo o equilíbrio

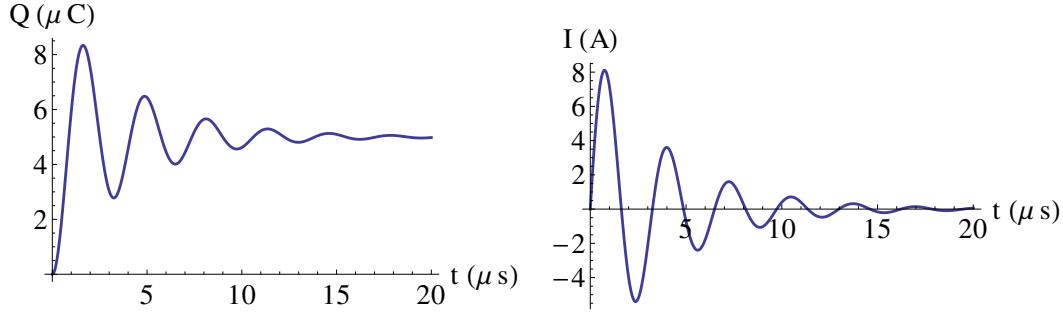


Figure 6.4: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso C. Dados: $Q_0 = 10 \mu\text{C}$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$, $R_c = 2 \Omega$ e $R = 0.25R_c$.

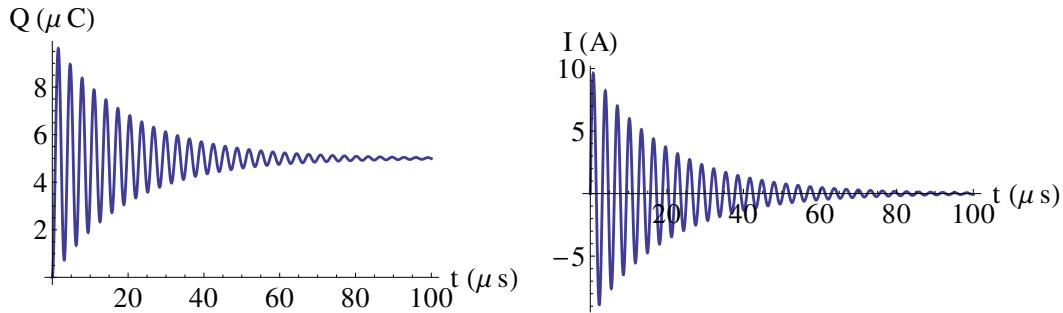


Figure 6.5: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso C. Dados: $Q_0 = 10 \mu\text{C}$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$, $R_c = 2 \Omega$ e $R = R_c/20$.

electrostático. Excluindo o caso $R = 0$, ao qual voltaremos mais à frente, em todos os outros casos obtemos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_2 = \frac{C}{C_1} Q_0 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} Q_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} Q_1 = Q_0 - \frac{C}{C_1} Q_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0 \quad (6.20)$$

Portanto

$$W_i = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_1}, \quad W_f = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{Q_2^2}{C_2} \quad (6.21)$$

e

$$W_i - W_f = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} > 0 \quad (6.22)$$

A questão era saber para onde ia esta diferença de energia. Vamos mostrar que em todos os casos em que $R > 0$ esta diferença corresponde exactamente à energia dissipada por efeito de Joule, independentemente do valor de R e do tipo de solução, amortecida, ou periódica amortecida.

6.3.1 $R > R_c$

Para mostrarmos o que acima dissemos basta calcular

$$W_{Joule} = \int_0^\infty RI^2(t)dt \quad (6.23)$$

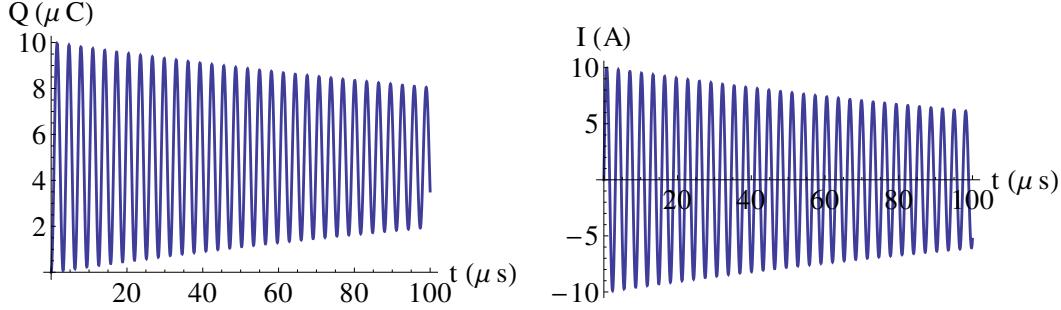


Figure 6.6: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso C. Dados: $Q_0 = 10 \mu \text{C}$, $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, $L = 1 \mu\text{H}$, $R_c = 2 \Omega$ e $R = R_c/200$.

Para vermos como a resistência R desaparece das contas vamos fazer este caso em detalhe (os outros serão semelhantes). Usando a Eq. (6.11) obtemos facilmente

$$\begin{aligned}
 W_{Joule} &= R \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{\tau_2} e^{-t/\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \right) \right]^2 dt \\
 &= R \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{\tau_1^2} e^{-2t/\tau_1} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{\tau_2^2} e^{-2t/\tau_2} - \frac{2}{\tau_1 \tau_2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 e^{-t(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} \right] dt \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Agora usando

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha} \tag{6.25}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 W_{Joule} &= R \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \left[\frac{1}{2\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{2\tau_2} + \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 \frac{1}{2\tau_1} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \frac{1}{\tau_2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{\tau_1 + \tau_2} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \right)^2 - \frac{2}{\tau_2 - \tau_1} \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} \right] \\
 &= \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \frac{1}{2} \frac{R}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} = W_i - W_f \tag{6.26}
 \end{aligned}$$

onde se usou a Eq. (6.2) e a Eq. (6.12).

6.3.2 $R = R_c$

Agora obtemos

$$W_{Joule} = \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 \frac{1}{4} \frac{R}{\tau} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} = W_i - W_f \tag{6.27}$$

onde se usou a a Eq. (6.2) e a Eq. (6.13).

6.3.3 $R < R_c$

Neste caso o integral é ligeiramente mais complicado mas o resultado é o mesmo,

$$W_{Joule} = \frac{C^2}{C_1^2} Q_0^2 R \frac{1}{4} \frac{\omega^2 \tau^2 + 1}{\tau} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} = W_i - W_f \quad (6.28)$$

onde se usou a Eq. (6.17) para obter

$$R \frac{1}{4} \frac{\omega^2 \tau^2 + 1}{\tau} = \frac{1}{2C} \quad (6.29)$$

6.4 Que acontece quando $R = 0$?

Este é o caso mais interessante. Se usarmos as expressões na Eq. (6.17) obtemos

$$\lim_{R \rightarrow 0} \tau = \infty \quad (6.30)$$

e portanto

$$\lim_{R \rightarrow 0} e^{-t/\tau} = 1 \quad (6.31)$$

isto é, neste limite a atenuação desaparece. As soluções são então

$$Q(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 (1 - \cos \omega t) \quad (6.32)$$

e

$$I(t) = \frac{C}{C_1} Q_0 \omega \sin \omega t \quad (6.33)$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (6.34)$$

O sistema vai oscilar, nunca atingindo o estado de equilíbrio electrostático (e portanto não violando o teorema de Thomson). É fácil calcular as várias parcelas da energia nas várias componentes do circuito (neste limite não há resistência). Obtemos

$$W_{C_1} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{1}{C_1} \frac{(C_1 + C_2 \cos \omega t)^2}{(C_1 + C_2)^2} \quad (6.35)$$

$$W_{C_2} = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} (1 - \cos \omega t)^2 \quad (6.36)$$

$$W_L = \frac{1}{2} Q_0^2 \frac{1}{C_1} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \sin^2 \omega t \quad (6.37)$$

Podemos então mostrar que a energia é conservada, pois

$$W_{C_1} + W_{C_2} + W_L = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_1} = W_i \quad (6.38)$$

6.5 Exemplos numéricos

Vamos agora ver para valores típicos dos parâmetros dos circuitos o que vai acontecer. Para isso tomemos dois condensadores com $C_1 = C_2 = 2 \mu\text{F}$. Temos então

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1 \mu\text{F} \quad (6.39)$$

Temos agora que estimar R e L . Para isso admitimos que o circuito tem a forma da Figura e

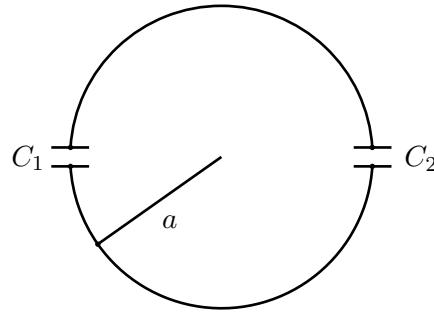


Figure 6.7: Circuito RLC

que as ligações são feitas com fio de cobre com condutividade $\sigma_{\text{Cu}} = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, secção com raio $b = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}$ e o circuito forma uma circunferência de perímetro $l = 0.3 \text{ m}$. Então

$$a = 4.77 \times 10^{-2} \text{ m}, \quad R = 25.5 \times 10^{-3} \Omega, \quad L = 32 \mu\text{H} \quad (6.40)$$

Como $R < R_c = 2\sqrt{L/C} = 11.3 \Omega$, o circuito vai entrar em regime oscilatório amortecido. No entanto a constante de tempo de amortecimento é muito pequena

$$\tau = \frac{2L}{R} = 2.5 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (6.41)$$

pelo que o estado de equilíbrio é atingido muito rapidamente. No laboratório convém encontrar valores de R , L e C que ilustrem os 3 regimes. O caso de $R = 0$ é, claro, um caso académico, a menos que se utilizem supercondutores. A situação aqui descrita corresponde aos gráficos da Figura 6.8.

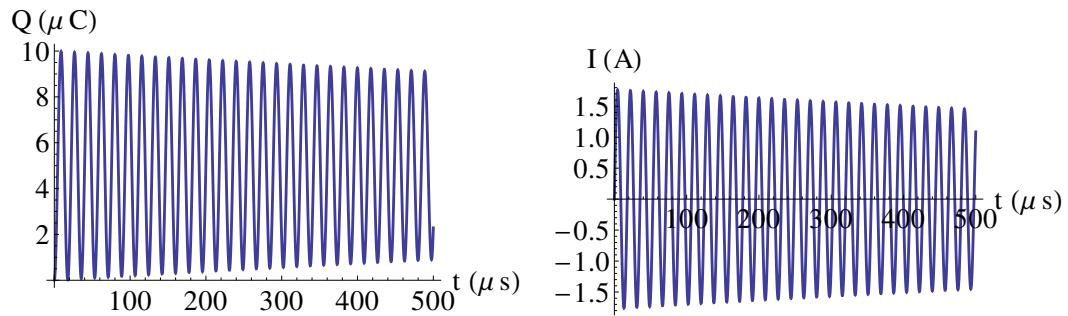


Figure 6.8: Carga e intensidade de corrente en função do tempo para o caso C. Dados: $Q_0 = 10 \mu C$, $C_1 = C_2 = 1 \mu F$, $L = 32 \mu H$, $R_c = 11.3 \Omega$ e $R = R = 25.5 \times 10^{-3} \Omega$.

Chapter 7

Ampère and Gauss's Laws for non-optimal geometries

7.1 Introduction

In the basic courses on Electromagnetism one frequently uses the laws of Gauss

$$\int_S (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.1)$$

and Ampère

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (7.2)$$

to obtain the fields \vec{E} and \vec{B} . One stresses there (see, for instance Ref.[1]) that despite the laws being valid for any closed surface (Gauss) or closed path (Ampère) they are only useful for the evaluation of the fields if we use properly the symmetry of the problem.

An interesting problem is then, for the cases where we know the fields, to perform the integrations and see how the result appears even if we do not use the geometry that best suits the symmetry of the problem. Here we just consider two of these cases, the field \vec{B} of a long (infinite for mathematical purposes) straight wire carrying uniform current I and the electric field \vec{E} of a point charge at the origin.

7.2 Ampère Law

We first discuss an example of the use of Ampère's law. Consider a straight wire carrying a steady current I along the z axis of a reference frame. As we know that the field lines are circumferences, and that the absolute value of the field can only depend on the distance to the wire, we can use for Γ in Eq. (7.2) a circumference of radius r and finally obtaining for the field

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \quad (7.3)$$

a result that could also be obtained with a little more effort using Biot-Savart law.

7.2.1 A square contour

But now consider that we take for Γ a square in the xy plane as indicated in Fig. 7.1. As

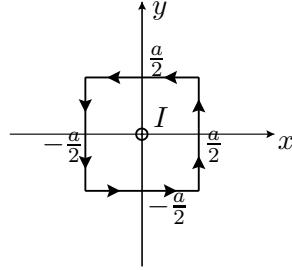


Figure 7.1: Square contour for Ampère's law

we know the expression for the field, Eq. (7.3), we can explicitly verify Eq. (7.2). Due to the symmetry it is clear that we only need to calculate the contribution from one of the sides of the square, the final result being obtained multiplying by 4. We do the integral along the side placed at $x = \frac{a}{2}$. Then only the B_y component of the field is needed. Using

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y = -\frac{y}{r} \vec{e}_x + \frac{x}{r} \vec{e}_y \quad (7.4)$$

we obtain

$$B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (7.5)$$

Now the integral on the side at $x = \frac{a}{2}$ can be obtained from

$$\int dy \frac{x}{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \left[\frac{y}{x} \right] \quad (7.6)$$

we have then

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{a/2}{(a/2)^2 + y^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left[\frac{y}{a/2} \right] \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} [\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{4} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Now multiplying by four to get the integral along the square we indeed get Eq. (7.2),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (7.8)$$

7.2.2 A rectangular contour

From this calculation one might think that the $\pi/4$ comes from the fact that we have a square. What happens for a rectangle of sides a and b ? In this case it is quite interesting how we can

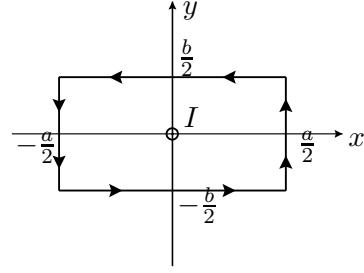


Figure 7.2: Rectangle contour for Ampère's law

get a π out of the rectangle. We consider the situation of Fig. 7.2. Now the integrals on the sides are equal two by two. The integral at $x = +\frac{a}{2}$ is now

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} dy \frac{a/2}{(a/2)^2 + y^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left[\frac{y}{a/2} \right] \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2 \tan^{-1}(b/a) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \tan^{-1}(b/a) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Now we do the integration along the x axis at $y = -\frac{b}{2}$. We get

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{b/2}{(b/2)^2 + y^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\tan^{-1} \left[\frac{y}{b/2} \right] \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 2 \tan^{-1}(a/b) \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi} \tan^{-1}(a/b) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Adding and multiplying by two we get

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{2}{\pi} [\tan^{-1}(b/a) + \tan^{-1}(a/b)] \quad (7.11)$$

Now the miracle happens as follows. Denote

$$\alpha = \tan^{-1}(b/a), \quad \beta = \tan^{-1}(a/b) \quad (7.12)$$

Then

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{1 - \frac{b}{a} \frac{a}{b}} = \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{1 - 1} \\ &= \infty \end{aligned} \quad (7.13)$$

therefore

$$\tan^{-1}(b/a) + \tan^{-1}(a/b) = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad (7.14)$$

and

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (7.15)$$

Beautiful!

7.3 Gauss Law

We consider the electric field of a point charge at the origin. In spherical coordinates we have

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r \quad (7.16)$$

If in Gauss's law, Eq.(7.16), we use spherical surfaces of radius r , the verification is immediate. In fact it could be used to find the absolute value of the \vec{E} as we know, by symmetry considerations, that the field is radial and that the absolute value only depends on r and therefore should be constant on a surface of radius r .

Now the question is, can we verify Gauss's law for the point charge, Eq. (7.16), if we do not choose a sphere? Of course the problem can be impossible to solve analytically for an arbitrary surface but the calculations can be performed for simple surfaces, as we know the field. We consider first a cube and then a general rectangular parallelepiped.

7.3.1 A cubic surface

Consider then a cubic surface with sides a . We place the cubic surface with center at the origin, so the six faces are placed at $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{a}{2}$ and $z = \pm\frac{a}{2}$. By symmetry the flux through each face will be equal, so one has just to evaluate the flux through one of the faces and multiply by 6. We choose to evaluate the flux through the face located at $z = +\frac{a}{2}$. Then $\vec{n} = \hat{e}_z$ and we only need the E_z component of the field on that surface. We have

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{a/2}{[x^2 + y^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \quad (7.17)$$

where the second equality comes from the fact that we are evaluating the field at $z = a/2$. Now the flux on that face (we call it FluxA) is

$$\begin{aligned} \text{FluxA} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \frac{a/2}{[x^2 + y^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^{a/2} dx \int_0^{a/2} dy \frac{a/2}{[x^2 + y^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (7.18)$$

where the second equality comes from the fact that the integrand is even in x and y . Now we change variables

$$x = \frac{a}{2}\xi_x, \quad y = \frac{a}{2}\xi_y \quad (7.19)$$

to write

$$\text{FluxA} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^1 d\xi_x \int_0^1 d\xi_y \frac{1}{[\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1]^{3/2}} \quad (7.20)$$

Now we use

$$\int d\xi \frac{1}{[\xi^2 + \alpha^2]^{3/2}} = \frac{\xi}{\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 + \xi^2}} \quad (7.21)$$

to do the first integration and obtain

$$\text{FluxA} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^1 d\xi_x \frac{1}{(1 + \xi_x^2) \sqrt{2 + \xi_x^2}} \quad (7.22)$$

To do this last equation we use

$$\int d\xi \frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2) \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \xi^2}} = \frac{1}{\alpha\beta} \tan^{-1} \left[\frac{\beta\xi}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \xi^2}} \right] \quad (7.23)$$

with $\alpha = \beta = 1$ to obtain

$$\text{FluxA} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.24)$$

and the total flux

$$\int_{\text{cube}} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = 6 \times \frac{1}{6} \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.25)$$

verifying Gauss's law. Notice how we could extract a π out of a cube!

7.3.2 A rectangular parallelepiped

One could think that the centered cube was an easy task. Let us see a more complicated case, a rectangular parallelepiped with faces at $x = \pm \frac{a}{2}$, $y = \pm \frac{b}{2}$ and $z = \pm \frac{c}{2}$. We are still centering the cube (without this I am not sure if we could do it analytically), but let the sides be arbitrary. Now because of the geometry the fluxes through opposite faces are still equal but they are only equal in pairs.

Let us start by calculating again on the face $z = \frac{c}{2}$ (which is equal to the flux in the face $z = -\frac{c}{2}$). We have

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{c/2}{[x^2 + y^2 + (c/2)^2]^{3/2}} \quad (7.26)$$

and the flux is (already using the fact that the integrand is even)

$$\text{FluxA} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^{a/2} dx \int_0^{b/2} dy \frac{c/2}{[x^2 + y^2 + (c/2)^2]^{3/2}} \quad (7.27)$$

Now we use Eq. (7.21) to obtain

$$\text{FluxA} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^{a/2} dx \frac{(c/2)(b/2)}{(x^2 + (c/2)^2) \sqrt{x^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2}} \quad (7.28)$$

We now use Eq. (7.23) with $\alpha = c/2$ and $\beta = (b/2)$ to get

$$\begin{aligned}\text{FluxA} &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{bc}{4} \frac{4}{bc} \tan^{-1} \left[\frac{(b/2)(a/2)}{(c/2)\sqrt{(a/2)^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2}} \right] \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \tan^{-1} \left[\frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right]\end{aligned}\quad (7.29)$$

and the flux through the face at $z = -\frac{c}{2}$ is equal. Now for the other faces. In fact we do not have to do the integrations again, we can just use the symmetry and cycle $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$. We get

$$\text{TotalFlux} = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \left[\tan^{-1} \left[\frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{bc}{a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{ca}{b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] \right] \quad (7.30)$$

where we have multiplied by 2 for the equal faces. Now how can this give Eq. (7.1) for arbitrary a, b, c (we can check easily that we recover Eq. (7.24) for $a = b = c$)? The solution is the following result from trigonometry,

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3}{1 - (t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)} \quad (7.31)$$

where

$$t_i = \tan \theta_i \quad (7.32)$$

Now look at the denominator of Eq. (7.31) applied to Eq. (7.30). We have

$$t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \quad (7.33)$$

and therefore $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \infty$ implying

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} \quad (7.34)$$

Inserting in Eq. (7.30) we get finally

$$\int_{\text{cube}} (\vec{E} \cdot \vec{n}) dS = \text{TotalFlux} = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \times \frac{\pi}{2} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.35)$$

as it should.

Chapter 8

Equação de Laplace em Magnetostática

Embora a equação de Laplace desempenhe um papel central em electrostática, vamos mostrar que ela também é útil para resolver problemas em magnetostática. Como anteriormente apresentaremos os resultados na forma de problemas.

8.1 Introdução

a) Nas regiões do espaço onde $\vec{J} = 0$ mostre que pode definir um potencial magnético **escalar** através de

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_M \quad (8.1)$$

b) Mostre que numa tal região, o potencial escalar Φ_M obedece à equação de Laplace, isto é

$$\nabla^2\Phi_M = 0 . \quad (8.2)$$

c) Utilizando as condições na fronteira adequadas, mostre que a solução numérica da Eq. (8.2) para a situação a duas dimensões indicada na Fig. 8.1

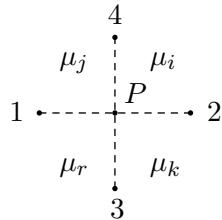


Figure 8.1: Potencial (aproximado) no ponto P como média de quatro pontos equidistantes em meios magnéticos.

é

$$\Phi_M(P) = \frac{1}{W} (w_1 \Phi_{M1} + w_2 \Phi_{M2} + w_3 \Phi_{M3} + w_4 \Phi_{M4}) \quad (8.3)$$

onde

$$W = \sum_{i=1}^4 w_i \quad (8.4)$$

e os pesos w_i são definidos da forma seguinte:

$$\begin{cases} w_i = \mu_1 & \text{Se } i \text{ no meio com } \mu_1 \\ w_i = \mu_2 & \text{Se } i \text{ no meio com } \mu_2 \\ w_i = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} & \text{Se } i \text{ na fronteira entre os dois meios} \end{cases} \quad (8.5)$$

8.2 Solução Numérica

Queremos agora calcular o campo \vec{H} no interior dum solenóide infinito, com n espiras por unidade de comprimento percorrido com uma corrente estacionária I , conforme indicado na Fig. 8.2. a) Mostre que o campo \vec{H} e o potencial Φ_M , são dados por

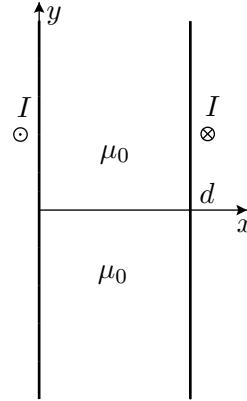


Figure 8.2: Bobina percorrida por corrente I no vazio

$$\vec{H} = nI \vec{e}_y, \quad \Phi_M = -nI y . \quad (8.6)$$

b) Para resolver o problema numericamente tem que impor as condições na fronteira adequadas. Mostre que deverá ter

$$\Phi_M(0, y) = -nI y \quad \Phi_M(d, y) = -nI y \quad (8.7)$$

$$\Phi_M(x, -\frac{L}{2}) = -nI \frac{L}{2} \quad \Phi_M(x, \frac{L}{2}) = -nI \frac{L}{2} \quad (8.8)$$

onde L é a altura da bobina.

c) Utilize os resultados do problema I e da alínea c) para resolver o problema numericamente. Reproduza a Fig. 8.3.

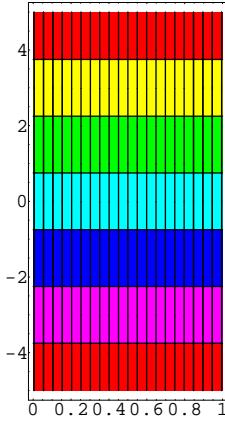


Figure 8.3: Equipotencias e linhas do campo \vec{H} para uma bobina percorrida por corrente I no vazio.

d) Considere agora os casos indicados na Fig. 8.4 a) e c). Utilize os mesmos métodos para encontrar as equipotenciais de Φ_M e as linhas do campo \vec{H} . Verifique os resultados apresentados na Fig. 8.4 b) e d).

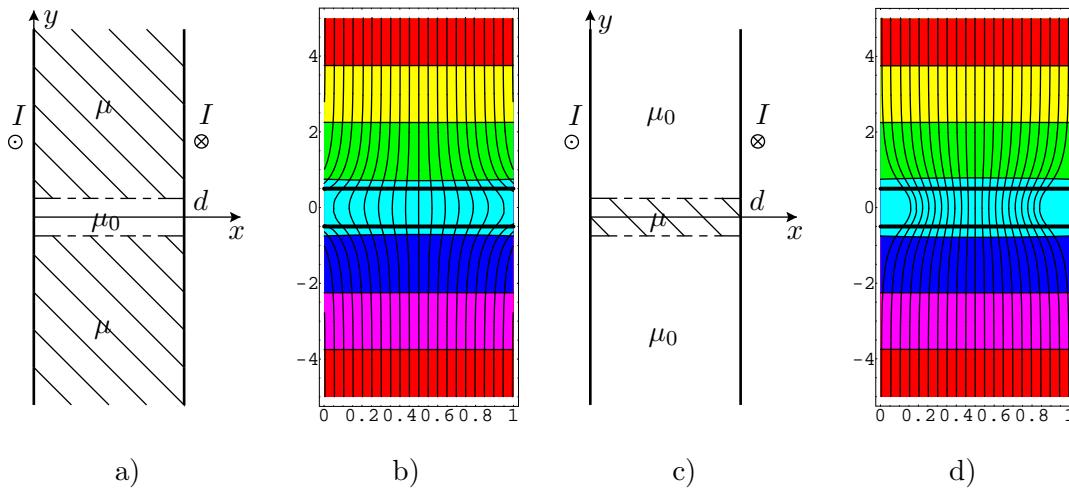


Figure 8.4: Bobinas com meios magnéticos.

8.3 Solução Analítica e Comparação

Vamos agora resolver a equação de Laplace analiticamente. Consideremos a situação da Fig. 8.5.

a) Mostre que a solução geral da equação de Laplace com as condições na fronteira apropriadas é

$$\Phi_M(x, y) = -H_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(b_n x) + B_n \cos(b_n x)] e^{-b_n y}, \quad y > 0$$

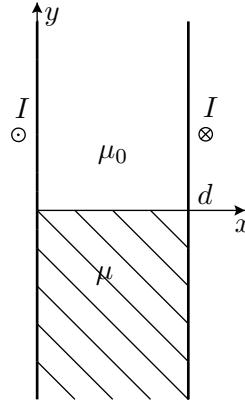


Figure 8.5: Bobina percorrida por corrente com metade preenchida com material com permeabilidade μ .

$$\Phi_M(x, y) = -H_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} [A'_n \sin(b_n x) + B'_n \cos(b_n x)] e^{b_n y}, \quad y < 0 \quad (8.9)$$

onde H_0 é definido por $\vec{H} = H_0 \vec{e}_y$, para $|y| \rightarrow \infty$.

b) Mostre que $H_y(0, y) = H_y(d, y) = H_0$ implica que

$$b_n = \frac{n\pi}{d}, \quad B_n = 0, B'_n = 0 \quad (8.10)$$

c) Mostre que $H_x(x, 0^+) = H_x(x, 0^-)$ exige

$$A_n = A'_n \quad (8.11)$$

d) Mostre que $\mu H_y(x, 0^-) = \mu_0 H_y(x, 0^+)$ permite resolver para A_n :

$$A_{2m} = 0 \quad (8.12)$$

$$A_{2m+1} = H_0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + \mu_0} \frac{4d}{\pi^2 (2m+1)^2} \quad (8.13)$$

e) Mostre que reproduz a Fig. 8.6

f) Mostre que a componente H_y é descontinua em $y = 0$,

g) Mostre que a componente H_x é diferente de zero para $x = 0, d$,

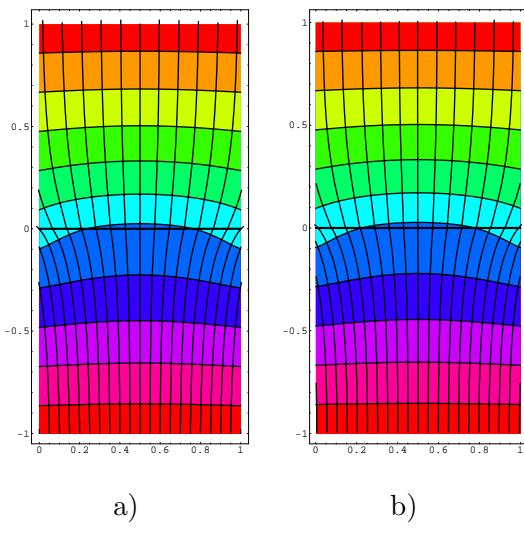
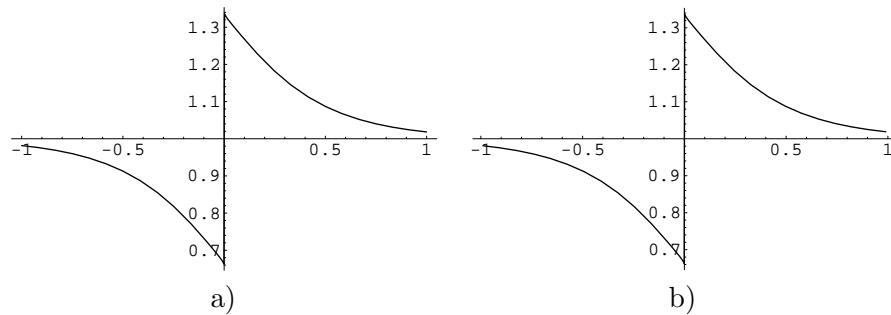
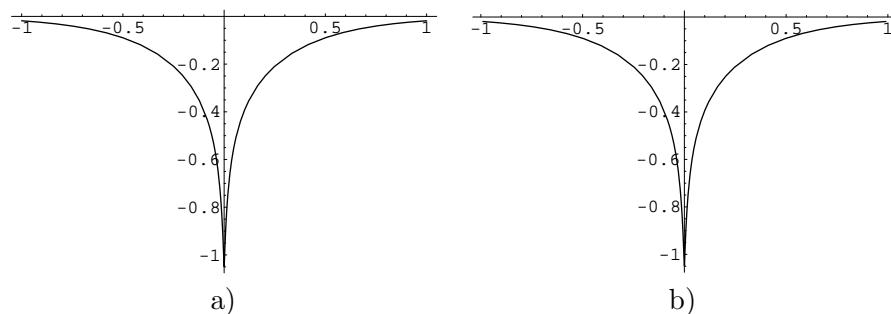


Figure 8.6: a) Cálculo exato. b) Cálculo numérico

Figure 8.7: $H_y(0.5, y)$: a) Cálculo exato. b) Cálculo numéricoFigure 8.8: $H_x(0, y)$: a) Cálculo exato. b) Cálculo numérico

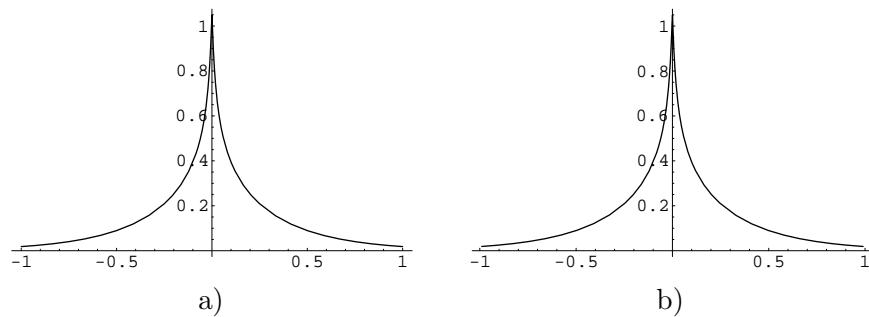


Figure 8.9: $H_x(d, y)$: a) Cálculo exato. b) Cálculo numérico

Chapter 9

Problemas Extra de Magnetostática

9.1 Introdução

Em magnetostática poucos são os problemas que conduzem a uma solução analítica em termos de funções elementares. O conjunto de questões que se seguem servem para ilustrar isso para o caso dum anel de corrente percorrido por uma corrente estacionária, conforme indicado na Fig. 9.1, No livro de texto [1], nós vimos como calcular o campo \vec{B} no ponto P quando este se

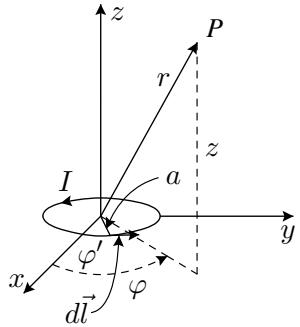


Figure 9.1: Anel de corrente

encontrava sobre o eixo de simetria. Para esse caso o resultado é dado pela Eq.(2.38) que se escreve aqui $\vec{B} = B_z \vec{e}_z$ com

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (9.1)$$

onde se usaram coordenadas cilíndricas. Que acontece quando o ponto P não se encontra sobre o eixo de simetria? Vamos mostrar que é possível neste caso obter o resultado numa forma analítica mas em termos de funções especiais, os chamadas integrais elípticos completos de primeira e segunda espécie.

9.2 Integrais Elípticos Completos

Vamos aqui indicar as propriedades mais importantes destas funções especiais. O integral elíptico de 1º espécie, $K(z)$, é definido pelo integral

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - z \sin^2 \alpha}} d\alpha \quad (9.2)$$

enquanto que o integral elíptico de 2º espécie, $E(z)$, é dado por,

$$E(z) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - z \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (9.3)$$

Para o seguimento são importantes as seguintes relações,

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{1}{2z} [E(z) - K(z)] \quad (9.4)$$

$$\frac{dK(z)}{dz} = \frac{1}{2z} \left[\frac{E(z)}{1-z} - K(z) \right] \quad (9.5)$$

$$E(z) = \sqrt{1-z} E\left(\frac{z}{z-1}\right) \quad (9.6)$$

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} K\left(\frac{z}{z-1}\right) \quad (9.7)$$

Para valores pequenos de z temos,

$$E(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}z - \frac{3\pi}{128}z^2 + \dots \quad (9.8)$$

$$K(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}z + \frac{9\pi}{128}z^2 + \dots \quad (9.9)$$

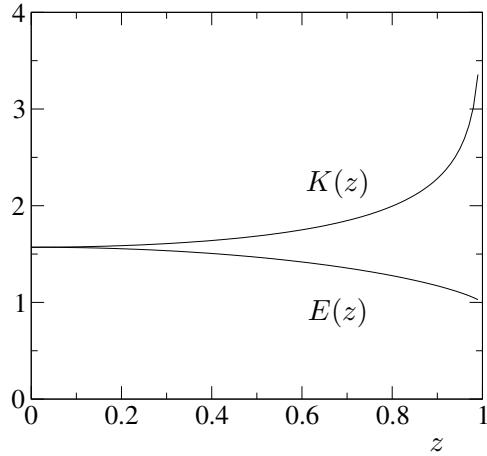
A função $K(z)$ é dada no **Mathematica** pela função **EllipticK[z]** enquanto que $E(z)$ é dada por **EllipticE[z]**. A nossa definição coincide com a do **Mathematica** e de Abramowitz e Stegun [4]. Na Fig. 9.2 está indicado o andamento de $E(z)$ e $K(z)$ para $z \in [0, 1]$. Notar que $E(1) = 1$ e $K(1) = \infty$.

9.3 Vector potential of a circular current loop

Considere o anel de corrente indicado na Fig. 9.1 percorrido por uma corrente estacionária I . Como o problema tem simetria azimutal considere, sem perda de generalidade, que o ponto P se encontra no plano xz .

a) Mostre que o potencial vector tem só componente segundo o vector \vec{e}_φ em coordenadas cilíndricas e que se tem

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I a \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi'}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi'}} d\varphi' \quad (9.10)$$

Figure 9.2: Integrais elípticos $E(z)$ e $K(z)$.

onde o ponto $P = (\rho, 0, z)$ e φ' é o ângulo de integração ao longo da espira.

b) Usando a mudança de variável $\varphi' = 2\alpha + \pi$ mostre que pode escrever,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{\pi} I \frac{a}{\xi} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha \quad (9.11)$$

$$= \frac{\mu_0}{\pi} I \frac{a}{\xi k^2} [(2 - k^2)K(k^2) - 2E(k^2)] \quad (9.12)$$

onde

$$\xi = \sqrt{(a + \rho)^2 + z^2} \quad (9.13)$$

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + z^2}} \quad (9.14)$$

c) Considere agora que $r \gg a$. Mostre que obtém o resultado da Eq.(2.118), isto é,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\pi a^2) \sin \theta}{r^2} \quad (9.15)$$

onde r e θ são agora as coordenadas esféricas do ponto $P = (r, \theta, 0)$ e não as coordenadas cilíndricas usadas nas alíneas anteriores.

d) Verifique que, trivialmente, o potencial vector satisfaz a equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (9.16)$$

9.4 Magnetic field \vec{B} of a circular current loop derived from \vec{A}

Vamos agora calcular o campo \vec{B} no ponto $P = (\rho, 0, z)$. Para isso vamos usar $B = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Em coordenadas cilíndricas temos

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \quad ; \quad B_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} \quad ; \quad B_\varphi = 0 \quad (9.17)$$

a) Mostre que se obtém

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{\rho \xi} \left[-K(k^2) + \frac{a^2 + \rho^2 + z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k^2) \right] \quad (9.18)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\xi} \left[K(k^2) + \frac{a^2 - \rho^2 - z^2}{(a - \rho)^2 + z^2} E(k^2) \right] \quad (9.19)$$

b) Mostre que sobre o eixo de simetria, $\rho = 0$, este resultado está de acordo com a Eq. (9.1), isto é,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} B_\rho = 0 \quad (9.20)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (9.21)$$

c) Utilizando a expressão da divergência em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (9.22)$$

verifique que o campo \vec{B} satisfaz sempre

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.23)$$

9.5 Magnetic field \vec{B} of a circular current loop from Biot-Savart law

Vamos agora calcular o campo \vec{B} a partir da lei de Biot-Savart.

a) Para isso considere coordenadas cilíndricas e o ponto $P(\rho, 0, z)$ no plano xz , sem perda de generalidade, devido à simetria azimutal do problema. Use

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z = \rho \vec{e}_x + z \vec{e}_z \quad (9.24)$$

$$\vec{r}' = a (\cos \varphi' \vec{e}_x + \sin \varphi' \vec{e}_y) \quad (9.25)$$

$$d\vec{l} = ad\varphi' (-\sin \varphi' \vec{e}_x + \cos \varphi' \vec{e}_y) \quad (9.26)$$

para mostrar que

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi'} \quad (9.27)$$

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}') = ad\varphi' [z \cos \varphi' \vec{e}_\rho + z \sin \varphi' \vec{e}_\varphi + (a - \rho \cos \varphi') \vec{e}_z] \quad (9.28)$$

e portanto

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi')^{3/2}} d\varphi' \quad (9.29)$$

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi')^{3/2}} d\varphi' \quad (9.30)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a - \rho \cos \varphi'}{(\rho^2 + z^2 + a^2 - 2a\rho \cos \varphi')^{3/2}} d\varphi' \quad (9.31)$$

b) Mostre que se os integrais anteriores se podem exprimir em termos dos integrais elípticos $E(k^2)$ e $K(k^2)$ e obter os resultados das Eq. (9.17), Eq. (9.18, Eq. (9.19).

c) Utilize os métodos da secção 1.3.3 para fazer um programa que trace as linhas de campo de \vec{B} no plano xz que passam nos pontos $(\frac{1}{4}a, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}a, 0, 0)$, $(\frac{3}{4}a, 0, 0)$ e $(\frac{7}{8}a, 0, 0)$. Faça $I = 1$ A e $a = 0.1$ m

9.6 Multipole expansion of \vec{A}

Considere novamente o problema I. Vamos obter a expressão em termos de multipolos. Para isso utilize a expansão (ver livro de J. D. Jackson na bibliografia),

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \quad (9.32)$$

válida para $a = |\vec{r}'| < |\vec{r}|$, e onde $P_l(x)$ são os polinómios de Legendre e γ é o ângulo entre os vectores \vec{r} e \vec{r}' .

a) Mostre que a componente A_φ do potencial vector se pode escrever na forma

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} F_l(\theta) \quad (9.33)$$

onde

$$F_l(\theta) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \cos \varphi' P_l(\sin \theta \cos \varphi') \quad (9.34)$$

b) Mostre que $F_l(\theta) = 0$ para todos os valores pares de l . Comente a ausência do termo $l = 0$.

c) Mostre que $F_1(\theta) = \pi \sin \theta$ e que portanto o primeiro termo não nulo do potencial vector a grandes distâncias é,

$$A_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_z \sin \theta}{r^2} \quad (9.35)$$

com $m_z = \pi a^2 I$. Comente.

d) Utilize o **Mathematica** para calcular os integrais em $F_l(\theta)$. Mostre que se obtém

$$A_\varphi = \mu_0 I \sum_{l=1, l \text{ odd}}^{\infty} (-1)^{\frac{l+1}{2}} \frac{l!!}{2l(l+1)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l^1(\cos \theta) \quad (9.36)$$

onde $P_l^m(x)$ são os polinómios associados de Legendre. Estas funções são dadas no **Mathematica** por `LegendreP[l, m, x]`.

9.7 On $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ and the magnetic flux

Uma das equações fundamentais do electromagnetismo, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, tem como consequência que as linhas de campo de \vec{B} são fechadas. No problema **II** determinámos as componentes do campo \vec{B} devido a um anel de corrente de raio a assente no plano xy e com centro na origem. Vamos neste problema mostrar que o fluxo que atravessa a superfície com $\rho < a$ é igual e de sinal contrário ao fluxo que atravessa a superfície com $\rho > a$. Em termos simples, todas as linhas de campo que atravessam a superfície contida dentro da espira têm que atravessar também a superfície exterior.

- a) Mostre que os fluxos que atravessam as superfícies limitadas pelo anel de corrente em $\rho = a$ são dadas por (a normal escolhida é $\vec{n} = \vec{e}_z$)

$$\Phi_{\text{Interior}} = \Phi_0 \int_0^1 d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad \Phi_{\text{Exterior}} = \Phi_0 \int_1^\infty d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad (9.37)$$

onde

$$\Phi_0 = \mu_0 I a \quad (9.38)$$

e

$$\mathcal{F} = \frac{\eta}{1+\eta} \left[K(k^2) + \frac{1-\eta^2}{(1-\eta)^2} E(k^2) \right] \quad (9.39)$$

com

$$k = \sqrt{\frac{4\eta}{(1+\eta)^2}} \quad (9.40)$$

- b) Verifique que os fluxos definidos pela Eq. (9.37) são infinitos. Isto resulta do facto de se ter considerado um fio com secção nula. Faça um gráfico da função integranda $\mathcal{F}(\eta)$ para $0 < \eta < 10$.

- c) O resultado da alínea b) põe um problema ao querermos verificar que

$$\Phi_{\text{Interior}} = -\Phi_{\text{Exterior}} \quad (9.41)$$

Para resolver este problema completamente teríamos de considerar que a secção do fio não é nula e recalcular o campo \vec{B} em todo o espaço. Veríamos então que os fluxos não são infinitos. Com estarmos só interessados em mostrar a Eq. (9.41) podemos utilizar um outro método. Para isso definimos, em vez da Eq. (9.37),

$$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_0^{1-\epsilon} d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad \Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_{1+\epsilon}^\infty d\eta \mathcal{F}(\eta), \quad (9.42)$$

Agora para $\epsilon > 0$ os integrais não são infinitos e para ϵ suficientemente pequeno deve ser possível mostrar que a Eq. (9.41) é satisfeita. No entanto se quisermos calcular os integrais numericamente veremos que é difícil conseguir a precisão desejada. De facto use o **Mathematica** para obter os valores da tabela seguinte

ϵ	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon)/\Phi_0$
10^{-1}	2.21770	-2.55543
10^{-2}	4.65625	-4.71294
10^{-3}	6.98320	-6.99103
10^{-4}	9.28927	-9.29014

d) Para valores muito pequenos de ϵ a integração numérica torna-se difícil. De facto o **Mathematica** já dá uma mensagem de *convergência não atingida* para o último valor da tabela anterior. Para resolver este problema vamos fazer um desenvolvimento em série para isolar a divergência. Use o **Mathematica** para mostrar que na vizinhança de $\eta = 1$ temos

$$\mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) = \frac{1}{1-\eta} - \frac{1}{2} \ln |1-\eta| + c_0 + (1-\eta) \left[c_1 + \frac{1}{8} \ln |1-\eta| \right] \quad (9.43)$$

$$+ (1-\eta)^2 \left[c_2 + \frac{3}{32} \ln |1-\eta| \right] + \dots \quad (9.44)$$

onde

$$c_0 = -1 - \frac{1}{2}\gamma - \psi(1/2) - \frac{1}{4} \ln 4 \simeq 0.03972077 \quad (9.45)$$

$$c_1 = -\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\gamma + \frac{3}{16}\psi(1/2) - \frac{1}{16}\psi(3/2) - \frac{1}{16} \ln 4 \simeq -0.57243019 \quad (9.46)$$

$$c_2 = \frac{1}{32} + \frac{3}{32}\gamma + \frac{1}{8}\psi(1/2) - \frac{1}{32}\psi(3/2) - \frac{3}{64} \ln 4 \simeq -0.22619764 \quad (9.47)$$

e $\gamma = 0.577216$ é a constante de Euler e $\psi(z) = \frac{d\Gamma(z)}{dz}$. Da Eq. (9.43) é claro porque é que os integrais divergem. Podemos usar esta expansão para definir expressões aproximadas, mas mais úteis para efectuar os integrais,

$$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_0^{\eta_1} d\eta \mathcal{F}(\eta) + \Phi_0 \int_{\eta_1}^{1-\epsilon} d\eta \mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) \quad (9.48)$$

$$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon) = \Phi_0 \int_{1+\epsilon}^{\eta_2} d\eta \mathcal{F}_{\text{aprox}}(\eta) + \Phi_0 \int_{\eta_2}^{\infty} d\eta \mathcal{F}(\eta) \quad (9.49)$$

onde $\eta_{1,2}$ não necessitam de estar tão próximos de $\eta = 1$. Com estas expressões é mais fácil efectuar os integrais para valores mais pequenos de ϵ . Para $\eta_1 = 0.95$ e $\eta_2 = 1.05$ mostre que se obtêm os valores indicados na tabela seguinte,

ϵ	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	$\Phi_{\text{Exterior}}(\epsilon)/\Phi_0$
10^{-4}	9.28927	-9.29014
10^{-5}	11.5923	-11.5923
10^{-6}	13.8949	-13.8948
10^{-7}	16.1975	-16.1974

Experimente com outros valores de $\eta_{1,2}$.

e) A auto inductância duma espira circular pode ser calculada determinando o fluxo que atravessa a espira e igualando $\Phi = LI$. Claro que temos o problema da divergência do fluxo quando o raio do condutor é nulo. Por isso define-se normalmente a auto inductância integrando até ao condutor, isto é considerando só a nossa definição de $\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)$. Na literatura é usual usar uma fórmula aproximada devida a Wheeler[5]

$$L \simeq a\mu_0 \left[\ln \left(\frac{8a}{b} \right) - 2 \right]$$

onde a é o raio da espira circular e b o raio do condutor. Mostre que este resultado é consistente com os resultados anteriores reproduzindo os valores da tabela seguinte

ϵ	$\Phi_{\text{Interior}}(\epsilon)/\Phi_0$	L/L_0
10^{-1}	2.21770	2.38203
10^{-2}	4.65625	4.68461
10^{-3}	6.98320	6.9872
10^{-4}	9.28927	9.28978
10^{-5}	11.5923	11.5924
10^{-6}	13.8949	13.8950
10^{-7}	16.1975	16.1975

onde $L_0 = a\mu_0$ e $\epsilon = b/a$.

9.8 Magnetic field of a finite solenoid

No problema **II** obtivemos o campo \vec{B} no caso dum anel de corrente. Vamos usar esse problema para determinar o campo \vec{H} dum solenóide de altura $2L$ e raio a , com o eixo coincidente com o eixo do z , percorrido por uma corrente superficial $J_S = nI$ A/m, onde n é, como habitualmente, o número de espiras por unidade de comprimento.

a) Mostre que as componentes do campo \vec{H} são dadas pelas seguintes expressões,

$$\begin{aligned} H_\rho(\rho, z) &= \int_{-L}^L dz' \mathcal{F}_\rho(\rho, z, a, L, z') \\ H_z(\rho, z) &= \int_{-L}^L dz' \mathcal{F}_z(\rho, z, a, L, z') \\ H_\varphi(\rho, z) &= 0 \end{aligned} \tag{9.50}$$

onde

$$\mathcal{F}_\rho(\rho, z, a, L, z') = \frac{J_S}{2\pi} \frac{z - z'}{\rho\xi} \left[-K(k^2) + \frac{a^2 + \rho^2 + (z - z')^2}{(a - \rho)^2 + (z - z')^2} E(k^2) \right]$$

$$\mathcal{F}_z(\rho, z, a, L, z') = \frac{J_S}{2\pi} \frac{1}{\xi} \left[K(k^2) + \frac{a^2 - \rho^2 - (z - z')^2}{(a - \rho)^2 + (z - z')^2} E(k^2) \right] \quad (9.51)$$

e

$$k = \sqrt{\frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + (z - z')^2}}, \quad \xi = \sqrt{(a + \rho)^2 + (z - z')^2} \quad (9.52)$$

b) Os integrais da alínea anterior não podem ser feitos analiticamente. No entanto são possíveis de calcular numericamente. Mostre que reproduz os resultados da Fig. 9.3 para $a = 1$, $L = 5$, $J_S = 1$ (em unidades arbitrárias). Comente os resultados

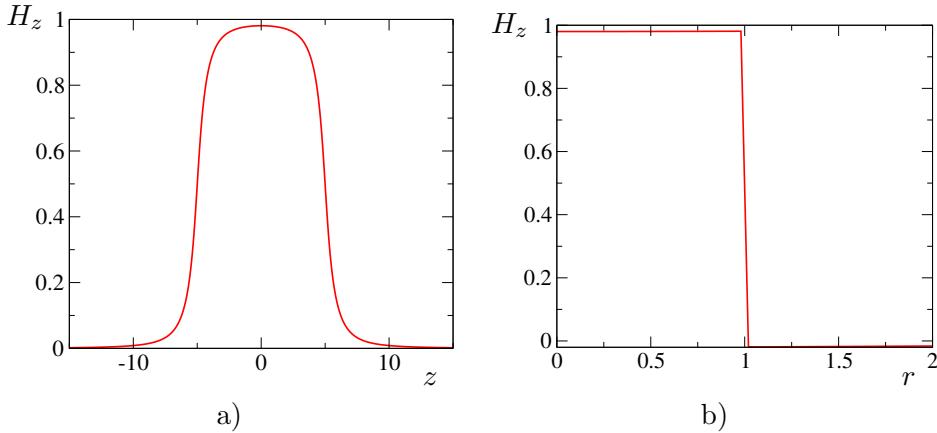


Figure 9.3: a) H_z em função de z para $r = 0.5$; b) H_z em função de r para $z = 0.5$. Notar que a fronteira do solenóide se encontra em $r = 1$ e $z = \pm 5$.

c) Faça o mesmo para a componente H_r e reproduza a Fig. 9.4. Notar as escalas diferentes.

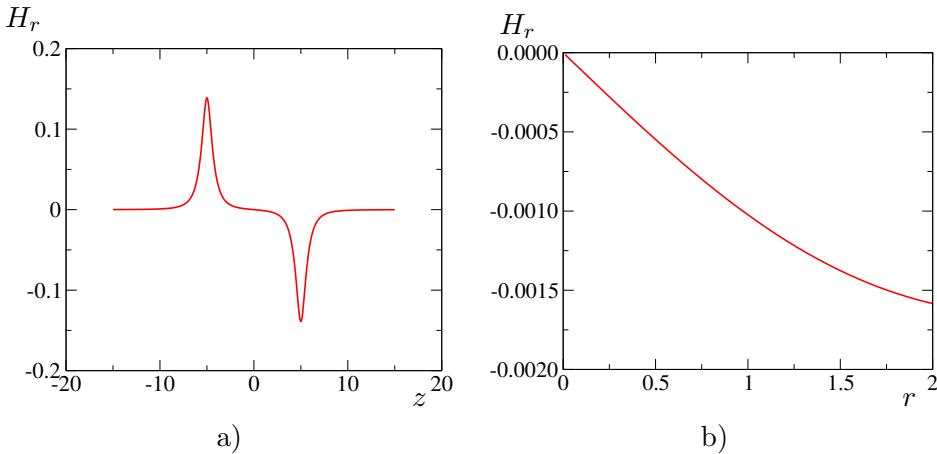


Figure 9.4: a) H_r em função de z para $r = 0.5$; b) H_r em função de r para $z = 0.5$.

Comente os resultados.

d) Faça um programa para desenhar as linhas do campo \vec{H} .

9.9 Example VII

Considere agora que em vez do solenoíde tem a situação descrita na Fig. 9.5. Nesta figura existem duas folhas de corrente perpendiculares ao plano xy e estendendo-se até ao infinito na direção do eixo dos z . A corrente superficial é $\vec{J}_S = \mp J_S \hat{e}_z$ em $x = \pm d$, respectivamente. Este problema destina-se a mostrar que, qualitativamente, esta situação é muito semelhante à do problema anterior (solenóide). Por outro lado os cálculos podem ser feitos analiticamente até ao fim.

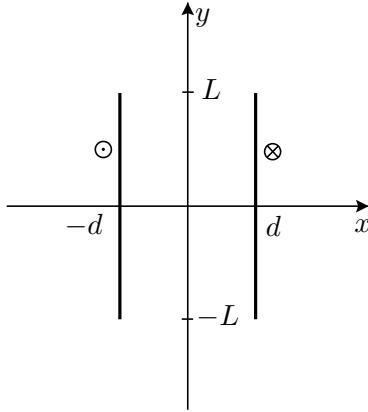


Figure 9.5: Folhas de corrente

a) Mostre que o potencial vector tem componente só segundo o eixo do z e que se pode escrever

$$\begin{aligned} A_z &= \lim_{L_z \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{-L}^L dy' \int_{-L_z}^{L_z} dz' \left[\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + (y-y')^2 + z'^2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + (y-y')^2 + z'^2}} \right] \\ &= \frac{\mu_0 J_S}{4\pi} \int_{-L}^L dy' \left[\ln \left(\frac{d^2 + y'^2}{(x+d)^2 + (y-y')^2} \right) - \ln \left(\frac{d^2 + y'^2}{(x-d)^2 + (y-y')^2} \right) \right] \quad (9.53) \end{aligned}$$

b) Mostre que as componentes do campo magnético são dadas por

$$H_x = \frac{J_S}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{(d+x)^2 + (-L+y)^2}{(d+x)^2 + (L+y)^2} \right) - \ln \left(\frac{(d-x)^2 + (-L+y)^2}{(d-x)^2 + (L+y)^2} \right) \right] \quad (9.54)$$

e

$$H_y = \frac{J_S}{2\pi} \left[-\tan^{-1} \left(\frac{y-L}{x+d} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y+L}{x+d} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{y-L}{x-d} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{y+L}{x-d} \right) \right] \quad (9.55)$$

Sugestão: Em vez de fazer primeiro o integral da Eq. (9.53), faça as derivadas ($B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}$ e $B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$) e o integral em z' depois.

c) Faça gráficos de H_x e H_y e mostre que reproduz o comportamento do problema VI.

d) Mostre que $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$.

e) Mostre que $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ fora das correntes, isto é, para $x \neq \pm d$. Obter a expressão correcta

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = J_S \left[\delta(x + d) - \delta(x - d) \right] \vec{e}_z \quad (9.56)$$

não é fácil a partir das equações anteriores devido à presença das funções δ . No entanto é fácil de mostrar que o rotacional não é nulo através do cálculo da circulação de \vec{H} . Considere o contorno da Fig. 9.6.

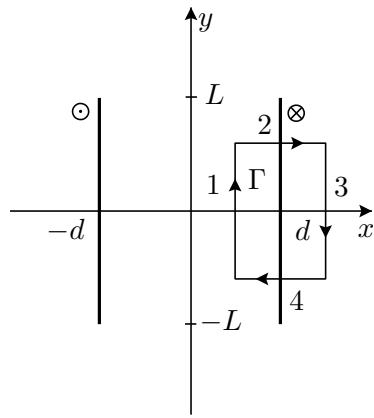


Figure 9.6: Contorno Γ .

Usando as expressões explícitas para H_x e H_y , mostre que

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = J_S l \quad (9.57)$$

onde l é a altura do rectângulo, em acordo com a Eq. (9.56) e aplicando o teorema de Stokes.

f) Obtenha H_x e H_y no limite $L \rightarrow \infty$ e mostre que $H_x = 0$ e $H_y = J_S$.

g) Desenhe as linhas de campo de \vec{H} .

Chapter 10

Field \vec{B} of Circular Current Loop

10.1 Introduction

When deriving the expression for the \vec{B} field of a long solenoid, where the length is much greater than its radius, $L \gg R$, one usually uses Ampère law. For that one assumes that the field \vec{B} inside the solenoid is uniform and parallel to the axis and vanishes outside. This can be shown starting with a finite solenoid and then plotting the resulting field as function of L/R . This is done in Ref.[1] (see Fig. 2.16 and Exercises 2.32, 2.33 and 2.34 there). But as the result is already presented in terms of the field integrated over all the current loops that constitute the solenoid, one loses a visualization of the effect.

To illustrate the physics we will solve the following problem. Consider a circular current loop of intensity I and radius R that is parallel to the xy plane and with center on the z axis. The direction of the current is parallel to \vec{e}_ϕ in cylindrical coordinates. Let z_0 be the z coordinate of the plane of the current loop. Then take a point $P = (x, 0, 0)$ on the x axis and such that $x > R$, that is always outside the solenoid that one would make superposing the current loops. It is clear that at P the \vec{B} field has $B_y = 0$. Calculate the field \vec{B} for various positions z_0 of the loop and for each draw the field lines. This will give a better understanding of the way the fields coming from different loops will cancel out.

10.2 Expressions for the fields

10.2.1 Setup

To be able to make this exercise we need the expressions for the fields. These are complicated expressions that eventually can either be integrated numerically or expressed in terms of elliptic integrals. We define the vector position of a point in the circular current loop, and the displacement along the loop by,

$$\vec{r}_0 = R(\cos \phi \vec{u}_x + \sin \phi \vec{u}_y), \quad d\vec{l} = R(-\sin \phi d\phi \vec{u}_x + \cos \phi d\phi \vec{u}_y) \quad (10.1)$$

As we want the fields on the xz plane, one can simplify things by choosing for the position vector of the observation point,

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y \quad (10.2)$$

with this we get

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{x^2 + R^2 + (z - z_0)^2 - 2xR \cos \phi} \quad (10.3)$$

$$\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = [(z - z_0)R \cos \phi \, d\phi] \vec{u}_x + [(z - z_0)R \sin \phi \, d\phi] \vec{u}_y + [-xR \cos \phi \, d\phi + R^2 d\phi] \vec{u}_z \quad (10.4)$$

Now we insert this in the Biot-Savart law

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.5)$$

to obtain

$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(z - z_0)R \cos \phi \, d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.6)$$

$$dB_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(z - z_0)R \sin \phi \, d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.7)$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-xR \cos \phi + R^2) d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.8)$$

10.2.2 The Fields

Now these expressions have to integrate along the loop in ϕ . Let us start by showing that indeed $B_y = 0$. We have

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z_0)R \sin \phi \, d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (z - z_0)R \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi}{[x^2 + R^2 + (z - z_0)^2 - 2xR \cos \phi]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} (z - z_0)R \left[-\frac{1}{xR} \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2 + (z - z_0)^2 - 2xR \cos \phi}} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (10.9)$$

For the other components we have

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(z - z_0)R \cos \phi \, d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.10)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-xR \cos \phi + R^2) d\phi}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (10.11)$$

Now these expressions can either be integrated numerically very easily (the functions are smooth function of ϕ) or analytical expressions can be obtained in terms of Elliptic functions (see section 9.2). We get

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(z - z_0) ((R^2 + x^2 + (z - z_0)^2) E(-\eta) - (R^2 + 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2) K(-\eta))}{x \sqrt{R^2 - 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2} (R^2 + 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2)} \quad (10.12)$$

and

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(R^2 + 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2) K(-\eta) + (R^2 - x^2 - (z - z_0)^2) E(-\eta)}{\sqrt{R^2 - 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2} (R^2 + 2Rx + x^2 + (z - z_0)^2)} \quad (10.13)$$

where we have defined

$$\eta = \frac{4Rx}{R^2 - 2xR + x^2 + (z - z_0)^2} \quad (10.14)$$

The results are expressed in terms of elliptic integrals of first and second kind that were defined in Eq. (9.2) and Eq. (9.3), respectively. They were obtained using **Mathematica** to do the integration. If we compare Eq. (10.12) and Eq. (10.13) with those obtained in section 9.4, Eq. (9.18) and Eq. (9.19) they look quite different, besides the trivial difference that here we consider the loop at z_0 and there $z_0 = 0$. Let us show that that are indeed equal. Define

$$\zeta = \sqrt{(a - \rho)^2 + (z - z_0)^2} \quad (10.15)$$

where we are using the notation of section 9.4, that is, $B_x = B_\rho$, $R = a$, $x = \rho$. Then we obtain from Eq. (10.12) and Eq. (10.13),

$$B_\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(z - z_0)}{\rho} \frac{1}{\zeta} \left[-K(-\eta) + \frac{(a^2 + \rho^2 + (z - z_0)^2)}{\xi^2} E(-\eta) \right] \quad (10.16)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \left[K(-\eta) + \frac{(a^2 - \rho^2 - (z - z_0)^2)}{\xi^2} E(-\eta) \right] \quad (10.17)$$

where we have used Eq. (9.13),

$$\xi = \sqrt{(a + \rho)^2 + (z - z_0)^2} \quad (10.18)$$

To complete the proof of the equivalence one needs Eq. (9.6) and Eq. (9.7). We start by noticing that

$$\frac{k^2}{k^2 - 1} = -\eta, \quad k^2 = \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + (z - z_0)^2} \quad (10.19)$$

Therefore

$$E(-\eta) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} E(k^2) \quad (10.20)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{4a\rho}{(a + \rho)^2 + (z - z_0)^2}}} E(k^2) \quad (10.21)$$

$$= \frac{\sqrt{(a + \rho)^2 + (z - z_0)^2}}{\sqrt{(a - \rho)^2 + (z - z_0)^2}} E(k^2) \quad (10.22)$$

$$= \frac{\xi}{\zeta} E(k^2) \quad (10.23)$$

In a similar way one can show that

$$K(-\eta) = \sqrt{1 - k^2} K(k^2) = \frac{\zeta}{\xi} K(k^2) \quad (10.24)$$

showing the equivalence of Eq. (10.12) and Eq. (10.13) with Eq. (9.18) and Eq. (9.19).

10.3 Examples

10.3.1 Plots of the \vec{B} field

We evaluate \vec{B} at point $P = (1.5R, 0, 0)$. Then we varied the vertical position of the current loop with current I between $z_0 = -5R$ and $z_0 = 5R$. We verified that Eqs. (10.12)-(10.13) gave the same result as the numerical integration in Eqs. (10.9)-(10.10). In Fig. 10.1 we show the plots for both B_x and B_z in arbitrary units. These plots are very interesting and show everything we

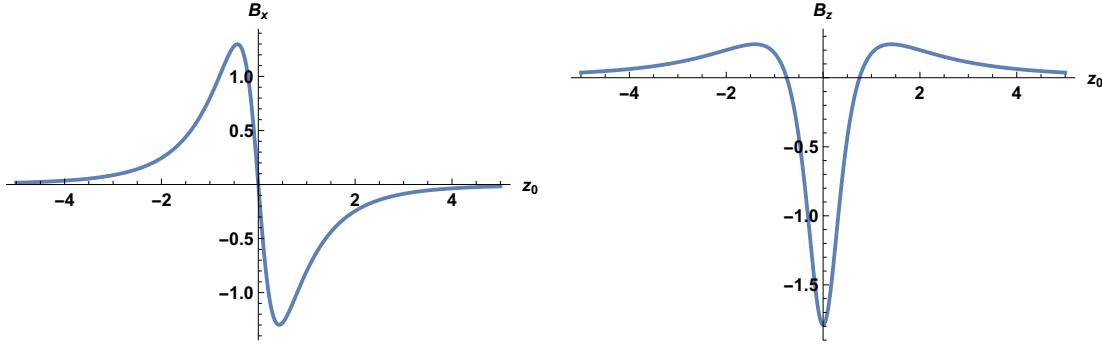


Figure 10.1: Left panel: B_x as a function of z_0 . Right Panel: B_z as a function of z_0 . The units are arbitrary.

need to know to understand the field outside a long solenoid. First we look at B_x . We see that it satisfies

$$B_x(z_0) = -B_x(-z_0) \quad (10.25)$$

therefore the B_x component for $z_0 > 0$ cancels with the B_x for $z_0 < 0$. That is, even for a finite solenoid, extending from $z = -L$ to $z = L$, the B_x component at point P vanishes, as it should by symmetry. Now the situation for B_z is quite different. There is no cancellation from positive and negative z_0 . We see that for small z_0 the field is negative, then for some small z_0 vanishes and then becomes positive. The vanishing of B_z for a long solenoid is obtained by cancelling the negative contribution with the positive, and therefore only true when $L \rightarrow \infty$.

10.3.2 Plots of the field lines

We can also look at the field lines passing through point P. This is an interesting exercise. The definition is as follows. We start at P,

$$x_1 = 1.5R, \quad z_1 = 0 \quad (10.26)$$

Now the $n + 1$ iteration is obtained by

$$x_{n+1} = x_n + \Delta r \frac{B_x(x_n, z_n)}{|\vec{B}(x_n, z_n)|} \quad (10.27)$$

$$z_{n+1} = z_n + \Delta r \frac{B_z(x_n, z_n)}{|\vec{B}(x_n, z_n)|} \quad (10.28)$$

as we now the field, we can obtain the set of points that constitute the field line. A simple **Mathematica** program to achieve this is

```

R = 1; z0 = 0.7;
FLine = {{1.5, 0}};
dr = 0.0001;
Npoints=70000;
Do[AbsB =
  Sqrt[BxFunction[FLine[[i]][[1]], FLine[[i]][[2]], R, z0]^2 +
    BzFunction[FLine[[i]][[1]], FLine[[i]][[2]], R, z0]^2];
  x = FLine[[i]][[1]] +
    dr BxFunction[FLine[[i]][[1]], FLine[[i]][[2]], R, z0]/AbsB;
  z = FLine[[i]][[2]] +
    dr BzFunction[FLine[[i]][[1]], FLine[[i]][[2]], R, z0]/AbsB;
  FLine = Append[FLine, {x, z}], {i, 1, Npoints}];
Dataz007 = FLine;
ListPlot[FLine, PlotRange -> {{0, 4}, {-1, 2}}]

```

The result is shown in Fig 10.2 where we draw the field lines in the plane x, z at point

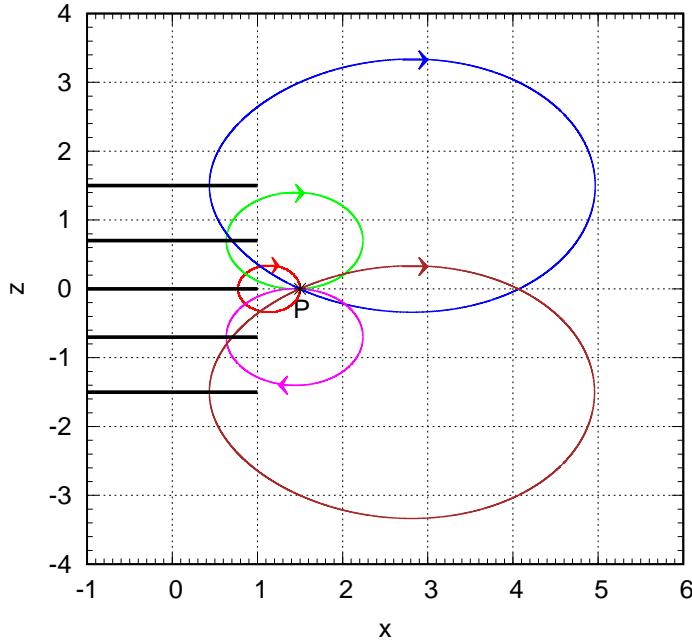


Figure 10.2: Field lines in the plane x, z at point $P=(1.5, 0, 0)$ produced by 5 current loops with radius $R = 1$ at positions $(0, 0, z_0)$ with $z_0 = -1.5, -0.7, 0, 0.7, 1.5$.

$P=(1.5, 0, 0)$ produced by 5 current loops with radius $R = 1$ at positions $(0, 0, z_0)$ with $z_0 = -1.5, -0.7, 0, 0.7, 1.5$. The discussion that we had before should be even more clear now.

One final note is important concerning the method of determining the field lines. It is not obvious, from the start, what is the best value for Δr and for the number of points. Therefore some trial and error is needed to get the best values. Two examples of bad choices are given in Fig. 10.3.

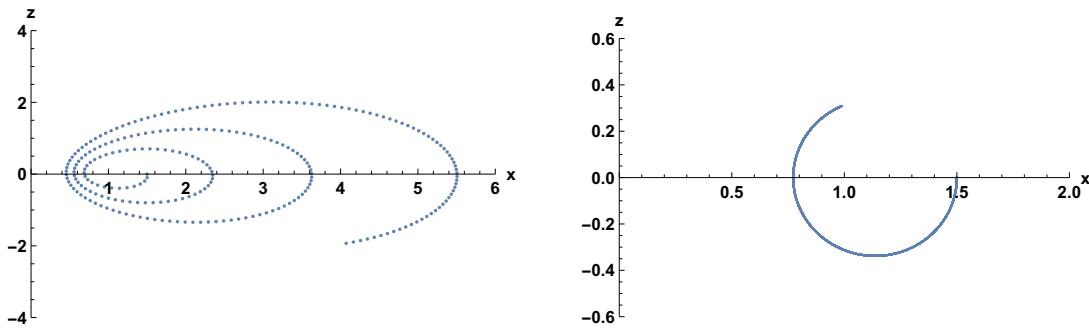


Figure 10.3: Left Panel: Field lines starting at $P=(1.5, 0, 0)$ for a current loop placed at $z_0 = 0$ with $\Delta r = 0.1$ and Npoints= 250. Right Panel: Field Lines starting at $P=(1.5, 0, 0)$ for a current loop placed at $z_0 = 0$ with $\Delta r = 0.0001$ and Npoints=15000.

Chapter 11

Mutual inductance of a toroidal coil with a wire

11.1 Toroidal coil and straight wire

We consider the situation in Fig. 11.1, where we have a toroidal coil with N turns with a stationary current I_2 , and a long straight wire with stationary current I_1 . Consider that $I_1 = 0$ and that the dimensions are such that we can make the infinite wire approximation. Then the

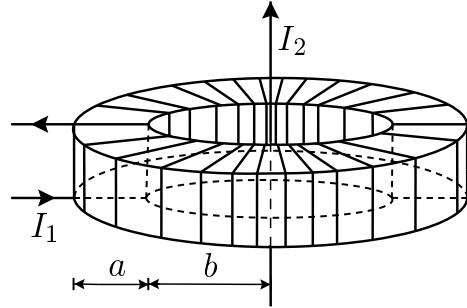


Figure 11.1: Toroidal coil and straight wire

magnetic induction is obtained, as usual, using Ampere's law and we get

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi. \quad (11.1)$$

Now the magnetic flux on one turn is given by

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_0^a dz \int_b^{a+b} dr \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \ln \frac{a+b}{b}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Then the total flux on the toroid is

$$\Phi_{\text{Total}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a N \ln \frac{a+b}{b}, \quad (11.3)$$

and the mutual inductance

$$M = M_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} a N \ln \frac{a+b}{b}. \quad (11.4)$$

Normally it is said at this point that although $M = M_{12} = M_{21}$ it would be very difficult to evaluate M_{21} because of the precise definition of the circuit the wire being infinite.

11.2 Toroidal coil and square wire on the axis

Consider now that we have the same toroidal coil, but now we have a circuit made of a square wire with sides L , that encloses the toroid as shown in Fig. 11.2. One of the sides of the square lies in a plane that contains the symmetry axis of the toroid. Therefore the intersection of this plane with the toroid is a square of sides a .

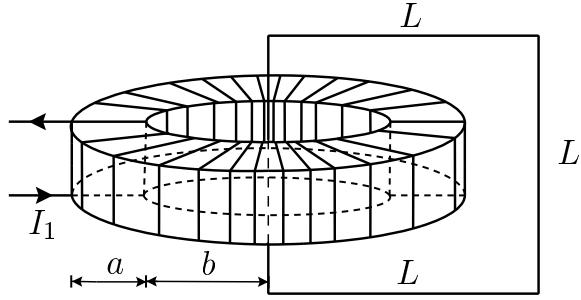


Figure 11.2: Toroidal coil and square wire on the axis

Now we ask the question of finding the mutual inductance between both circuits. Again the problem is easier if we put a current I_1 flowing into the toroid and calculate the flux on the square circuit. For this we need to know the magnetic field produced by the toroid. Ampere's law and the symmetry of the problem tell us that \vec{B} vanishes outside the toroid and inside is given by

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} N \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi. \quad (11.5)$$

Now the flux through the square circuit is only different from zero in the intersection of the plane of the square with the toroid. So we get (we take $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$)

$$\begin{aligned} \Phi &= \int (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} N \int_0^a dz \int_b^{a+b} dr \frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a N \ln \frac{a+b}{b} \\ &= M_{21} I_1, \end{aligned} \quad (11.6)$$

giving

$$M = M_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} a N \ln \frac{a+b}{b}. \quad (11.7)$$

We notice that this is exactly the same result that we got for the mutual inductance of the straight wire and the toroid. This can be easily understood as we can deform the square circuit

by making L very large while keeping one of the sides on the axis. In this process the flux due to the toroid on the square wire does not change and therefore we get the mutual inductance between the toroid and the straight wire. In this way we have shown that indeed

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (11.8)$$

11.3 Toroidal coil and rectangular wire off-axis

Arriving at this point one might wonder if it is necessary that the side of the square is on the symmetry axis. If we think on the flux due to the toroid the only requirement to get the same result is that the square is in a plane that contains the symmetry axis, for this plane to intersect the toroid in as a square of sides a . This is the situation in Fig. 11.3, where we are even considering a general situation of a rectangular wire of sides l and d . As the flux is again

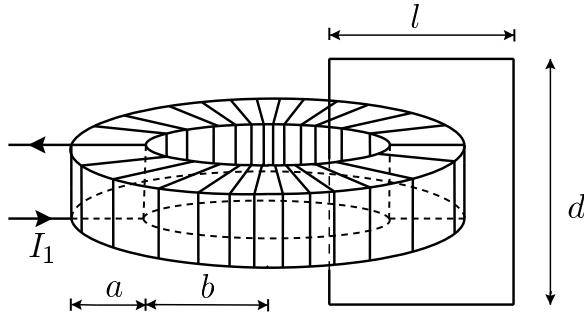


Figure 11.3: Toroidal coil and rectangular wire off-axis

given by Eq. (11.6), the mutual inductance is again given by Eq. (11.7),

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} a N \ln \frac{a+b}{b}. \quad (11.9)$$

11.4 Toroidal coil and off-axis straight wire

The previous result does not change if we deform the rectangular wire in such a way that one of the sides remains inside the circle of radius b and is parallel to the symmetry axis. So we came to the result that we get the same mutual inductance no matter the position of the straight wire if it remains parallel to the symmetry axis and inside the inner circle of radius b of the toroid.

Now the question arises, can we do the calculation starting with the current flowing in the straight wire? The geometry is shown in Fig. 11.4 where we draw a cut on the xy plane. We place the wire at point $Q = (c, 0)$ and the current is flowing in the z direction. Now the field \vec{B} at a point inside the toroid with polar coordinates (r, θ) is given by

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta}} \vec{e}_B \quad (11.10)$$

where the unit vector in the direction of \vec{B} can be easily shown to be

$$\vec{e}_B = \frac{(r - c \cos \theta) \vec{e}_\theta - c \sin \theta \vec{e}_r}{\sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta}} \quad (11.11)$$

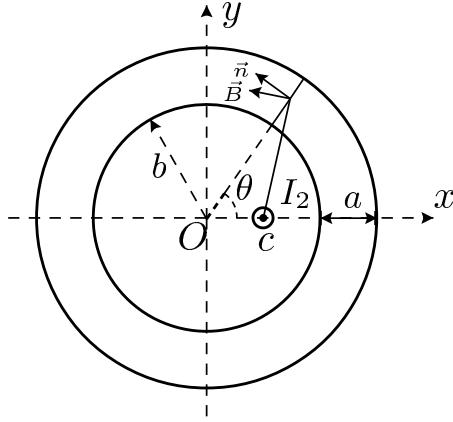


Figure 11.4: Toroidal coil and straight wire off-axis

Therefore

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \frac{(r - c \cos \theta) \vec{e}_\theta - c \sin \theta \vec{e}_r}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} \quad (11.12)$$

Now the flux in the cross section of the toroid at an angle θ as shown in the figure will be ($\vec{n} = \vec{e}_\theta$)

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \int_S (\vec{B} \cdot \vec{n}) dS = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_0^a dz \int_a^{a+b} dr \frac{(r - c \cos \theta)}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} \\ &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \int_a^{a+b} dr \frac{(r - c \cos \theta)}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} \end{aligned} \quad (11.13)$$

Now the number of turns in the interval $d\theta$ is $\frac{N_1 d\theta}{2\pi}$, so the total flux on the toroid is

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \frac{N_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^{a+b} dr \frac{(r - c \cos \theta)}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} \quad (11.14)$$

To do this double integral it turns out that it is much easier to do the integration in θ first, that is

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \frac{N_1}{2\pi} \int_a^{a+b} dr \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(r - c \cos \theta)}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} \quad (11.15)$$

Now a miracle happens and

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{(r - c \cos \theta)}{r^2 + c^2 - 2cr \cos \theta} = \frac{2\pi}{r} \quad (11.16)$$

independent of c ! Therefore we now get easily

$$\Phi_{\text{total}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a N_1 \ln \frac{b+a}{b} \quad (11.17)$$

in agreement with the case when the wire is on the axis, Eq. (11.3). Therefore the mutual inductance does not depend on the position of the straight wire if parallel to the symmetry axis of the toroid. This is a result that I believe was not obvious from the start.

Chapter 12

Mutual inductance of a straight wire and a rectangular loop

12.1 Introduction

One of the standard problems in the calculation of inductances is the mutual inductance M between an infinite straight wire and a rectangular loop placed in a plane that contains the wire as shown in Fig. 12.1. We know that we can calculate M in two ways

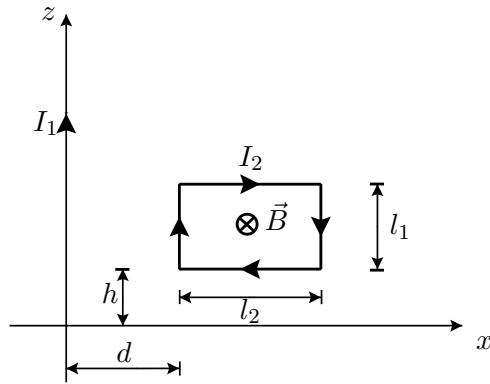


Figure 12.1: Straight wire and rectangular loop.

$$\Phi_2 = MI_1, \quad \text{or} \quad \Phi_1 = MI_2 \quad (12.1)$$

where Φ_2 is the flux through the rectangular loop due to current I_1 on the straight wire, and Φ_1 is the flux on the circuit of the straight infinite wire due to the current I_2 on the rectangular loop. Although the problem is symmetric, the difficulty is not symmetric. The easiest way is to use the well known field of the straight wire on the position of the rectangular loop

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{x} \vec{e}_y \quad (12.2)$$

to obtain the well known result

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r} \int_h^{h+l_1} dz \int_d^{d+l_2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 l_1 \ln \left(\frac{d+l_2}{d} \right)\end{aligned}\quad (12.3)$$

and therefore

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} l_1 \ln \left(\frac{d+l_2}{d} \right) \quad (12.4)$$

Now the question is, can we do the other way around? The answer is yes, but before doing the exact problem we will do first an approximation.

12.2 Approximating the rectangular loop by a magnetic dipole

In doing the reverse problem, there are two difficult problems. The first is to calculate the field of the rectangular loop in any point in the plane xz , the other is to make the integration to obtain the flux. The first problem can be simplified if we assume that the rectangular loop of current can be approximated by a magnetic dipole of magnetic moment

$$\vec{m} = l_1 l_2 I_2 \vec{e}_y \quad (12.5)$$

This should be a good approximation if $d \gg l_1, l_2$. The simplification comes from the fact that we know the field from the magnetic moment[1]

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} \quad (12.6)$$

where \vec{r} is the vector from the center of the dipole to the point where the field is to be evaluated. It is therefore convenient to make a change of coordinates to place the center of the dipole at the origin, as shown in Fig. 12.2 We consider the circuit of current I_1 made out of an infinite straight side at $x = d + \frac{l_2}{2}$, that close in the infinity in the plane xz . Then we just need the B_y component of the field. We have for that component at a generic point in the xz plane,

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_y \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (12.7)$$

where $m_y = I_2 l_1 l_2$. Now we take $\vec{n} = -\vec{e}_y$ and obtain

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 l_1 l_2 \int_{-\infty}^{-d-\frac{l_2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 l_1 l_2 \int_{-\infty}^{-d-\frac{l_2}{2}} dx \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} l_1 l_2 I_2 \frac{1}{d + \frac{l_2}{2}}\end{aligned}\quad (12.8)$$

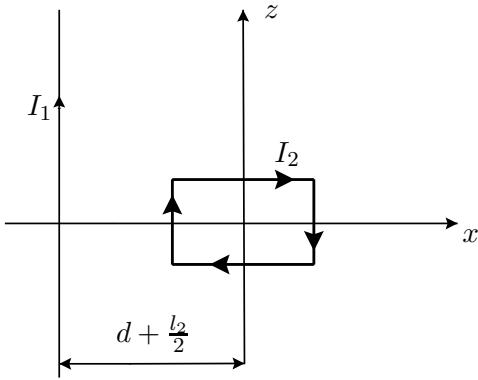


Figure 12.2: Wire off axis and centered rectangle

and therefore

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l_1 l_2}{d + \frac{l_2}{2}} \quad (12.9)$$

To compare Eq. (12.9) with the exact result, Eq. (12.4), we have to look at both in the same limit $d \gg l_1, l_2$. From Eq. (12.4) we have

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} l_1 \left[\frac{l_2}{d} - \frac{l_2^2}{2d^2} + \dots \right] \quad (12.10)$$

and from Eq. Eq. (12.9) we get

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l_1 l_2}{d} \left[1 - \frac{l_2}{2d} + \dots \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} l_1 \left[\frac{l_2}{d} - \frac{l_2^2}{2d^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (12.11)$$

and they are therefore equal within the same approximations.

12.3 Using the vector potential \vec{A}

Before we tackle the exact solution let us look again at the problem of section 12.2, but with a different approach. As

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (12.12)$$

from Stokes theorem we get that

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (12.13)$$

That is, we can get the flux Φ by doing the line integral of \vec{A} . This is simpler for two reasons. The first one is that in general it is easier to calculate \vec{A} than \vec{B} . The second is that we only

need to do the integration on the straight wire, as in the other parts of the circuit, the fields vanish at infinity. Therefore

$$\Phi_1 = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{-\infty}^{\infty} dz A_z \quad (12.14)$$

Now the vector potential of a magnetic dipole is

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{e}_r}{r^2} \quad (12.15)$$

and therefore (see Fig. 12.3)

$$A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} |\vec{m}| \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\vec{m}| \frac{\cos \theta}{L^2 \sec^2 \theta} \quad (12.16)$$

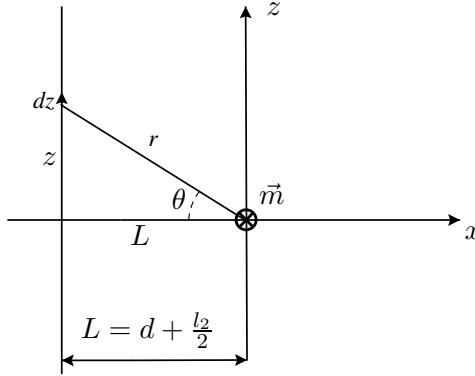


Figure 12.3: Detail of the geometry

Then

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} l_1 l_2 I_2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \theta L \sec^2 \theta d\theta}{L^2 \sec^2 \theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} l_1 l_2 I_2 \frac{1}{d + \frac{l_2}{2}} \quad (12.17)$$

which gives

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} l_1 l_2 \frac{1}{d + \frac{l_2}{2}} \quad (12.18)$$

in agreement with Eq. (12.9).

12.4 Exact calculation

We will use the method of the previous section to do the exact calculation, that is

$$\Phi_1 = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{-\infty}^{\infty} A_z dz \quad (12.19)$$

because the field will vanish in other sides of circuit 1. Now we have to find the exact A_z not the approximate one like in Eq. (12.16). The vector potential \vec{A} is defined up to a gradient of some arbitrary function. With the gauge condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ one can write^[1] for the case of currents in wires,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{wire}} \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (12.20)$$

where $d\vec{l}$ is in the direction of the current, \vec{r} is where you evaluate \vec{A} and \vec{r}_0 is the position vector of $d\vec{l}$ as you integrate along the wire.

Now let us apply this formula to our case, with the geometry as in Fig. 12.1. To get A_z we only need the contribution of the segments of current that are parallel to the z axis. Let us do first the segment of current at $x = d$. We consider a point P along the wire, that is $\vec{r} = z\vec{e}_z$. For the position of the line element along the wire we have,

$$\vec{r}_0 = d\vec{e}_x + z_0\vec{e}_z \quad (12.21)$$

with z_0 in the interval $[-\frac{l_1}{2}, \frac{l_1}{2}]$. Therefore

$$|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{d^2 + (z - z_0)^2} \quad (12.22)$$

and the contribution from that wire to A_z is

$$\begin{aligned} A_z(1) &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}} \frac{dz_0}{\sqrt{d^2 + (z - z_0)^2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-(z - \frac{l_1}{2}) + \sqrt{d^2 + (z - \frac{l_1}{2})^2}}{-(z + \frac{l_1}{2}) + \sqrt{d^2 + (z + \frac{l_1}{2})^2}} \right] \end{aligned} \quad (12.23)$$

Now if you do the same for the segment located at $x = d + l_2$ you get ¹

$$A_z(3) = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \ln \left[\frac{(z + \frac{l_1}{2}) + \sqrt{d^2 + (z + \frac{l_1}{2})^2}}{(z - \frac{l_1}{2}) + \sqrt{d^2 + (z - \frac{l_1}{2})^2}} \right] \quad (12.24)$$

Now we have to add these two contributions and integrate over the z axis. The integrals can easily be done with the help of **Mathematica**. We get for the fluxes due to the two segments

$$\Phi_1(1) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(1) dz, \quad \Phi_1(3) = \int_{-\infty}^{\infty} A_z(3) dz \quad (12.25)$$

We separate the results because there is a fine point to be discussed. If one calculates the integrals we find that they diverge. To be able to get a finite result, we integrate not to infinity but to some large value of $z = L$. We then get

$$\Phi_1(1) = \int_{-L}^L A_z(1) dz$$

¹In Ref.[6] the general formulas for an arbitrary position of the segments are given. They coincide with Eq. (12.23) and Eq. (12.24), for our simple case.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \left[\sqrt{4d^2 + (l_1 - 2L)^2} - \sqrt{4d^2 + (2L + l_1)^2} - l_1 \ln 4 \right. \\
 &\quad \left. + l_1 \left[\ln \left(\frac{2L - l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 - 2L)^2}}{d} \right) + \ln \left(\frac{2L + l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 + 2L)^2}}{d} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + L \left[\ln \left(\frac{-2L + l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 - 2L)^2}}{-2L - l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 + 2L)^2}} \right) + \ln \left(\frac{2L + l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 + 2L)^2}}{2L - l_1 + \sqrt{4d^2 + (l_1 - 2L)^2}} \right) \right] \right] \\
 \Phi_1(3) &= \int_{-L}^L A_z(1) dz \\
 &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \left[-\sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 - 2L)^2} + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (2L + l_1)^2} + l_1 \ln 4 \right. \\
 &\quad \left. - l_1 \left[\ln \left(\frac{2L - l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 - 2L)^2}}{d + l_2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln \left(\frac{2L + l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 + 2L)^2}}{d + l_2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - L \left[\ln \left(\frac{-2L + l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 - 2L)^2}}{-2L - l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 + 2L)^2}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \ln \left(\frac{2L + l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 + 2L)^2}}{2L - l_1 + \sqrt{4(d + l_2)^2 + (l_1 - 2L)^2}} \right) \right] \right] \tag{12.26}
 \end{aligned}$$

Now we expand for large values of L . We get

$$\begin{aligned}
 \phi_1(1) &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \left[2l_1 \ln \frac{2L}{d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \right] \\
 \phi_1(3) &= \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \left[-2l_1 \ln \frac{2L}{d + l_2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \right] \\
 \tag{12.27}
 \end{aligned}$$

We see that the divergences of each integral cancel when we sum the two contributions and we get the final result

$$\Phi_1 = \lim_{L \rightarrow \infty} (\Phi_1(1) + \Phi_1(3)) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} l_1 \ln \frac{d + l_2}{d} \tag{12.28}$$

that is,

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} l_1 \ln \frac{d + l_2}{d} \tag{12.29}$$

in agreement with Eq. (12.4).

12.5 A comment on $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

We have stated that the expression for \vec{A} in Eq. (12.20) implied that $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ [1]. However if we look at \vec{A} at a point on the z axis, one would get

$$\vec{A} = A_x(0, 0, z)\vec{e}_x + A_z(0, 0, z)\vec{e}_z \quad (12.30)$$

where $A_x(0, 0, z)$ is the contribution from the other two segments parallel to the x axis and $A_z(0, 0, z)$ is given in Eq. (12.23) and Eq. (12.24). One would get

$$\frac{\partial A_x(0, 0, z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_z(0, 0, z)}{\partial z} \neq 0, \quad (12.31)$$

and therefore $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \neq 0$. What is wrong? Of course the obvious result that

$$\left. \frac{\partial A_x(x, 0, z)}{\partial x} \right|_{x=0} \neq \frac{\partial A_x(0, 0, z)}{\partial x} \quad (12.32)$$

To clarify this point, it is better to take the observation point out of the z axis. We consider the situation of Fig. 12.4 With this new geometry we get

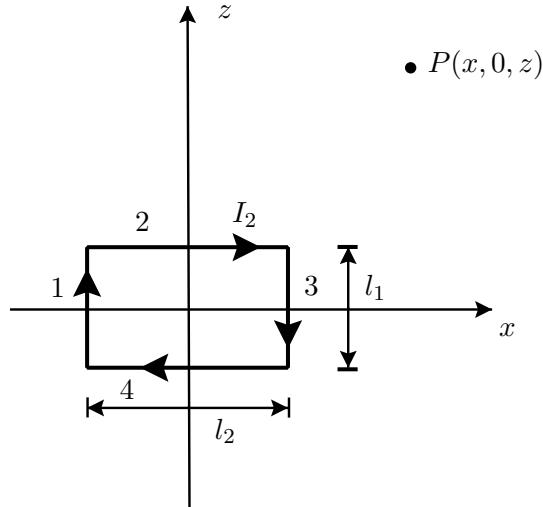


Figure 12.4: New geometry.

$$A_z(1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-(z - \frac{l_1}{2}) + \sqrt{\left(x + \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}}{-(z + \frac{l_1}{2}) + \sqrt{\left(x + \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 A_z(3) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{(z + \frac{l_1}{2}) + \sqrt{\left(x - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}}{(z - \frac{l_1}{2}) + \sqrt{\left(x - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right] \\
 A_x(2) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-(x - \frac{l_2}{2}) + \sqrt{\left(x - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}}{-(x + \frac{l_2}{2}) + \sqrt{\left(x + \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right] \\
 A_x(4) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{(x + \frac{l_2}{2}) + \sqrt{\left(x + \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}}{(x - \frac{l_2}{2}) + \sqrt{\left(x - \frac{l_2}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{l_1}{2}\right)^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{12.33}$$

Now we can calculate $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$. We get the following partial results

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_z(1)}{\partial z} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 + 4l_2 x - 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} + \frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 + 4l_2 x + 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} \right] \\
 \frac{\partial A_z(3)}{\partial z} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 - 4l_2 x - 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} - \frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 - 4l_2 x + 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} \right] \\
 \frac{\partial A_x(2)}{\partial x} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[-\frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 - 4l_2 x - 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} + \frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 + 4l_2 x - 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} \right] \\
 \frac{\partial A_x(4)}{\partial x} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 - 4l_2 x + 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} - \frac{2}{\sqrt{l_2^2 + l_1^2 + 4l_2 x + 4l_1 z + 4(x^2 + z^2)}} \right]
 \end{aligned} \tag{12.34}$$

Now adding the contributions from the four segments we indeed get $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Notice that this only happens after summing over all segments, which means that it must be a closed circuit. A line segment does not have $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, because in the derivation[1] we used $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, and for that the circuit as to close.

12.6 \vec{A} of a straight infinite wire

From the previous results one can calculate the \vec{A} from an infinite straight wire. Let us place the wire on the z axis and calculate the \vec{A} at point P as in Fig. 12.4. For this we make $l_2 = 0$

and $l_1 = 2L$ and then make $L \rightarrow \infty$. We get

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left[\frac{-(z-L) + \sqrt{x^2 + (z-L)^2}}{-(z+L) + \sqrt{x^2 + (z+L)^2}} \right] \quad (12.35)$$

Now we take the limit $L \rightarrow \infty$. We find that it is infinite due to the infinite length of the wire. Therefore we stop at a large L . We get

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln(4L) - \ln x + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right) \right] \quad (12.36)$$

which give in cylindrical coordinates

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \Delta_L - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho \quad (12.37)$$

where the term, $\Delta_L = \ln(4L)$, plays the role of a regulator. As it is a constant, we get easily from $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \quad (12.38)$$

as it is well known. We now use Eq. (12.37) to evaluate the flux for several problems.

12.6.1 Straight wire and rectangular loop

We first consider the case of a straight wire and rectangular loop as we studied in section 12.1. There we used the \vec{B} field to evaluate the flux. Here we will use

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} \quad (12.39)$$

and integrate Eq. (12.37) over the rectangle. First notice that the term proportional to Δ_L will vanish upon integration in the rectangle as it is a constant and $d\vec{l}$ has opposite directions on sides 1 and 3 (on sides 2 and 4 \vec{A} and $d\vec{l}$ are orthogonal). For the other term we get

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{l_1} dz [\Delta_L - \ln d - \Delta_L + \ln(d + l_2)] \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} l_1 \ln \frac{d + l_2}{d} \end{aligned} \quad (12.40)$$

giving the same result as Eq. (12.3) and therefore the same value for M , Eq. (12.4).

12.6.2 Straight wire on axis and toroid

We have calculated in section 11.1 the flux on the toroid due to an infinite straight wire on the axis. We can apply now that the above method to obtain (we use the conventions of Fig. 11.1),

$$\Phi_{\text{Total}} = N \oint \vec{A} \cdot \vec{dl}$$

$$\begin{aligned}
 &= N \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_0^a dz [\Delta_L - \ln b - \Delta_L + \ln(a+b)] \\
 &= N \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \ln \frac{a+b}{b}
 \end{aligned} \tag{12.41}$$

in agreement with Eq. (11.3). Notice again that the regulator Δ_L cancels out.

12.6.3 Straight wire off axis and toroid

In section 11.4 we studied the case of the calculation of the mutual inductance of a straight infinite wire parallel to the axis of the toroid but not at the center. We can use the methods of this section to reproduce those results. Using the geometry of Fig. 11.4 we need to know the distance from the wire to a point on the section at angle φ . This is given by

$$d(r, \varphi) = \sqrt{r^2 + c^2 - 2cr \cos \varphi} \tag{12.42}$$

and the flux on that section is (only z component)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\varphi) &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_0^a dz [\Delta_L - \ln d(b, \varphi) - \Delta_L + \ln d(b+a, \varphi)] \\
 &= \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \frac{1}{2} \ln \frac{(a+b)^2 + c^2 - 2c(a+b) \cos \varphi}{b^2 + c^2 - 2cb \cos \varphi}
 \end{aligned} \tag{12.43}$$

and the total flux on the toroid is

$$\Phi_{\text{Total}} = N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) d\varphi \tag{12.44}$$

To evaluate this integral we use the result [7] (for $|\alpha| > |\beta|$),

$$\int_0^{2\pi} \ln [\alpha - \beta \cos \varphi] d\varphi = 2\pi \ln \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha}{2} \tag{12.45}$$

to finally obtain

$$\Phi_{\text{Total}} = N \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} a \ln \frac{a+b}{b} \tag{12.46}$$

in agreement with Eq. (11.17).

12.6.4 Straight wire at origin but at angle θ with axis and toroid

Let us consider now the situation when the wire passes at the origin of Fig. 11.1, but makes an angle θ with the axis of the toroid. The distance from a generic point in cylindrical coordinates, $P = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ to the wire is given by

$$d(r, \varphi, z, \theta) = \sqrt{r^2(1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) + z^2 \sin^2 \theta - 2zr \cos \varphi \cos \theta \sin \theta} \tag{12.47}$$

and therefore the components of the vector potential in cylindrical coordinates at any point P are (from now on we omit the regulator Δ_L as it always cancels in closed path integration)

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cos \theta \ln d(r, \varphi, z, \theta) \tag{12.48}$$

$$A_\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sin \theta \cos \varphi \ln d(r, \varphi, z, \theta) \quad (12.49)$$

Now the flux on a section at angle φ is

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \left[\int_0^a dz \left[A_z(b, \varphi, z, \theta) - A_z(b+a, \varphi, z, \theta) \right] \right. \\ & \left. + \int_b^{b+a} d\rho \left[A_\rho(\rho, \varphi, a, \theta) - A_\rho(\rho, \varphi, 0, \theta) \right] \right] \end{aligned} \quad (12.50)$$

with the total flux being obtained from

$$\Phi_{\text{Total}} = N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) d\varphi \quad (12.51)$$

We have checked numerically that we get the same result as before, Eq. (12.46), and the mutual inductance is again the same, as it should be. To show this analytically is a challenge. The integrals involved are

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \ln d(\rho_0, \varphi, z, \theta) \quad (12.52)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b d\rho \cos \varphi \ln d(\rho, \varphi, z_0, \theta) \quad (12.53)$$

12.6.5 Straight wire off the origin and at angle with axis and toroid

Let us consider now the general case where wire passes at a point off the origin of Fig. 11.4, and makes an angle with the axis of the toroid. We consider the most general case, where the intersection of the wire with the plane xy is (without loss of generality) at

$$\vec{r}_0 = c\vec{e}_x \quad (12.54)$$

and the direction of the wire is given by the unit vector

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \phi' \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi' \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \quad (12.55)$$

where θ, ϕ' are arbitrary angles subject to the condition that the wire does not cross the toroid. The distance from a generic point in cylindrical coordinates, $P = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ to the wire is given by

$$d(\rho, \varphi, z, c, \theta, \phi') = \left| (\vec{r} - \vec{r}_0) - [(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n}] \vec{n} \right| \quad (12.56)$$

and therefore

$$\begin{aligned} d(\rho, \varphi, z, c, \theta, \phi')^2 = & \left[\sin(\theta) \cos(\theta) (c \cos \phi' - \rho \cos(\phi' - \varphi)) - z \cos^2(\theta) + z \right]^2 \\ & + \left[\cos \phi' \sin(\theta) (\sin(\theta) (c \cos \phi' - \rho \cos(\phi' - \varphi)) - z \cos(\theta)) - c + \rho \cos(\varphi) \right]^2 \end{aligned}$$

$$+ [\sin \phi' \sin(\theta)(\sin(\theta)(c \cos \phi' - \rho \cos(\phi' - \varphi)) - z \cos(\theta)) + \rho \sin(\varphi)]^2 \quad (12.57)$$

The components of the vector potential in cylindrical coordinates at any point P are (from now on we omit the regulator Δ_L as it always cancels in closed path integration)

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cos \theta \ln d(\rho, \varphi, z, c, \theta, \varphi') \quad (12.58)$$

$$A_\rho = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sin \theta \cos(\varphi - \phi') \ln d(\rho, \varphi, z, c, \theta, \varphi') \quad (12.59)$$

Now the flux on a section at angle φ is

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \left[\int_0^a dz \left[A_z(b, \varphi, z, c, \theta, \phi') - A_z(b+a, \varphi, z, c, \theta, \phi') \right] \right. \\ & \left. + \int_b^{b+a} d\rho \left[A_\rho(\rho, \varphi, a, c, \theta, \phi') - A_\rho(\rho, \varphi, 0, c, \theta, \phi') \right] \right] \end{aligned} \quad (12.60)$$

with the total flux being obtained from

$$\Phi_{\text{Total}} = N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi) d\varphi \quad (12.61)$$

We have checked numerically that we get the same result as before, Eq. (12.46), and the mutual inductance is again the same, as it should be. To show this analytically is a challenge that we have not attempted.

Chapter 13

O “Paradoxo” do disco de Feynman

13.1 Introdução

No capítulo 17 do volume II do curso **Feynman Lectures on Physics** [8] é apresentado um aparente *paradoxo*. Digo aparente, pois não se trata de facto dum paradoxo mas de um problema que vai aumentar o nosso conhecimento do campo electromagnético. A questão é a seguinte.

Considere a situação representada na figura (copiada do referido livro). Há uma corrente estacionária na bobina e o disco, que pode rodar livremente sem atrito, está parado.

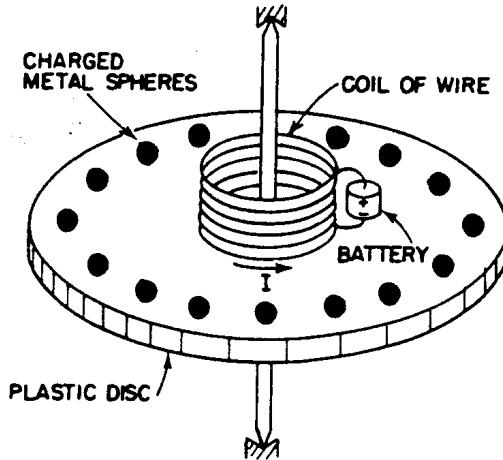


Fig. 17-5. Will the disc rotate if the current I is stopped?

Suponha que num certo instante a corrente na bobina é interrompida sem intervenção exterior. Enquanto havia corrente existia um campo \vec{B} mais ou menos paralelo ao eixo da bobina e portanto existia um fluxo magnético que atravessava o plano do disco. Quando a corrente vai para zero o fluxo também irá para zero. Esta variação de fluxo vai dar origem a um campo eléctrico induzido que circulará em circunferências com centro no eixo. As esferas carregadas

vão sentir este campo eléctrico tangencial ao perímetro do disco. A força é no mesmo sentido para todas as cargas e portanto haverá um binário resultante aplicado ao disco que começará a rodar. Em princípio poderíamos calcular a velocidade angular de rotação conhecendo as cargas, o momento de inércia do disco e a corrente da bobina.

No entanto, daí o paradoxo, poderíamos fazer outro argumento. Usando o princípio de conservação de momento angular podemos dizer que o momento angular do conjunto disco, bobina e cargas é nulo e que portanto deverá permanecer nulo depois da corrente ir para zero. Assim não deverá haver rotação. Qual dos dois argumentos é válido?

Para compreender a solução do problema são necessárias alguns conceitos que normalmente não são dados num curso elementar de electromagnetismo. Vamos expor esses conceitos em forma de problemas.

13.2 Parte I

Comecemos por recordar o teorema de Poynting sobre a conservação de energia em electromagnetismo. Na forma integral pode-se escrever

$$-\frac{dU_{\text{em}}}{dt} = \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS + \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (13.1)$$

onde a energia electromagnética é dada por

$$U_{\text{em}} = \int_V u_{\text{em}} dV \quad (13.2)$$

e a densidade u_{em} é (meios lineares)

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (13.3)$$

Vimos ainda que o último termo da Eq. (13.1) corresponde à taxa de variação da energia mecânica das partículas actuadas pelos campos, isto é,

$$\frac{dU_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV \quad (13.4)$$

Podemos então escrever uma lei de conservação para o sistema campo electromagnético mais partículas carregadas na forma,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (U_{\text{mec}} + U_{\text{em}}) = - \int_S \vec{S} \cdot \vec{n} dS \quad (13.5)$$

com uma interpretação óbvia. Vimos portanto que o sistema campo electromagnético mais partículas carregadas obedece a uma lei da conservação da energia. Vamos neste problema mostrar que algo de semelhante se passa para o momento linear.

- a) Parta da expressão da força de Lorentz para partículas carregadas

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (13.6)$$

para mostrar que a taxa de variação do momento linear das partículas, descritas como distribuições de carga e corrente, se pode escrever

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} = \int_V (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (13.7)$$

b) Use as equações de Maxwell (considere uma interpretação microscópica em que as partículas se movem no vazio com ϵ_0 e μ_0) para substituir ρ e \vec{J} e obter

$$\frac{d\vec{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \vec{G}(t) \quad (13.8)$$

onde

$$\vec{G}(t) = \int_V \left[\epsilon_0 \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \epsilon \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] dV \quad (13.9)$$

c) Mostre que se tem

$$G_i(t) = \int_V \sum_{k=1}^3 \partial_k T_{ik} dV = \int_S \sum_{k=1}^3 T_{ik} n_k dS \quad (13.10)$$

onde se usou o teorema da divergência e o tensor T_{ik} (designado por tensor das tensões de Maxwell) é dado por

$$T_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \frac{1}{\mu_0} B_i B_k - u_{\text{em}} \delta_{ik} \quad (13.11)$$

d) Use os resultados das alíneas b) e c) para, comparando com a alínea a), mostrar que é consistente interpretar

$$\vec{P}_{\text{em}} = \int_V \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \int_V \frac{1}{c^2} \vec{S} dV \quad (13.12)$$

como o momento linear do campo electromagnético. Verifique que as unidades estão correctas.

13.3 Parte II

Neste problema vamos identificar o momento angular associado ao campo electromagnético.

a) Use o tensor completamente antisimétrico no espaço a 3 dimensões ϵ_{ijk} com a definição

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= 1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação par de 123} \\ \epsilon_{ijk} &= -1 && \text{se } (ijk) \text{ for uma permutação ímpar de 123} \\ \epsilon_{ijk} &= 0 && \text{em todos os outros casos} \end{aligned} \quad (13.13)$$

para mostrar que o produto externo de dois vectores se pode escrever

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (13.14)$$

muitas vezes simplesmente escrito como

$$(\vec{A} \times \vec{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (13.15)$$

onde se usou a convenção de Einstein (índices repetidos estão somados).

b) Partindo da equação da mecânica

$$\frac{d\vec{L}_{\text{mec}}}{dt} = \vec{N} = \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}) dV \quad (13.16)$$

mostre que

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_{\text{mec}} + \vec{L}_{\text{em}})_i = \int_S M_{ik} n_k dS \quad (13.17)$$

onde

$$\vec{L}_{\text{em}} = \int_V \vec{r} \times \vec{P}_{\text{em}} dV \quad (13.18)$$

e

$$M_{in} = \sum_{k,j=1}^3 \epsilon_{ikj} r_k T_{jn} \quad (13.19)$$

Estamos agora em condições de atacar o problema do disco de Feynman. Antes de mais, a resposta é que o disco vai rodar. Para isso é preciso compreender que o momento angular do campo electromagnético tem que ser tomado em conta na lei de conservação. Em vez de tratar directamente o problema proposto por Feynman, vamos antes usar uma variante, proposta por Kirk McDonald nos problemas da disciplina de electromagnetismo da Universidade de Princeton <http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/>. A ideia é substituir a bobina por um pequeno dipolo colocado na origem e as cargas por anel carregado uniformemente. Com estas modificações é possível encontrar expressões explícitas para os campos e resolver o problema analiticamente. No entanto, como veremos, o grau de dificuldade é elevado.

13.4 Parte III

Considere uma bobina pequena centrada na origem percorrida por uma corrente que dá origem a um momento magnético $\vec{m} = m \vec{e}_z$. No plano do disco existe um anel de raio a carregado uniformemente com carga total Q . O anel está solidário com o disco e bobina e o conjunto pode rodar livremente em torno do eixo dos z sem atrito, co o no problema inicial do Feynman. Vamos primeiro calcular o momento angular inicial, que será somente o associado ao campo electromagnético.

a) Mostre que o potencial electrostático do anel de carga se pode escrever, em coordenadas esféricas, para um ponto sobre o eixo dos z como

$$\phi(r, 0, 0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(0) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(0) & r > a \end{cases} \quad (13.20)$$

onde se usaram os resultados do Problema III dos Problemas Extra de Electrostática.

b) Use os resultados da alínea a) e os métodos do Problema III dos Problemas Extra de Electrostática para mostrar que em qualquer ponto, com simetria azimutal, se tem

$$\phi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (13.21)$$

c) Usando os resultados da alínea b) e o facto que

$$\frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = P_n^1(\cos \theta) \quad (13.22)$$

mostre que o campo eléctrico devido ao anel de carga tem a expressão geral

$$E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{r^{n-1}}{a^{n+1}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^n}{r^{n+2}} P_n(0) P_n(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (13.23)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{a^{n+1}} P_n(0) P_n^1(\cos \theta) & r < a \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+2}} P_n(0) P_n^1(\cos \theta) & r > a \end{cases} \quad (13.24)$$

$$E_\varphi = 0 \quad (13.25)$$

Nestas expressões $P_n^m(x)$ são os polinómios associados de Legendre e para referência futura

$$\begin{cases} P_{2l}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-1)^l \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + l)}{l!} = (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!} & l = 0, 1, 2, 3, \dots \\ P_{2l+1}(0) = 0 & l = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (13.26)$$

onde se definiu

$$(2l-1)!! = (2l-1)(2l-3)(2l-5)\cdots 1 \quad \text{com} \quad (-1)!! \equiv 1 \quad (13.27)$$

d) Mostre que o campo \vec{B} do dipolo magnético $\vec{m} = m \vec{e}_z$, colocado na origem, se pode escrever em coordenadas esféricas na forma

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m P_1(\cos \theta)}{r^3}, \quad B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m P_1^1(\cos \theta)}{r^3}, \quad B_\varphi = 0 \quad (13.28)$$

onde

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta \quad (13.29)$$

e) Usando os resultados das alíneas anteriores e do Problema II, comece por mostrar que o momento angular do campo \vec{L}_{em} só tem componente segundo o eixo dos z . Mostre em seguida que

$$\left[\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \right]_z = r \sin \theta (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \quad (13.30)$$

Isto quer dizer que para calcularmos o momento angular inicial temos de efectuar o seguinte integral

$$L_{\text{em},z,\text{inicial}} = 2\pi\epsilon_0 \int_0^\infty r^3 dr \int_{-1}^1 d\cos \theta \sin \theta (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \quad (13.31)$$

f) Use a relação

$$\sin \theta P_n^1(\cos \theta) = \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)] \quad (13.32)$$

para escrever

$$\begin{cases} 2\pi\epsilon_0 E_r \sin \theta B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r) P_n(0) P_n(\cos \theta) \frac{2}{3} [P_2(\cos \theta) - P_0(\cos \theta)] \\ -2\pi\epsilon_0 \sin \theta E_\theta B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(r) P_n(0) P_1(\cos \theta) \frac{n^2+n}{2n+1} [P_{n+1}(\cos \theta) - P_{n-1}(\cos \theta)] \end{cases} \quad (13.33)$$

onde definimos

$$g_n(r) = \begin{cases} \frac{n}{2} \frac{r^{n-1}}{a^n} & r < a \\ -\frac{n+1}{2} \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} & r > a \end{cases} \quad (13.34)$$

e

$$f_n(r) = \begin{cases} \frac{r^{n-1}}{a^n} & r < a \\ \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} & r > a \end{cases} \quad (13.35)$$

Agora use a relação de ortogonalidade dos polinómios de Legendre

$$\int_{-1}^1 d\cos \theta P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1} \quad (13.36)$$

para obter

$$\begin{aligned} L_{\text{em},z,\text{inicial}} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \int_0^\infty dr \left[-\frac{2}{15} g_2(r) - \frac{4}{3} g_0(r) + \frac{2}{5} f_2(r) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \left(0 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \end{aligned} \quad (13.37)$$

Como $L_{\text{mec},z,\text{inicial}} = 0$ devemos ter para o momento angular total no instante inicial (antes de interromper a corrente)

$$L_{z,\text{inicial}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \quad (13.38)$$

13.5 Parte IV

Vamos agora calcular o momento angular depois da corrente ter completamente desaparecido da bobina. Nessa situação não existe campo magnético (nesta variante do problema devemos ter $m = 0$) e portanto não há momento angular associado ao campo, só associado ao sistema mecânico. Vamos neste problema calculá-lo e mostrar que é igual ao calculado no problema anterior, havendo portanto conservação de momento angular e havendo rotação do sistema quando a corrente se anula.

a) A variação de fluxo vai dar origem a um campo eléctrico azimutal que obedece (em cada instante) a

$$\oint E_\varphi dl = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (13.39)$$

Mostre que se tem

$$\frac{dL_{\text{mec},z}}{dt} = aQE_\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} \quad (13.40)$$

b) Integre a equação para obter

$$L_{\text{mec},z,\text{final}} = \frac{Q}{2\pi} \Phi_{\text{inicial}} \quad (13.41)$$

c) Calcule Φ_{inicial} . Para isso repare que B_z diverge quando $r \rightarrow 0$. De facto a expressão do momento do dipolo é aproximada e só válida para $r > a$. No entanto note que

$$\Phi_{\text{inicial}} = 2\pi \int_0^a dr r B_z = -2\pi \int_a^\infty dr r B_z \quad (13.42)$$

onde

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m P_2(\cos\theta)}{r^3} \quad (13.43)$$

Justifique.

d) Faça o integral final para mostrar que

$$L_{\text{mec},z,\text{final}} = L_{\text{em},z,\text{inicial}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qm}{a} \quad (13.44)$$

Bibliography

- [1] A. B. Henriques and J. C. Romão, *Electromagnetismo* (2nd Edition, IST Press, Lisboa, 2011).
- [2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1998).
- [3] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover Publications, 1954).
- [4] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing ed. (Dover, New York, 1964).
- [5] H. A. Wheeler, Proceedings of the I.R.E. , 412 (1942).
- [6] A. C. Barroso and J. P. Silva, American Journal of Physics **81**, 829 (2013).
- [7] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 4th edition, 1965).
- [8] R. P. Feynman, Leighton and Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Volumes 1 e 2* (Addison-Wesley, 1964).